4. vika 4. Jöfnur

1. 4.1 A) Annars stigs jöfnur bls. 32

Við höfum í stæ102 kynnst jöfnu með einni stærð óþekktri og hvernig þær eru leystar:

$x - 3 = 6$ Við þurfum að finna tölu í stað
$x = 6 + 3$ x þannig að vinstri og hægri hlið
$x = 9$ jöfnunnar séu jafn stórar.

Ef talan 9 er sett inn í stað x, fáum við útkomuna 6 beggja vegna jafnaðarmerkisins.
Jöfnur af þessu tagi eru stundum kallaðar 1. stigs jöfnur þar sem breytan x er í fyrsta veldi. Fyrsta stigs jöfnur hafa eina lausn, hvorki fleiri né færri.

Annars stigs jöfnur eru leystar á annan hátt:

a) Með þáttun. Hægt er að nota þær þáttunarreglur sem við höfum lært fram að þessu til að þátta 2. stigs jöfnur.

b) Með D-reglu. Sjá reglu á bls. 34 í kennsluhefti. Mjög mikilvæg.

a) Leysum jöfnuna $x^2 - 3x + 2 = 0$.
Hér höfum við 2. stigs jöfnu þar sem 2 er hæsta veldið á x. Leysum hana með þáttun.

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x - 2)(x - 1) = 0$ Finna þarf tölur í staðin fyrir x þannig að útkoman verði jöfn 0.

Ef talan 2 er sett inn í stað x, fáum við útkomuna 0 úr fyrri sviganum.
Þar sem svigarnir eru margfaldaðir saman hlýtur útkoman úr öllu dæminu þá að vera 0.
Á sama hátt má setja 1 inn fyrir x og þá fáum við útkomuna 0 úr seinni sviganum og margfeldi sviganna verður þá einnig 0.
Þetta má setja upp með því að finna hvenær hvor svigi um sig verður núll:
fyrri svigi = 0 seinni svigi = 0
$x - 2 = 0$ $x - 1 = 0$
$x = 0 + 2$ $x = 0 + 1$
$x = 2$ $x = 1$

Þarna hafa lausnir jöfnunnar verið fundnar.

Athugið að hæsta veldið á breytunni x segir til um það hversu margar lausnir jafna getur haft. Annars stigs jafna getur þannig haft 2 lausnir mest. Einnig getur hún haft eina lausn og jafnvel enga.

b) D-regla eða lausnaraðferð 2. stigs jöfnu.

Annars stigs jafna er almennt á forminu

$Ax^2 + Bx + C = 0$

þar sem A, B og C eru fastar tölur eða stuðlar. Þannig eru stuðlar jöfnunnar $x^2 - 3x + 2 = 0$

A = 1 (1 stk. af x^2)

B = -3 (x í fyrsta veldi eru -3, muna eftir formerkjum)

C = 2 (staka talan aftast).

Þegar lausn á 2. stigs jöfnu er fundin með þessari aðferð er byrjað á því að finna hjálparstærðina D sem nefnd hefur verið aðgreinir (diskriminant) jöfnunnar og þessi aðferð er stundum kennd við.

Reglan verður þá þessi:
1) Við skrifum hjá okkur stuðlana A, B og C.
2) Við reiknum út D samkvæmt eftirfarandi formúlu:

$D = B^2 - 4AC$

3) Lausnir jöfnunnar fundnar með eftirfarandi formúlu:

$$x_1 = \frac{-B + \mathrm{kva}(D)}{2A} \qquad x_2 = \frac{-B - \mathrm{kva}(D)}{2A}$$

x_1 þýðir hér lausn númer 1 og x_2 lausn númer 2.

Athugið að aðgreinirinn D segir okkur til um það hversu margar lausnirnar eru:
1) Þegar D er plústala þ.e.a.s. $D > 0$: Tvær lausnir

2) Þegar D er núll þ.e.a.s. $D = 0$: Ein lausn

3) Þegar D er mínustala þ.e.a.s. $D < 0$: Engin lausn

Við skulum reikna í gegn dæmið hér að ofan:

$x^2 - 3x + 2 = 0$
1) Skrifum hjá okkur stuðlana A, B og C.
A = 1
B = -3
C = 2

2) Reiknum út D:

$D = B^2 - 4AC = (-3)^2 - 4*1*2 = 9 - 8 = 1$

Sem sagt D = 1 og þá eru lausnirnar tvær.

3) Lausnir jöfnunnar fundnar:

$$x1 = \frac{-B + \mathrm{kva}(D)}{2A} = \frac{-(-3) + \mathrm{kva}(1)}{2*1} = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x2 = \frac{-B - \mathrm{kva}(D)}{2A} = \frac{-(-3) - \mathrm{kva}(1)}{2*1} = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Hér eru lausnirnar fundar og auðvitað eru þær hinar sömu og við fengum með ágiskunaraðferðinni.