

SKO

Horna- og rúmfræði



Kjartan Heiðberg
Hilmar Friðjónsson

SKO, horna- og rúmfræði

1. útgáfa, 2019

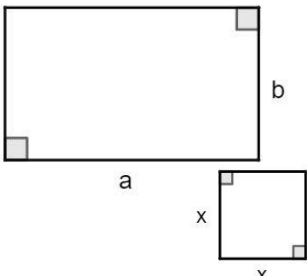
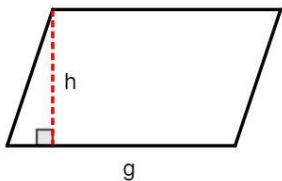
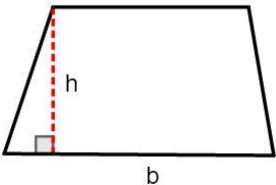
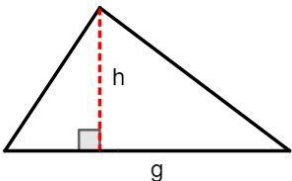
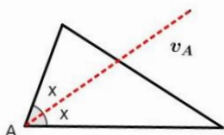
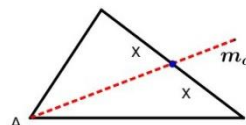
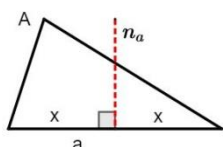
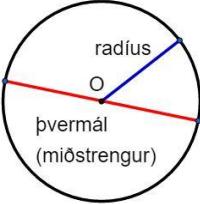
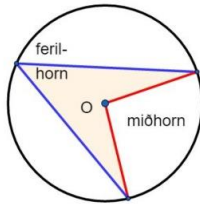
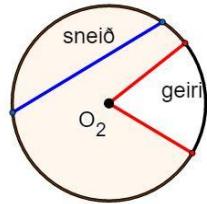
Umbrot og uppsetning: höfundar.

Með bók þessari minnumst við látins vinar og samverkamanns,
Árna Jóhannssonar, stærðfræðikennara.

Prentun: Ásprent Stíll, Akureyri.

Kennsluefnið SKO er styrkt af Þróunarsjóði námsgagna.

FORMÚLUBLAÐ - TVÍVÍÐ FORM

	RÉTTHYRNINGUR Ferhyrningur með öll hornin rétt og gagnstæðar hliðar jafn langar. $F = a \cdot b$ $U = 2a + 2b \text{ (þ.e. summa allra hliðarlengda.)}$ FERNINGUR er rétthyrningur með allar hliðar jafn langar.
	SAMSÍÐUNGUR Ferhyrningur með gagnstæðar hliðar jafn langar og gagnstæð horn jafn stór. $F = g \cdot h$ $U = \text{summa allra hliðarlengda (útlína).}$
	TRAPISA Ferhyrningur með tvær hliðar samsíða (a og b) en hinar ekki. $F = \frac{a+b}{2} \cdot h \quad (a \parallel b)$ $U = \text{summa allra hliðarlengda (útlína).}$
	ÞRÍHYRNINGUR Flatarmál finnst með því að margfalda saman lengd einnar hliðar hans og hæðina á þá hlið.
LÍNUR Í ÞRÍHYRNINGI  <i>helmingalína</i>  <i>miðlína á hliðina</i>  <i>miðþverill á hliðina</i>	
HORNAFÖLL $\tan(A) = \frac{\text{mótl. skammhl.}}{\text{aðlæg skammhl.}}$ $\sin(A) = \frac{\text{mótl. skammhl.}}{\text{langhlið}}$ $\cos(A) = \frac{\text{aðlæg skammhl.}}{\text{langhlið}}$	
HRINGUR  $F = r^2 \cdot \pi$ $U = p \cdot \pi$  	

EFNISYFIRLIT

KAFLI 1, EVKLÍÐ	7
1.1 Punktur	8
1.2 Lína	8
1.4 Strik (línustrik).....	9
1.5 Flötur (slétta).....	9
1.6 Hringur.....	9
1.7 Marghyrningar.....	11
1.8 HORN.....	12
1.9 Einslæg horn.....	13
1.10 Einslæg horn við samsíða línur	13
1.11 Hornapör	14
VERKEFNI 1.A.	15
2. KAFLI, ÞRÍHYRNINGAR.....	19
2.1 Þríhyrningar	19
2.2 Línur í þríhyrningum.....	21
VERKEFNI 2.A.	23
2.3 Hornasumma þríhyrnings.....	25
2.4 Hornasumma marghyrninga	26
2.5 Utanvert horn þríhyrnings.....	27
2.6 Einslaga marghyrningar.....	28
VERKEFNI 2.B.	30
2.7 Regla Pýþagórasar	35
VERKEFNI 2.C.	37
VERKEFNI 2.D.	40
3. KAFLI, SÉRSTAKIR ÞRÍHYRNINGAR	41
VERKEFNI 3.A.....	45
VERKEFNI 3.B.....	48
4. KAFLI - HRINGURINN	55

Radíus	55
Strengur	56
Sniðill og snertill	56
Sneið	56
Geiri	56
4.2 Horn í hring	57
4.A. VERKEFNI	59
4.3 Horn utan við hring	64
VERKEFNI 4.B	65
5. KAFLI, HORNAFÖLL	67
5.1. Hornaföll, inngangur	67
5.2. Tangens	69
VERKEFNI 5.A.	71
5.3. Finnum stærð horna	73
VERKEFNI 5.B.	74
Sínus	75
Sýnidæmi	75
Kósínus	76
VERKEFNI 5.C.	77
VERKEFNI 5.D.	79
VERKEFNI 5.E.	81
6. KAFLI, FLATARMÁL	85
6.1. Rétthyrningar	86
6.3. Samsíðungur	87
6.3. Þríhyrningar	87
6.4. Þríhyrningar	87
6.4. Trapisa	88
6.5. Hringurinn	89
6.6. Hringgeiri	90
VERKEFNI 6.A.	92

7. KAFLI, RÚMMÁLSREIKNINGUR	103
7.1. Ferstrendingur	104
7.2. Þrístrendingur	105
7.4. Sívalningur	106
VERKEFNI 7.A.	112
SVÖR OG LAUSNIR	121



Video 2 Kynning:
Hilmar Friðjónsson



Video 1 Kynning:
Kjartan Heiðberg



Video 3 Um Evklíð

KAFLI 1, EVKLÍÐ

Evklíð (e. Euclid) hét maður sem uppi var um 300 f.Kr. Hann var grískur að uppruna en starfaði lengstum við hið mikla bókasafn í Alexandríu í Egyptalandi.

Í bókasafni þessu er talið að hafi verið um 700.000 bækur (rollur), sem innihéldu mest allan þann ritaða fróðleik fornaldar, sem þá var til. Bókasafnið brann í óeirðum á fyrstu öld f.Kr. þegar sjálfur Sesar Rómarkeisari var þar með ófriði.



Ævistarf Evklíðs fólst í að safna saman allri vitneskju sem hann gat komist yfir varðandi stærðfræði.

Ekki er vitað hve mikið hann lagði til af eigin uppgötvunum en afrek hans fólust í því að samræma og skilgreina þekktar staðreyndir.

Með því lagði hann grunninn að allri stærðfræði flatarmáls og rúmfræði sem notast er við í dag og er hann því kallaður „faðir rúmfræðinnar“.

Skilgreiningar Evklíðs.

Ritverk Evklíðs nefnast „*Frumsendur*“. Verkið samanstendur af samtals 13 bókum sem hver um sig fjallar um aðgreind viðfangsefni stærðfræðinnar.

Í fyrstu bókinni koma fram 23 skilgreiningar sem mynda grunn að rúmfræði- og flatarmálsfræðum.



Þessar skilgreiningar eru staðreyndir, sem ekki verður um deilt og ekki þarf að sanna. Við köllum þær frumsendur (e. *axiom*). Hér á eftir koma nokkrar af mikilvægustu frumsendum Evklíðs.



Video 4 Punktur

1.1 Punktur

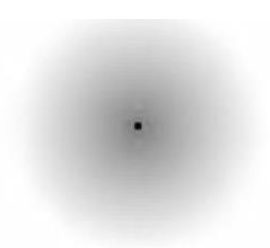
„Punktur er það sem ekki er hægt að skipta“, sagði Evklíð.

Punktur hefur enga breidd, enga lengd og enga lögun.

Því er í raun ekki hægt að teikna punkt, hann hefur enga stærð. Öll rúmfræði byggir þó á því að hann sé til og ef við hugsum um hann sem tiltekna

„staðsetningu“ frekar en fyrirbæri þá gengur allt upp.

Punktur er merktur með stórum staf, t.d A, B eða P o.s.frv. (Ath. rétt er að nota aðeins enska stafrófið).



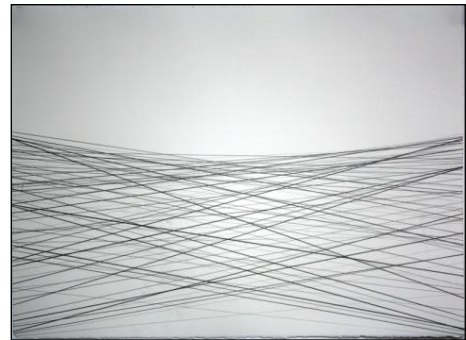
1.2 Lína

„Lína er lengd án breiddar“, sagði E.

Hún er endalaus í báðar áttir, liggur í gegn um endalaust marga punkta, sem hver um sig hefur enga þykkt. Lína hefur því enga þykkt, aðeins lengd.

Þegar talað er um línu í þessari bók er alltaf átt við beina línu. En línur geta auðvitað verið hlykkjóttar sbr. línurit.

Lína er merkt með litlum staf, l , m , n o.s.frv.



Video 5 Lína, háflína & flr

1.3 Háflína (geisli)

Háflína er lína, sem á sér upphaf í punkti og er endalaus í eina átt.

Hún er einnig kölluð geisli, sbr. sólargeisli.

Háflína er merkt með litlum staf eins og allar aðrar línur.

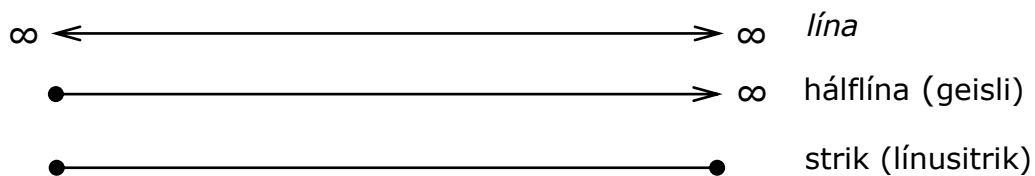
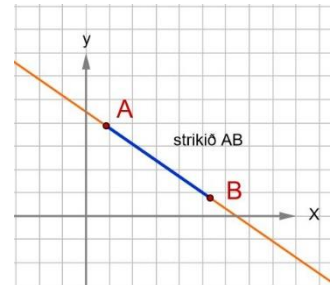


1.4 Strik (línustrik)

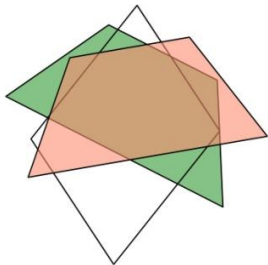
Strik liggur milli tveggja punkta á línu.

Það er því hluti línunnar en hefur takmarkaða lengd.

Strik eru merkt með litlum staf eða það nefnt eftir endapunktum sínum, t.d. strikið AB sem liggur á milli punktanna A og B á tiltekinni línu.



1.5 Flötur (slétta)



Flötur er lengd og breidd en hefur enga þykkt.

Endimörk flatar (ef einhver eru) er lína.

Hægt er að hugsa sér endalaust marga fleti, samsíða fleti og fleti sem skerast á alla hugsanlega vegu. Nærtækasta dæmið um flöt er blaðið eða skjárin sem þú horfir á.

1.6 Hringur

Hringur er mengi punkta sem allir eru í sömu fjarlægð (radíus) frá tilteknum punkti O

(miðpunkti hringsins, stundum merktur með M).



Satúrnus

Við notum orðið hringur um bæði hringferilinn og svæðið innan hans, þ.e. hringflötinn. En það veldur sjaldan nokkrum misskilningi.

Frumsendur Evklíðs eru 5 talsins.

Afrek Evklíðs felst ekki síst í því að búa til sameiginlegan skilning manna á grundvallar hugtökum rúmfræðinnar. Vegna hans orða eru menn t.d. sammála um að „öll rétt horn eru jafn stór“.

Hann byggir skilgreiningar sínar upp á svo einfaldan og skýran hátt að um þær þarf ekki að efast.



Fimm frumsendur Evklíðs eru þessar: ...

1. Hægt er að teikna beint strik milli sérhverra tveggja punkta.
2. Hægt er að framlengja sérhvert beint strik í óendanlega langa beina línu.
3. Hringur er miðpunktur og radíus.
4. Öll rétt horn eru eins.
5. Fyrir gefna línu (l) og gefinn punkt (P), sem ekki er á línunni, er til ein og aðeins ein lína sem fer í gegnum punktinn og sker ekki línuna (skilgr. á samsíða línunum).

Hvaða línur eru samsíða?

Tvær línur í sama fleti (sléttu) sem hafa engan sameiginlegan punkt eru sagðar vera samsíða. Þannig liggja samsíða línur út í hið óendanlega (∞) án þess að skerast. Jafnframt er sérhver lína sögð samsíða sjálfri sér.

Ef línurnar m og n eru samsíða þá er það táknað með $m \parallel n$

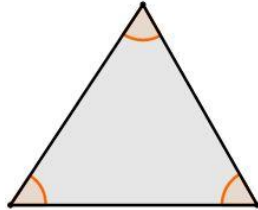


Vatnsflötur Flosagjár á Þingvöllum.

1.7 Marghyrningar

Einfaldasta form marghyrnings er þríhyrningur.

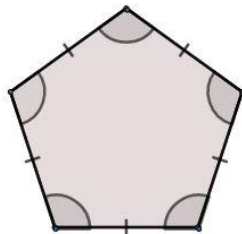
Summa allra horna hans er 180° (sönnum það síðar).



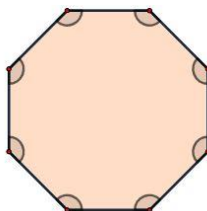
Hornasumma ferhyrnings er hins vegar 360° . Það er augljóst því fjögur horn rétthyrnings, sem hvert þeirra er 90° , gefur okkur 360° samtals.



Fimmhyrningur hefur hins vegar hornasummuna 540° og sexhyrningur 720° .



Þetta skoðum við seinna og finnum aðferð til að reikna út hornasummur hvaða marghyrnings sem er.



Á vísindavefnum er að finna þennan texta um Evklíð:

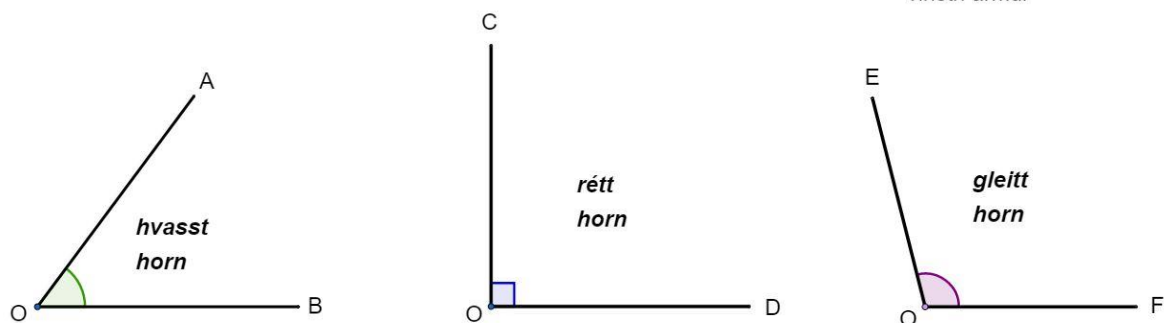
„Bækurnar þrettán varðveittust í arabískum þýðingum. Frumpættir hafa verið grundvöllur margra kennslubóka um flatarmáls- og rúmfræði og í Englandi voru bækurnar þrettán til dæmis sums staðar kenndar óbreyttar allt fram á 20. öld. Á Íslandi höfðu Frumpættir Evklíðs mest áhrif í gegnum Kennslubók í rúmfræði eftir Julius Petersen, sem fyrst var kennd á Íslandi á dönsku árið 1877 og var höfuð-kennslubókin í þessari grein í íslenskum framhaldsskólum fram til um 1970. Sigurkarl Stefánsson þýddi bókina 1943 þegar ekki var lengur hægt að kaupa bækur frá Danmörku vegna heimsstyrjaldarinnar síðari 1939-1945.“



Video 6
Marghyrningar

1.8 HORN

Tvær hálfínur með sama upphafspunkt mynda horn. Upphafspunktur háflínanna kallast oddpunktur (merktur O) hornsins og háflínurnar kallast armar þess, hægri eða vinstri miðað út frá O.



Heiti horns er yfirleitt myndað út frá þeim þrem bókstöfum sem afmarka hornið. Þá er oddpunkturinn alltaf hafður í miðjunni. Hvassa hornið hér að ofan er því hornið AOB, með O sem oddpunkt. Rétt hornið heitir þá hornið COD o.s.frv.



Video 7 Horn

Horn eru mis stór (gleið):

Hvasst horn $< 90^\circ$

Rétt horn $= 90^\circ$

Gleitt horn $> 90^\circ$

Beint horn $= 180^\circ$ (armar mynda beina línu)

„Glaðhorn“

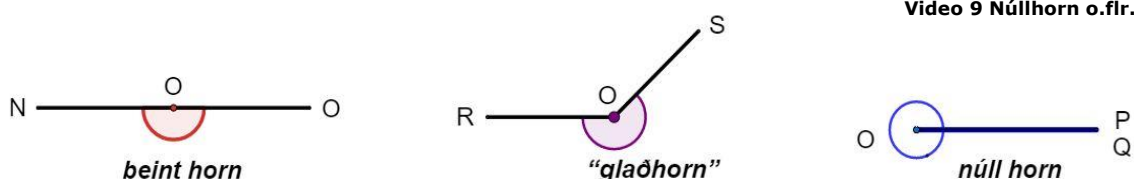
Núll horn $= 0^\circ$ (armar liggja hvor á öðrum)



Video 8 Gleitt horn



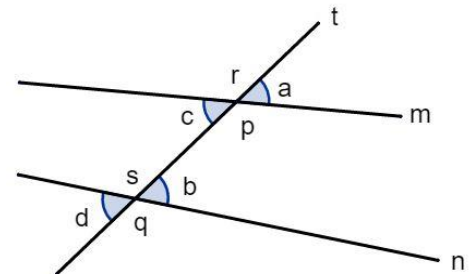
Video 9 Núllhorn o.flr.



1.9 Einslæg horn

Þar sem tvær línur (m og n) eru skornar af þriðju línunni (t) myndast alls átta horn, fjögur við hvorn skurðpunkt.

Horn, sem hafa línuna t sameiginlega, ýmist sem vinstri arm eða sem hægri arm, nefnast einslæg horn. Þannig eru hornin a og b einslæg í þessari mynd því línun t er vinstri armur hjá báðum. Hornin c og d hafa t einnig sem sinn vinstri arm svo öll þessi horn eru einslæg.



Hornin r , s , t , p og q hafa línuna t sem sinn hægri arm svo þau eru einslæg. Hornin a og r eða a og q o.s.frv. eru hins vegar mismislæg því línun t er ýmist vinstri eða hægri armur þeirra.

Til að átta sig á hvor armurinn er vinstri og hvor hægri er best að staðsetja sig í oddpunkti hornsins og horfa inn í hornið út frá honum.

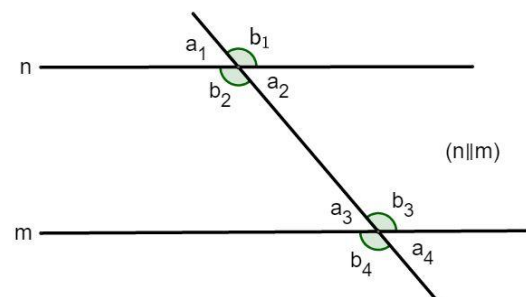


Video 10 Einslæg horn

1.10 Einslæg horn við samsíða línur

Allar vangaveltur um horn og tengsl þeirra má rekja beint til frumsenda Evklíðs og skilgreininga hans. Svo er einnig um tvær mikilvægar reglur sem tengjast einslægum hornum við samsíða línur.

1. Ef einslæg horn eru jafn stór þá eru línurnar m og n samsíða.
2. Ef línurnar m og n eru samsíða þá eru einslæg horn jafn stór.



Takið eftir því að einslæg horn eru ekki jafn stór nema línurnar tvær, sem skornar eru af þeirri þriðju, séu samsíða og öfugt. Línurnar eru samsíða ef einslæg horn eru jafn stór.



Video 11 Einslæg horn



Video 12 Hornapör

1.11 Hornapör

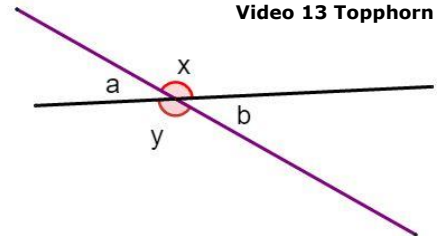
Topp horn

Þar sem tvær línur skerast myndast fjögur horn. Þau horn, sem liggja hvort á móti öðru kallast topphorn.

Þau eru alltaf jafn stór.

Hérna eru x og y topphorn hvors annars. Því er víst að $x = y$.

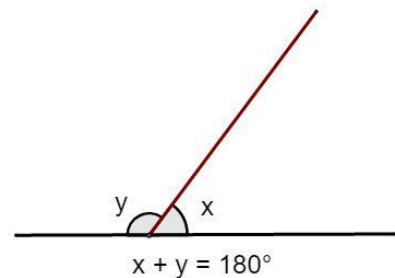
Sama gildir um hornin a og b . $a = b$.



Video 13 Topp horn

Grannhorn

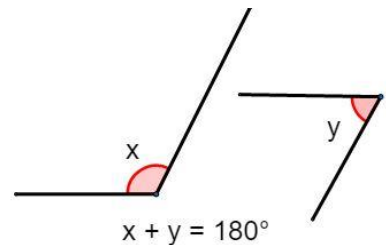
Horn, sem hafa einn sameiginlegan arm og hinir armarnir mynda beina línu, eru nefnd grannhorn. Summa þeirra er þá 180° (bein lína).



Frændhorn

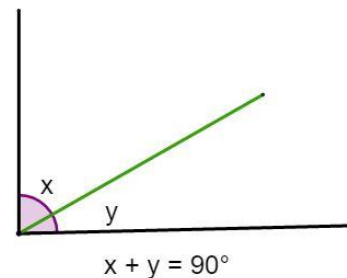
Tvö horn sem samanlögð eru 180° nefnast frændhorn.

Þau þurfa ekki að liggja saman í fletinum.



Lagshorn

Tvö hvöss horn sem samtals eru 90° .

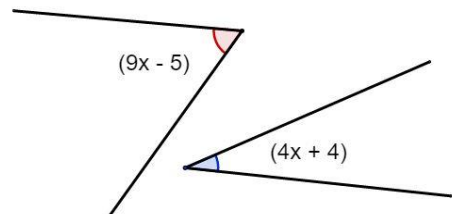
Video 14 Grannhorn,
frændhorn og lagshorn

VERKEFNI 1.A.

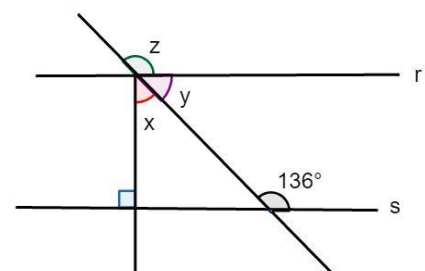
Notaðu reglustiku og/eða gráðuboga. Gott er að rissa upp allar myndir. Þær þurfa ekki að vera nákvæmlega teiknaðar.

1. Dragðu strikið $AE = 8$ cm.
Merktu punktana B, C og D á línuna á milli A og E (sama hvar á línunni punktarnir lenda). Tilgreindu þau 10 mismunandi strik, sem þú getur lesið út úr myndinni.
2. Teiknaðu grannhornin x og y þar sem $x = 56^\circ$.
Hve stórt er hornið y ?
3. Hver er oddpunkt horns, sem merkt er svona: STP ?
Teiknaðu hornið og merktu.
4. Hve stór eru grannhorn ef annað hornið er þrefalt stærra en hitt?

5. Myndin sýnir lagshorn.
Hve stórt er hvort þeirra?

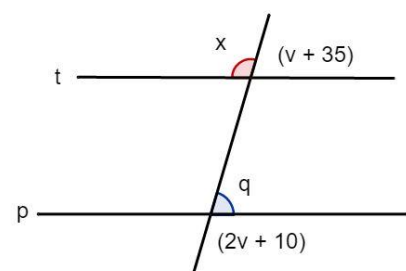


6. Teiknaðu topphorn þar sem eitt hornið er 24° . Hve stór eru hin hornin í hornafernunni?

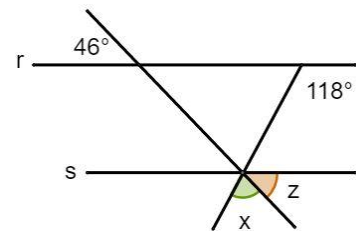


7. Hve stór eru hornin x , y , og z ef línurnar r og s eru samsíða?

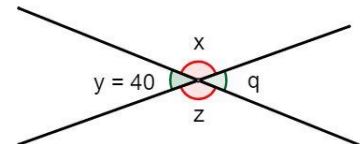
8. Línurnar t og p eru samsíða.
Reiknaðu v og stærðirnar á hornunum x og q ?



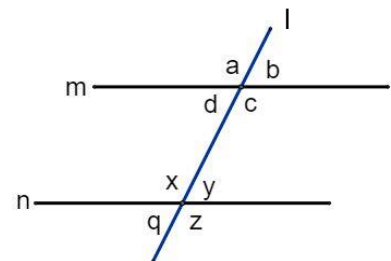
9. Línurnar r og s eru samsíða. Reiknaðu stærðir hornanna x og z .



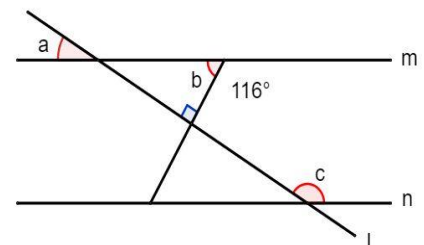
10. Líttu á myndina hér til hliðar.
- Hve stórt er hornið x ?
 - Hvað nefnist hornaparið x og y ?
 - Hve stórt er hornið z ?
 - Hvað nefnist hornaparið x og z ?
 - Hvað nefnist hornaparið x og q ?



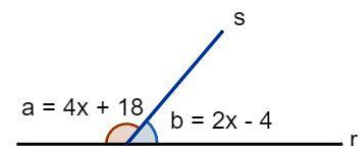
11. Línurnar m og n eru samsíða ($m \parallel n$) og eru skornar af línunni l . Hvaða horn eru einslæg horninu x (og þá um leið jafn stór og x)?



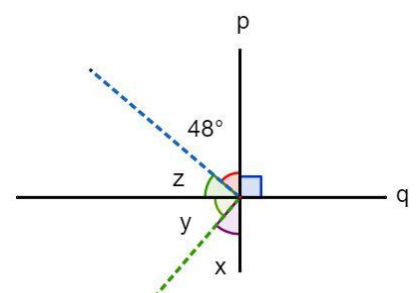
12. Línurnar m og n eru samsíða og báðar skornar af línunni l . Reiknaðu hornin a , b og c ?



13. Hve stór eru hornin a og b ?

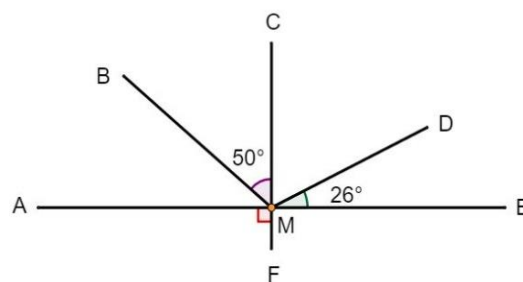


14. Hornin y og z eru lagshorn. Hve stór eru hornin x , y , og z ?

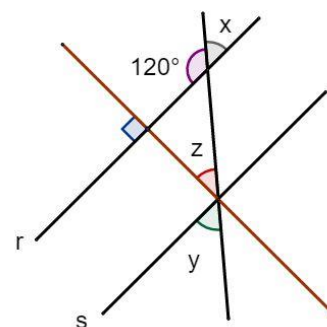


15. Þú veist að rétt horn er 90° og að bein lína er 180° . Nýttu þér það til að finna stærðir hornanna:

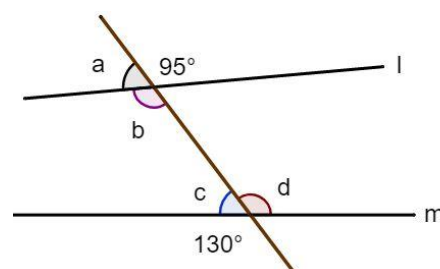
- a) BMA b) CMD
c) BMD d) AMD



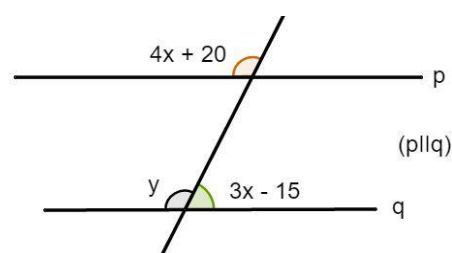
16. Línurnar r og s eru samsíða. Hve stór eru hornin x , y , og z ?



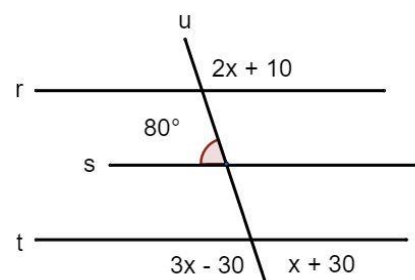
17. Línurnar l og m eru ekki samsíða. Finndu stærð hornanna sem merkt eru bókstöfum.



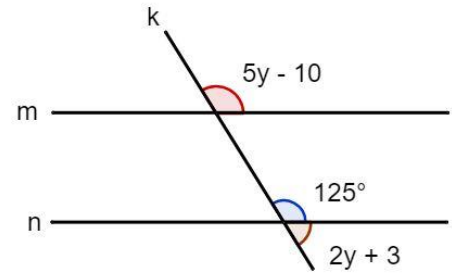
18. Settu upp jöfnu til að reikna út gildið á x og stærð hornsins y .



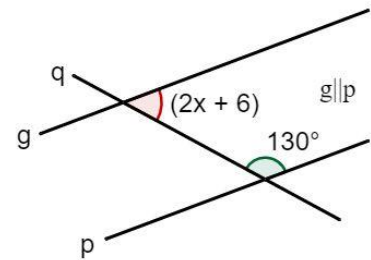
19. Tvær af línunum r , s og t eru samsíða. Finndu út hverjar.



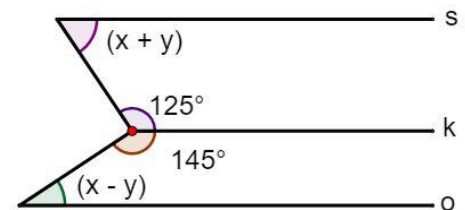
20. Línurnar m og n eru ekki samsíða.
Rökstyddu af hverju það er svo.



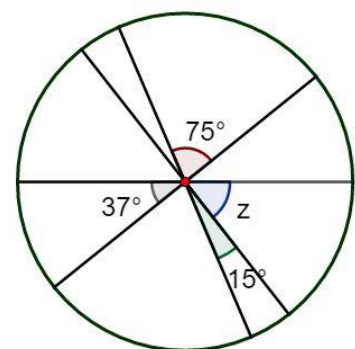
21. Reiknaðu gildið á x .



22. Línurnar s , k og o eru samsíða.
Reiknaðu gildi x og y .



23. Hve stórt er hornið z ?



2. KAFLI, ÞRÍHYRNINGAR

2.1 Þríhyrningar

Þríhyrningur er einfaldastur marghyrningur. Það má segja að hann verði til þar sem dregin eru strík milli þriggja punkta, sem ekki eru allir á sömu beinu línunni.

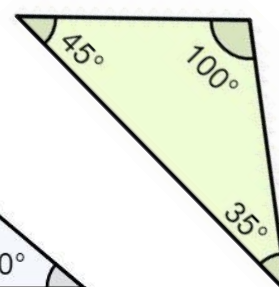
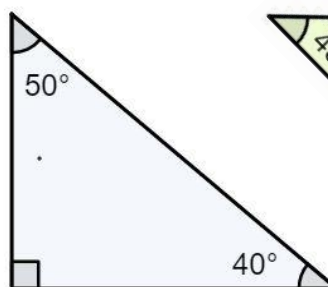
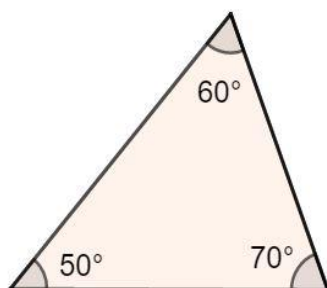


Mismunandi þríhyrningar:

Þríhyrningar eru flokkaðir einkum á tvo vegu:

I. Eftir hornastærðum:

- a) Hvasshyrndur þríhyrningur: með öll horn hvöss.
- b) Rétthyrndur þríhyrningur: með eitt horn rétt, hin hvöss.
- c) Gleðhyrndur þríhyrningur: með eitt gleitt horn, hin hvöss.





Video 15 Jafnarma & jafnhliða þríhyrningar

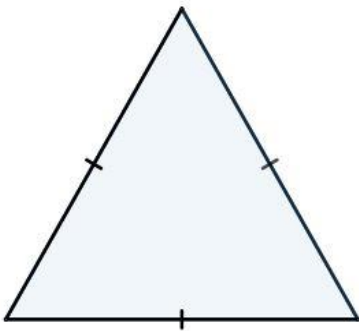
II. Eftir hliðarlengd:

a) Jafnhliða þríhyrningur hefur allar hliðar jafn langar og öll horn jafn stór, öll 60° .

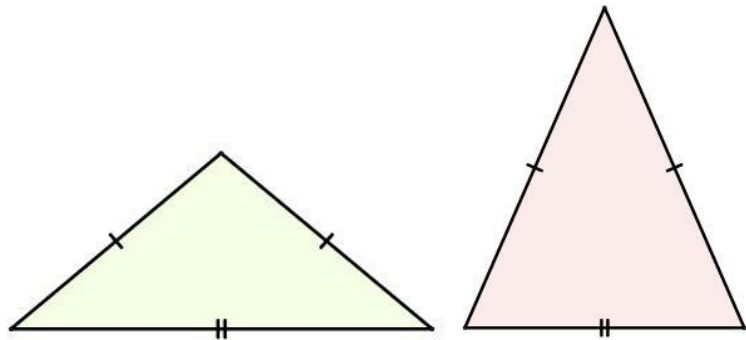
b) Jafnarma þríhyrningur hefur tvær hliðar jafn langar. Þriðja hliðin er nefnd grunnlína til aðgreiningar frá hinum tveim.

Hornin tvö við grunnlínuna eru jafn stór. Þriðja hornið er nefnt *topphorn*. Það er ýmist gleiðara eða hvassara en hin hornin tvö.

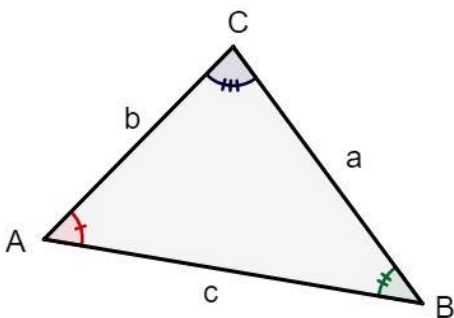
Líttu á myndirnar hér fyrir neðan og sjáðu hvernig jafn langar hliðar eru merktar á sama hátt. Hið sama er gert við horn ef menn vilda merkja þau.



Jafnhliða þríhyrningar eru allir eins í laginu. Öll horn 60° og allar hliðar jafn langar.



Jafnarma þríhyrningar eru mismunandi í laginu en tvær hliðar þeirra eru jafn langar og tvö horn þeirra jafn stór.



Hornpunktur þríhyrninga eru merktir með hástöfum en hliðar með lágstöfum. Þríhyrningar eru nefndir eftir hornpunktum sínum svo þríhyrningurinn hér til hliðar heitir „þríhyrningurinn ABC“.

Hlið ber alltaf sama bókstaf og mótlægt horn. Skoðið myndina hér til hliðar.



Video 16 Hæð

2.2 Línur í þríhyrningum

Hæð í þríhyrningi er lína sem dregin er úr horni, hornrétt á mótlæga hlið.

Taktu eftir:

Hæðir liggja gegnum horn, hornrétt (90°) á mótlæga hlið.

Þannig á hver hlið sér sína hæð, sem merkt er með „ h_x “ þar sem x merkir bókstafsheiti hliðarinnar.

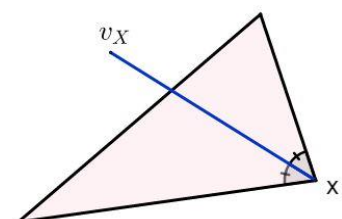
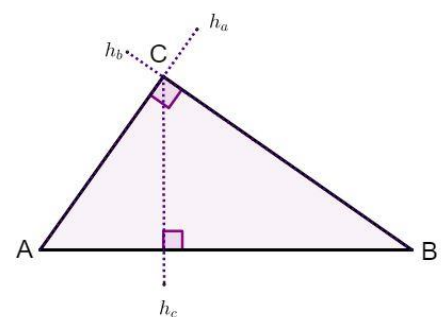
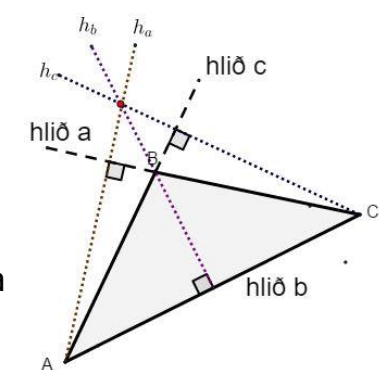
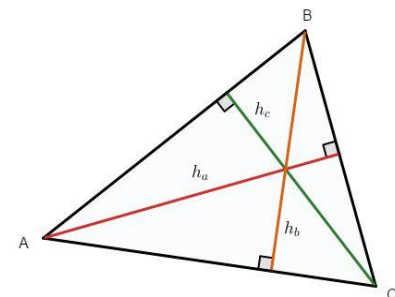
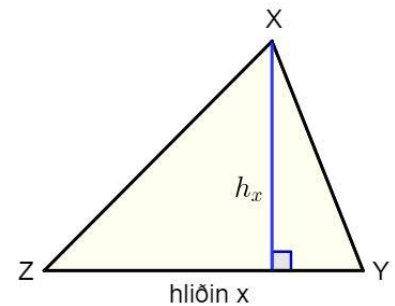
Hæðir skerast allar í einum punkti, innan eða utan þríhyrningsins.

Í hvasshyrndum þríhyrningi lenda allar hæðir innan þríhyrningsins og skerast þar í einum punkti.

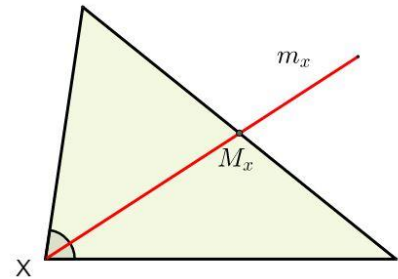
Í gleiðhyrndum þríhyrningi skerast hæðir í einum punkti utan við þríhyrninginn. Einungis þannig geta hæðirnar legið hornrétt hver á sína hlið, reyndar á framlengingar tveggja hliðanna.

Í rétthyrndum þríhyrningi liggja hæðir á skammhliðarnar úr hvössu horni ofan í aðlæga hlið hornsins en hæðin á langhliðina er á sínum stað, úr rétta horninu hornrétt á langhliðina. Hæðirnar skerast allar í rétta horninu.

Helmingalína er lína, sem fer í gegnum oddpunkt horns og skiptir því til helminga, í tvö jafn stór horn. Hún er táknuð með v_X (lítið v en stórt X) þar sem X er heiti hornsins.



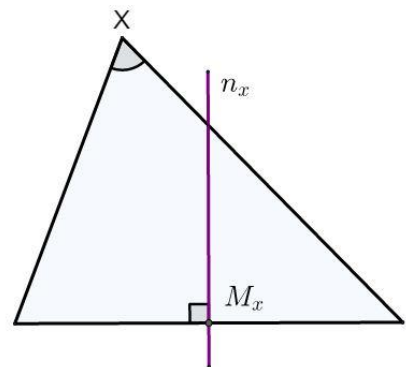
Miðlína liggur úr horni og sker mótlæga hlið í miðpunkti hennar (M_x). Miðlína er táknuð með m_x . Miðlínur skerast í einum punkti.



Miðþverill Orðið „þverill“ merkir línu sem sker aðra línu þannig að þær liggja hornrétt hvor á hina.

Miðþverill er þá lína sem gengur í gegn um miðpunkt hliðar í þríhyrningi og er hornréttur á það.

Miðþverill er táknaður með n_x .



Hver þríhyrningur á sér auðvita linur af öllum þessum þrem gerður. Það á við um þær allar að þær skerast í einum punkti. Þú ættir að prófa að teikna þær og sjá hvar punktarnir liggja.



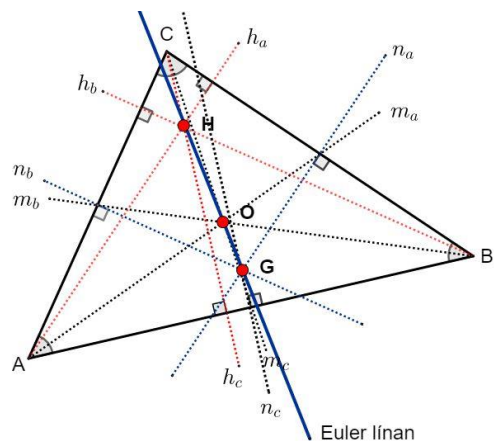
Video 17 Helmingunarlína, miðlína & miðþverill

Til gamans: Euler línan

Leonhard Euler (1707 – 1783) var Svisslendingur sem lengst af bjó í Pétursborg í Rússlandi. Hann var einhver afkastamesti og snjallasti hugsuður 18. aldar; stærðfræðingur, verkfræðingur, rökfræðingur, eðlisfræðingur og stjörnufræðingur svo eitthvað sé nefnt.

Eitt af því sem hann benti á er lína kennd við hann, „Euler – línan“ í þríhyrningum. Það er lína sem gengur í gegn um skurðpunkt hæðanna (H), skurðpunkt miðlínanna (O) og skurðpunkt miðþverlanna (G).

Hvort þetta er eitthvað hagnýtt veit ég ekki en þetta er a.m.k. skemmtilegt.



VERKEFNI 2.A.

Í þessu verkefni er þér ætlað að teikna. Tilgangurinn er að þú öðlist skilning á eðli þríhyrninga og nokkrum helstu línum sem notaðar eru við útreikninga á þeim. Notaðu reglustiku og gráðuboga við teikningar. Mismunandi litir gera myndirnar skýrari og jafnvel fallegri. Vandaðu þig.!



1. Teiknaðu þríhyrninginn ABC þar sem $A = 50^\circ$, og $B = 75^\circ$.
 - a) Merktu horn og hliðar á viðeigandi hátt.
 - b) Hve stórt er C ? (mældu það). Hver er hornasumma þríhyrningsins sem þú teiknaðir?
2. Teiknaðu jafnhliða þríhyrninginn QRS með hliðarlengd 5 cm. Merktu inn horn og hliðar.
(ath. að öll horn eiga að vera jafn stór. Hversu stór ?)
3. Teiknaðu jafnarma þríhyrninginn SKO með topphornið 100° . Mældu hornin við grunnlínuna og kannaðu hver summa allra hornanna er (hornasumma þríhyrnings).
4. Teiknaðu rétthyrndan þríhyrning með annað hvassa hornið 30° . Hve stórt er hitt hvassa hornið?
5. Teiknaðu þríhyrninginn ABC með grunnlínuna $AC = 6$ cm. Hornið $A = 50^\circ$ og hornið $C = 70^\circ$.
 - a) Mældu hornið B og reiknaðu hornasummu þríhyrningsins.
 - b) Dragðu hæð á hliðina b (h_b) og helmingalínu hornsins A (v_A)

6. Teiknaðu rétthyrndan þríhyrning með skammhliðar 4 cm og 6 cm. Dragðu miðþverla allra hliðanna og sjáðu hvar þeir skerast.
7. Teiknaðu rétthyrndan þríhyrning með annað hvassa hornið $A = 60^\circ$. Hafðu aðra skammhliðina 6 cm.
- a) Teiknaðu inn helmingalínur allra horna í þríhyrningnum.
 - b) Hornasumma þríhyrnings er 180° og bein lína er einnig 180° . Nýttu þér það og reyndu að finna gráðutölu allra horna í myndinni þinni.



Video 18 Hornasumma þríhyrnings

2.3 Hornasumma þríhyrnings

Sönnun, sem þarf að kunna.

Hornasumma þríhyrnings er 180° . Um það verður ekki deilt enda setti Evklíð það fram sem staðreynd.

Við sýnum fram á þetta með teikningu.

Teiknum þríhyrninginn ABC.

Drögum línuna m gegnum eitt horn þríhyrningsins (t.d. B) samsíða mótlægri hlið þríhyrningsins (AC).

Framlengjum þá hinar hliðarnar tvær (a og c) út yfir línuna (m). Þá verða til þrjú ný horn, z og x eru einslæg við A og C við samsíða línur og B og y eru topphorn. Saman mynda x, y og z beina línu sem auðvitað er 180° .

Hornin A og z eru einslæg horn við samsíða línur og eru því jafn stór. Sama á við um hornin C og x og hornin B og y eru topphorn og því jafn stór.

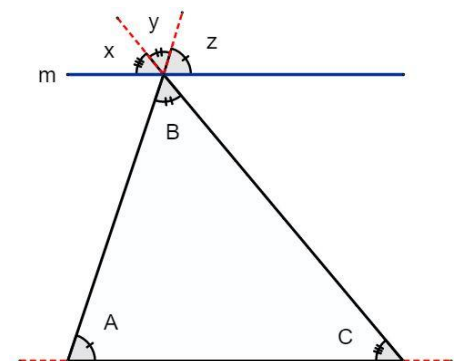
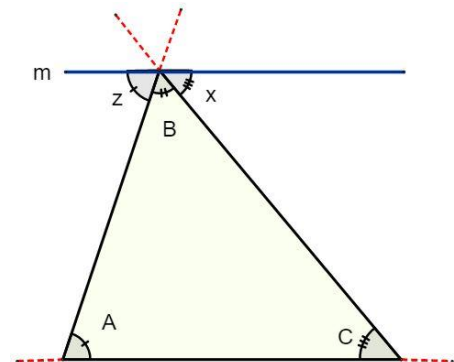
$$A = z, \quad B = y \quad \text{og} \quad C = x.$$

$$\text{þar sem } z + y + x = 180^\circ$$

$$\text{er ljóst að } A + B + C = 180^\circ$$

Sumum þykir e.t.v. betra að sanna þessa staðreynd með því að skoða hornin

neðan við línuna m. En niðurstaðan er sú hin sama. Hvort finnst þér betra ?





Video 19 Hornasumma marghyrninga

2.4 Hornasumma marghyrninga

Til er einföld leið til að finna hornasummu tiltekins marghyrnings.

Við skiptum marghyrningnum einfaldlega niður í þríhyrninga með því að draga hornalínur úr einu horni yfir í hvert og eitt hinna hornanna (Sjá mynd neðar á síðunni).

Teljum svo þríhyrningana og margföldum fjöldann með 180° því hornasumma þríhyrninga er 180° .

Í ljós kemur að fjöldi þríhyrninga er alltaf tveim færri en fjöldi hornanna svo við getum sett fram reiknireglu:

Regla, sem þarf að kunna.

$(n - 2) \cdot 180^\circ = \text{hornasumma } n\text{-hyrnings þar sem „}n\text{“ merkir fjöldi horna marghyrningsins.}$

Þannig er hornasumma 6 hyrninga:

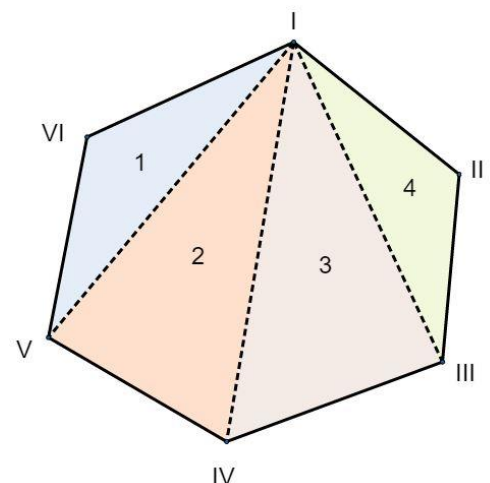
$$(6 - 2) \cdot 180^\circ = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$$

Hvert horn í reglulegum 6-hyrningi væri þá:

$$720^\circ / 6 = 120^\circ. \text{ En 6-hyrningurinn á myndinni er auðvitað ekki reglulegur.}$$

Spurning: „Hver er þá, skv. þessu,

hornasumma reglulegs 12-hyrnings og hve stórt er hvert horn hans?



Dæmi fyrir þig

Pentagon í Washington hýsir varnarmálaráðuneyti Banda-ríkjanna Húsið er reglulegur fimmhyrningur Hve stórt er hvert horn í byggingunni?



Video 20 Utanvert horn

2.5 Utanvert horn þríhyrnings

Sönnun, sem þarf að kunna.

Ef hlið í þríhyrningi er framlengd út fyrir eitthvert horna hans myndast utanvert horn þríhyrningsins. Það er um leið grannhorn við það horn þríhyrningsins sem það liggur að.

Regla, sem varðar þetta horn er þessi:

Utanvert horn þríhyrnings (u) er jafnt summu tveggja gagnstæðra horna í þríhyrningnum (hornin $y+z$ á myndinni).

Sönnun:

Ljóst er að:

$$u + x = 180^\circ \text{ (bein lína)}$$

Jafnframt er ljóst að:

$$x + y + z = 180^\circ \text{ (hornas. þríh.)}$$

Ef við umritum báðar þessar jöfnur fyrir x fáum við:

$$u + x = 180^\circ$$

sem verður

$$u = 180^\circ - x$$

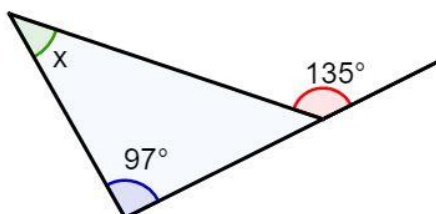
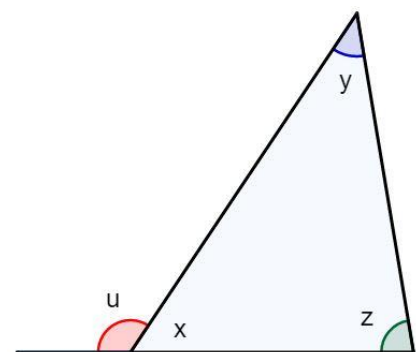
$$x + y + z = 180^\circ$$

sem verður

$$y + z = 180^\circ - x$$

Fyrst bæði „ $u = 180^\circ - x$ “ og „ $y + z = 180^\circ - x$ “ þá er augljóst að $u = y + z$. Því eins og Evklið sagði:

„Stærðir sem eru jafnar sömu stærðinni eru jafnar hver annarri“.



Sýnidæmi:

Hve stórt er hornið x ?

Lausn:

$$97^\circ + x = 135^\circ$$

$$x = 135^\circ - 97^\circ$$

$$x = 38^\circ$$



Video 21 Einslaga marghyrningar

2.6 Einslaga marghyrningar

Ljósmyndirnar hér að neðan eru eins að öllu leyti nema því að þær eru mis stórar. Stærsta myndin er 8 cm á hæð, sú í miðjunni er 6 cm há og sú minnsta er 4 cm há, helmingur af þeirri stærstu.



Breiddir myndanna er í réttu hlutalli við hæðirnar. Það er því ljóst að hlutföll í öllum myndunum eru þau sömu, allt er tvöfalt stærra í stærstu myndinni en á þeirri minnstu. Og allt á myndinni í miðjunni er í sömu hlutföllum og hinar tvær.

Við vitum „að allt á myndunum sé eins í laginu en misstórt“. Þær eru ekki eins en við segjum þær vera „einslaga“.

Tveir marghyrningar eru einslaga ef samsvarandi horn þeirra eru jafn stór. Þá er hlutföll milli hliðanna þau sömu hvort sem er milli tveggja hliða í sama þríhyrningi eða „sömu“ hliða annara þríhyrninga.

Þessi hlutföll má nota til að finna hliðarlengdir í einum marghyrningi ef við þekkjum samsvarandi hliðar í öðrum sem er einslaga.





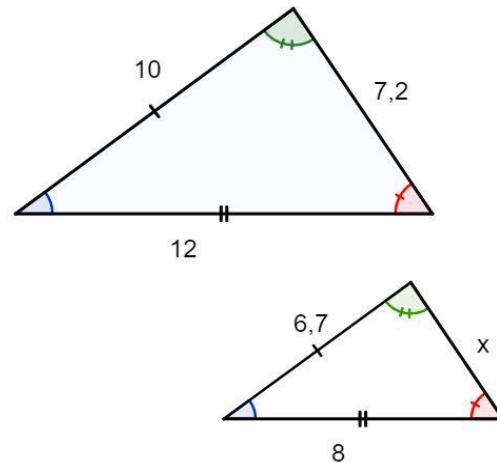
Video 22 Einsl. Þríh.
- Sýnidæmi

Sýnidæmi:

Þríhyrningarnir á myndinni eru einshyrndir og því einslaga.
Reiknaðu lengd hliðarinnar x .

Lausn:

Hliðin x í minni þríhyrningnum samsvarar hliðinni sem er 7,2 í stærri þríhyrningnum og hliðin 8 í litla samsvarar hliðinni sem er 12 í þeim stóra.



Við getum nálgast þetta verkefni á tvo vegu:

1. Notum einfalda hlutfalla-jöfnu til að bera saman samsvarandi hliðar þríhyrninganna. Þeir eru hlutfallslega eins í laginu.

Við stillum jöfnunni upp þannig að öðru megin er óþekkt hliðin á móti samsvarandi hlið í hinum. Hinu megin stillum við upp öðrum tveim sambærilegum hliðum á sama hátt og í sömu röð:

$$\begin{aligned}\frac{x}{7,2} &= \frac{8}{12} \\ x &= \frac{7,2 \cdot 8}{12} \\ x &= \frac{57,6}{12} = 4,82.\end{aligned}$$

Við hefðum einnig getað sett jöfnuna upp þannig að við nýtum hlutfallið milli hliða hvors þríhyrnings fyrir sig. Það hlutfall er nefnilega það sama í báðum þríhyrningum því þeir eru einslaga.

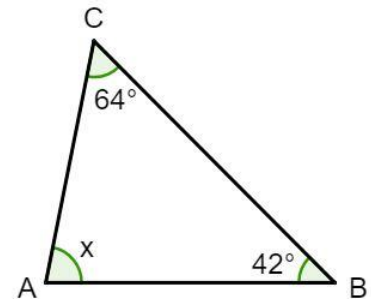
Þá stillum við jöfnunni upp þannig að öðrum megin hennar komi x á móti annarri hlið í sama þríhyrningi en hinum megin komi hliðstæðar hliðar í sömu röð.

$$\begin{aligned}\frac{x}{8} &= \frac{7,2}{12} \\ x &= \frac{8 \cdot 7,2}{12} \\ x &= \frac{57,6}{12} = 4,8\end{aligned}$$

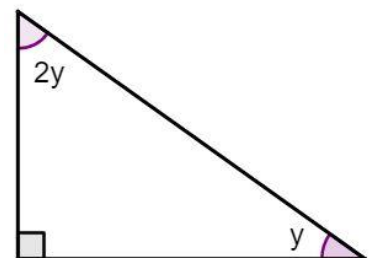
Niðurstaðan er sú sama.!

VERKEFNI 2.B.

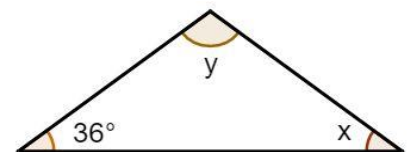
1. Hve stórt er hornið x ?



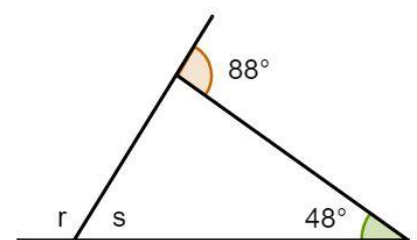
2. Hve stór eru hvössu hornin í þessum rétthyrnda þríhyrningi?



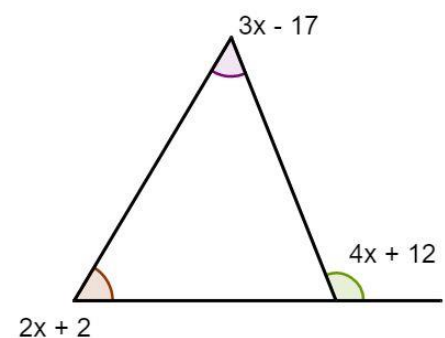
3. Þessi þríhyrningur er jafnarma. Hve stór eru hornin x og y ?



4. Hve stór eru hornið r og s ?

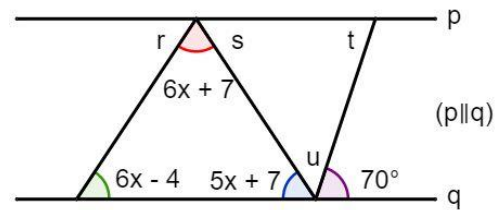


5. Reiknaðu gráðutölu x .

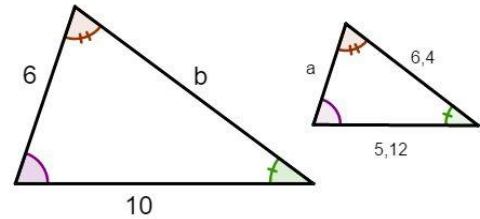


6. Línurnar p og q eru samsíða.

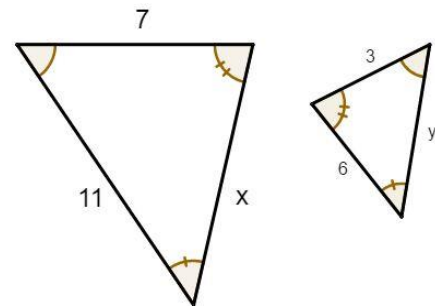
Reiknaðu gráðutölu hornanna:
r, s, t og u.



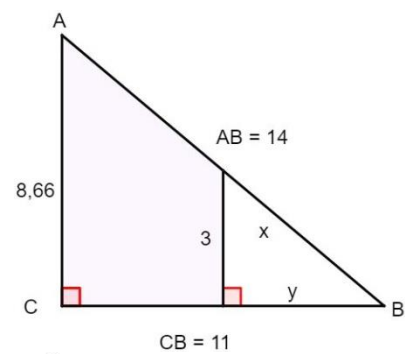
7. Þríhyrningarnir eru einslaga.
Finndu lengdir hliðanna a og b.



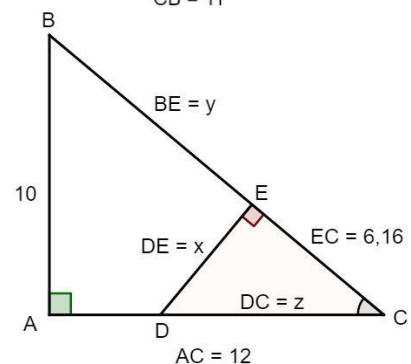
8. Þríhyrningarnir eru einslaga.
Reiknaðu lengdir hliðanna x og y.



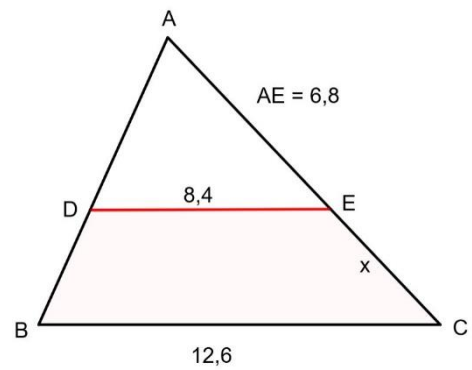
9. Finndu lengdirnar x og y.



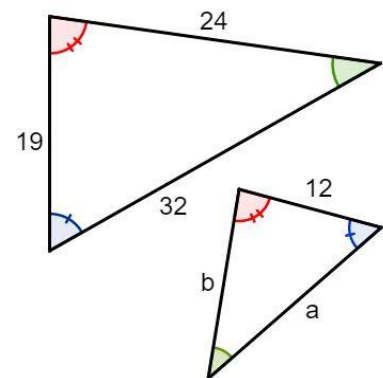
10. Finndu lengdirnar x, y og z.



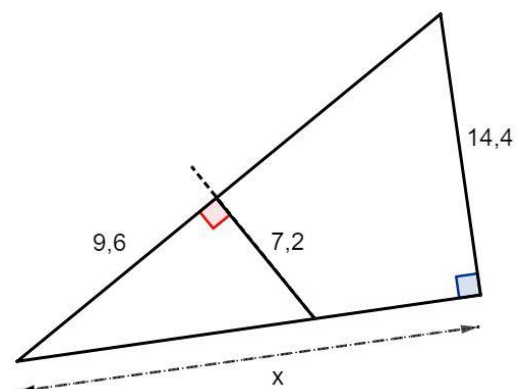
11. Í þessum þríhyrningi er BC og DE samsíða.
Reiknað lengd CE.



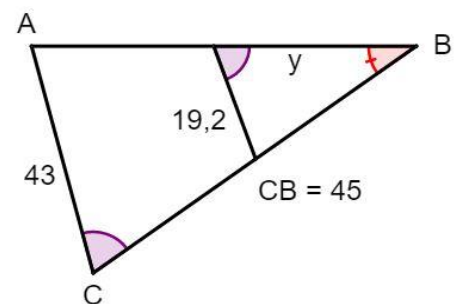
12. Þríhyrningarnir eru einslaga.
Reiknaðu lengdir hliðanna a og b.



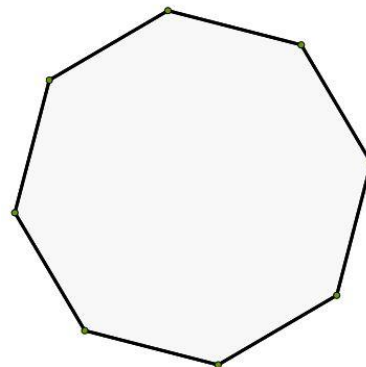
13. Finndu lengdina á x.



14. Finndu lengdina á y.



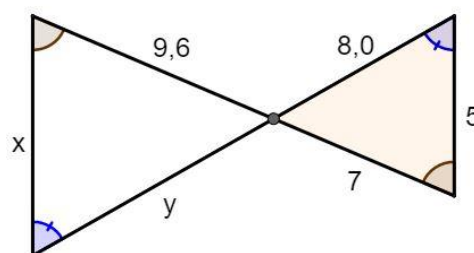
15. Hver er hornasumma 8-hyrnings og hve stórt er hvert horn í reglulegum átthyrningi?



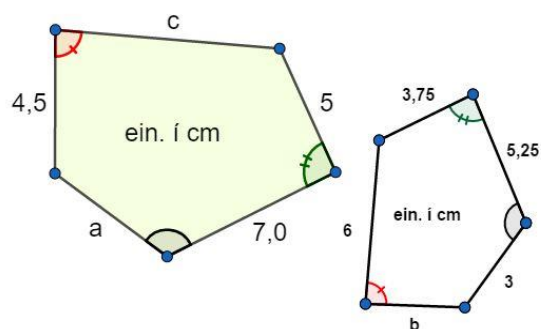
16. Marghyrningur nokkur hefur hornasummuna 1980° . Hvaða marghyrningur er þetta og hve stórt er hvert horn hans ef hann er reglulegur? (*engin mynd*)

17. Í hvaða reglulegum marghyrningi eru öll hornin $147,27^\circ$ að stærð? (*engin mynd*)

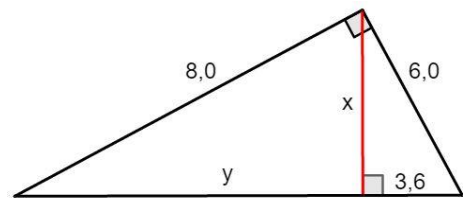
18. Eins og sést á teikningunni eru þríhyrningarnir einshyrndir og því einslaga. Reiknaðu lengdir x og y .



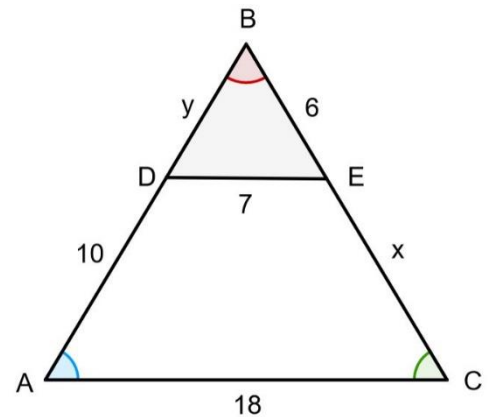
19. Þessir marghyrningar eru einslaga. Reiknaðu lengdir a , b og c .



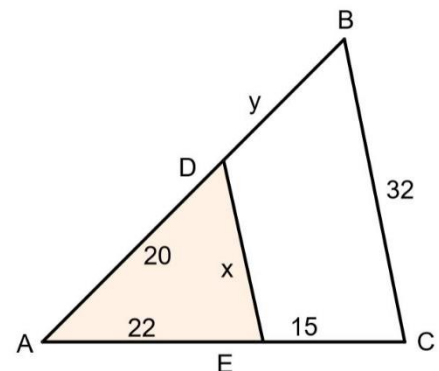
20. Hæð í rétthyrndum þríhyrningi skiptir honum í tvo einshyrnda og þá einslaga þríhyrninga. Finndu lengdir x og y .



21. Í þríhyrningnum hér að neðan er AC samsíða DE. $x = EC$ og $y = DB$. Reiknaðu x og y .

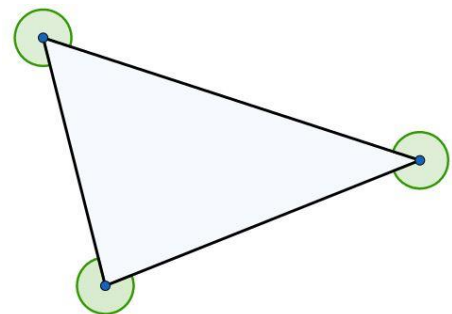


22. Í þríhyrningnum er BC samsíða DE. $AD = 25$, $EC = 22$ og $BC = 35$. Reiknaðu x og y .



23. Það er viðeigandi að ljúka kaflanum með „sirkus“ dæmi:

- Hver er hornasumma „glaðhorna“ þessa þríhyrnings?
- Segjum sem svo að svar þitt sé rétt. Mundi það þá gilda um alla þríhyrninga, hvassa, rétta og gleiða?
- Geturðu búið til formúlu sem mundi gilda um hornasummu „glaðhorna“ allra marghyrninga?



2.7 Regla Pýþagórasar

Reglu Pýþagórasar ættu allir að kunna:

Reglan segir einfaldlega að:

„summa skammhliða rétthyrnds þríhyrnings í öðru veldi er jöfn langhliðinni í 2. veldi“.

Stærðfræðilega er sagt:

Ef hornið $C = 90^\circ$ í þríhyrningnum ABC, þá gildir:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Video 23 Pýþagóras

Reglan er yfirleitt sett fram á þennan hátt, þ.e. með langhliðina merкта sem c . Það er þó ekki sjálfgefið.

Regluna er hægt að sanna á marga vegu. En við skulum láta nægja að skoða eina þægilega leið til þess.

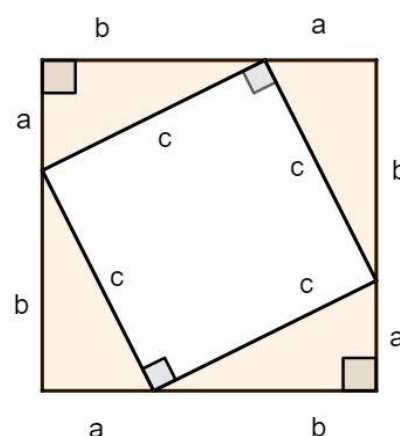
Sönnun:

Sönnun sem þarf að kunna.

Tökum fjóra rétthyrnda þríhyrninga, alla eins. Röðum þeim upp þannig að lengri skammhlið eins liggur í beinu framhaldi af styttri skammhlið annars. Þá liggja langhliðar allra inn í myndina og mynda þar ferning.

Við skulum nú reikna flatarmál myndarinnar á tvo vegu

og bera niðurstöður þess saman.



Video 24 Pýþagóras
- Sönnun

Flatarmál 1.

Almenn formúla fyrir flatarmál þríhyrnings er:

Flatarmál fjögurra þríhyrnunga (eins og eru á myndinni) er þá:

$$F = \frac{4(g \cdot h)}{2}$$

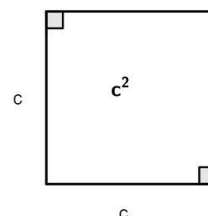
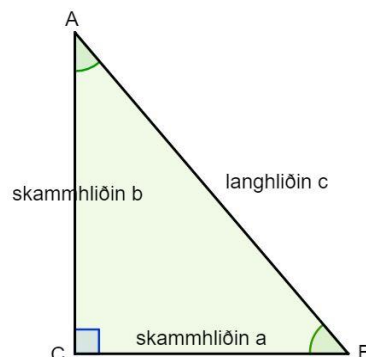
$$F = 2(a \cdot b)$$

$$F = 2ab$$

Flatarmál litla ferningsins innan við þríhyrningana er c^2 .

Leggjum saman og fáum þannig flatarmál allrar myndarinnar:

$$F = 2ab + c^2$$

Flatarmál 2.

Ef við lítum á myndina sem einn stóran fering með hliðar-lengdina $(a + b)$ getum við reiknað flatarmál myndarinnar í einni aðgerð.

Formúla fyrir flatarmál fernings er:

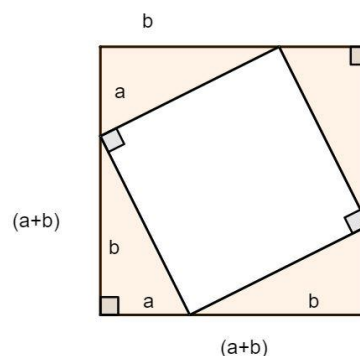
$$F = l \cdot b$$

Flatarmál allrar myndarinnar er

$$F = (a + b)^2$$

$$F = (a + b)^2$$

$$F = a^2 + 2ab + b^2$$



Nú höfum við reiknað flatarmál myndarinnar á tvo vegu.

Þær niðurstöður hljóta að vera jafngildar. Stillum þeim því upp hvorri á móti annarri:

Flatarmál 2 = Flatarmál 1 (því þetta er jú sama myndin).

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

Ef við drögum $2ab$ frá báðum hliðum jöfnunnar stendur eftir:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Þar með höfum við sýnt fram á og sannað að summa skammhliðanna í 2. veldi er jöfn langhliðinni í 2. veldi.

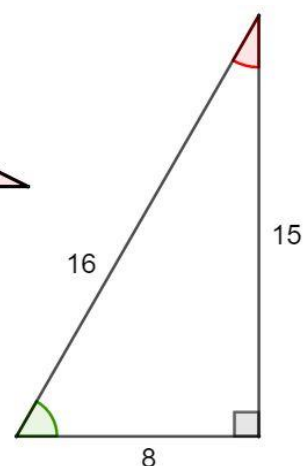
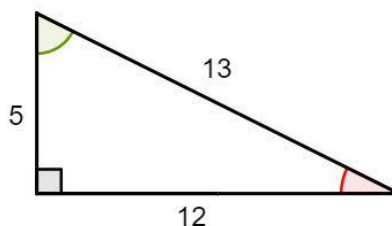
VERKEFNI 2.C.

Skrifaðu formúluna:

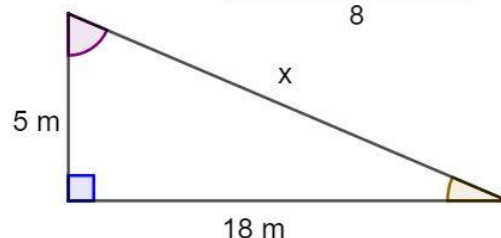
$a^2 + b^2 = c^2$ við hvert dæmi.

Þannig lærist hún fyrir lífstíð og þú ruglast síður hvaða hlið þú ert að finna; langhlið eða skammhlið.

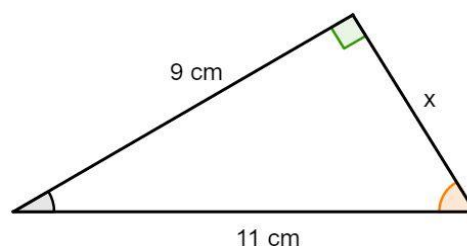
1. Notaðu reglu Pýþagórasar til að finna út hvor þessara þríhyrninga er rétthyrndur eða báðir.



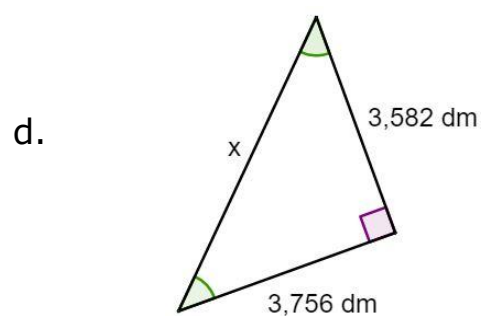
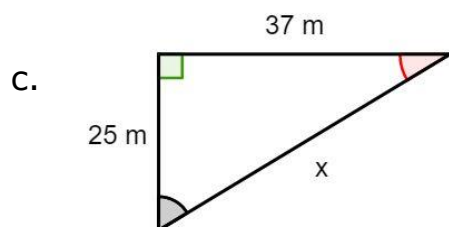
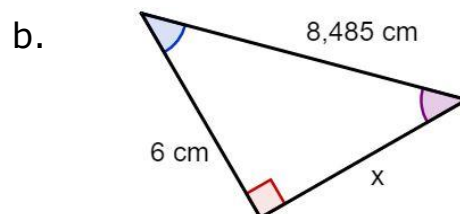
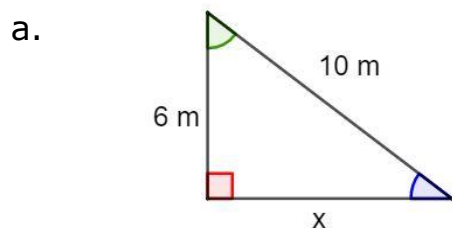
2. Hve löng þarf langhliðin að vera til að þríhyrningurinn sé rétthyrndur?



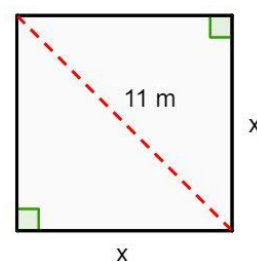
3. Hve löng þarf skemmri skammhliðin að vera til að þríhyrningurinn sé rétthyrndur.



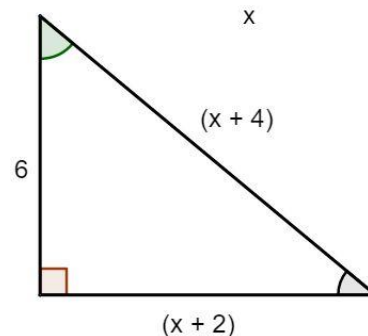
4. Þessir fjórir þríhyrningar eru allir rétthyrndir. Notaðu reglu Pýþagórasar til að reikna lengdir hliða sem merktar eru með x . Skrifðu upp formúluna við hvert dæmi svo þú ruglist síður.



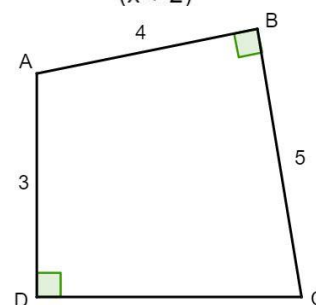
5. Reiknaðu hliðarlengd ferningsins.



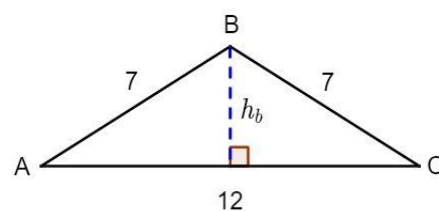
6. Finndu gildið á x .



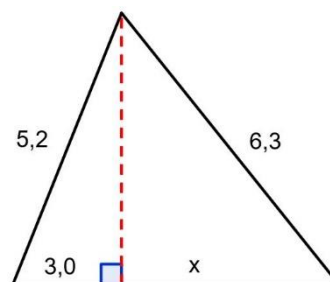
7. Finndu:
a) hornalínuna AC
b) hliðina CD



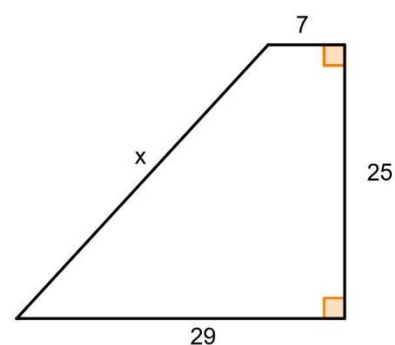
8. Reiknaðu lengd hæðarinnar h_b .



9. Reiknaðu út x .



10. Reiknaðu lengd hliðarinnar x .



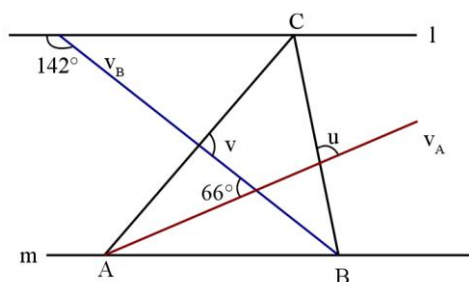
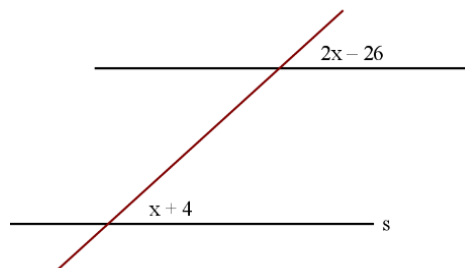
11. Hver er lengd hæðar í jafnhliða þríhyrningi ef hliðarlengd hans er 10 cm?
Teiknaðu mynd og reiknaðu.

12. Í rétthyrndum þríhyrningi er önnur skammhliðin 14 en langhliðin er 6 stærri en hin skammhliðin.
Teiknaðu mynd af honum og reiknaðu lengdir óþekkту hliðanna.

13. Hve löng er hæðin á langhliðina c í rétthyrndum þríhyrningi ef:
Skammhliðar eru: $a = 6\text{ cm}$ og $b = 8\text{ cm}$.
Teiknaðu mynd og reiknaðu.

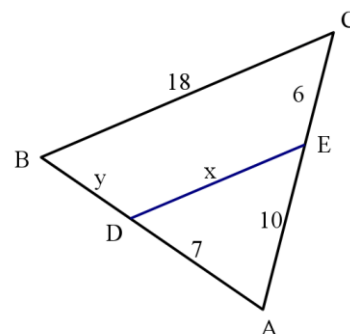
VERKEFNI 2.D.Ýmis dæmi úr 1. og 2. kafla.

1. Hvað þarf x að vera margar gráður til að línurnar r og s séu samsíða?



2. Línurnar l og m eru samsíða. Finndu stærðir hornanna A , B og C og hornanna u og v .

3. Í þríhyrningnum hér til hliðar er $BC \parallel DE$. Reiknaðu lengd strikanna x og y .



4. Hvað heita þessar línur í þríhyrningnum og hvernig eru þær táknaðar?

5. Þríhyrningurinn ABC er rétthyrndur með hornið $C = 90^\circ$.

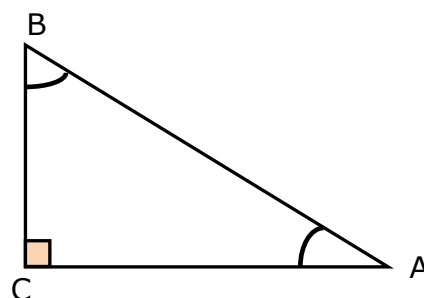
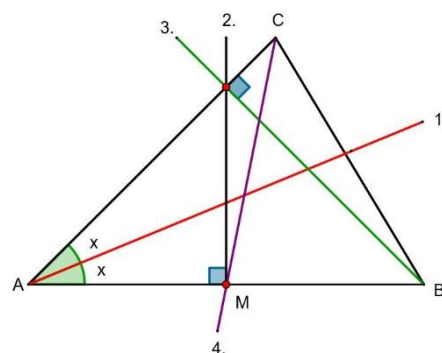
Hliðin $a = 12$ og $c = 18$.

Teiknaðu þríhyrninginn upp á blað, dragðu og merktu inn línurnar

m_a og n_a .

Reiknaðu síðan lengd:

- hliðarinnar b
- línunnar m_a
- línunnar n_a



3. KAFLI, SÉRSTAKIR ÞRÍHYRNINGAR



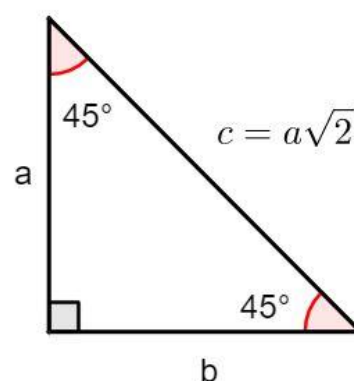
Við skulum skoða tvær gerðir af rétthyrndum þríhyrningum, sem lúta afar þægilegum reglum. Þetta eru jafnarma þríhyrningar með hornastærðirnar 45° - 45° - 90° og þríhyrningur með hornastærðirnar 30° - 60° - 90° .

Sérstakur 1.

Jafnarma, rétthyrndur þríhyrningur með hornin: 45° - 45° - 90° .

Regla:

„Lengd langhliðar er alltaf jöfn lengd skammhliðar margfaldaðri með kvaðratrótinni af tveim.“



Video 25 Sérstakir
þríhyrningar 1

Sönnun:

Sönnun sem þarf að kunna.

Þar sem þríhyrningurinn er jafnarma þá eru hornin við grunnlínuna (c) jafn stór (45°) og skammhliðar hans eru jafn langar.

Setjum þetta inn í reglu Pýþagorasar. Skammhliðarnar eru jafn langar, látum þær vera x að lengd:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

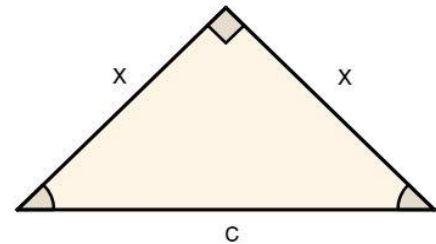
$$x^2 + x^2 = c^2$$

$$2x^2 = c^2$$

Drögum kvaðratrótina í báðum hliðum jöfnunnar:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{c^2}$$

$$\sqrt{2} \cdot x = c$$



Sem sagt: „Lengd langhliðar er alltaf jöfn lengd skammhliðar margfaldaðri með kvaðratrótinni af tveim.”

Ef við köllum skammhliðina „ a ” getum við ritað: $c = a\sqrt{2}$

Sýnidæmi.

Finndu lengd langhliðarinnar með bæði stærðfræðilegri nákvæmni og sem tugabrot með 5 aukastöfum ef $a = b = 5$.

Lausn.

Til að sjá lausnina með stærðfræðilegri nákvæmi nægir okkur að margfalda lengd skammhliðar með kvaðratrótinni af tveim.

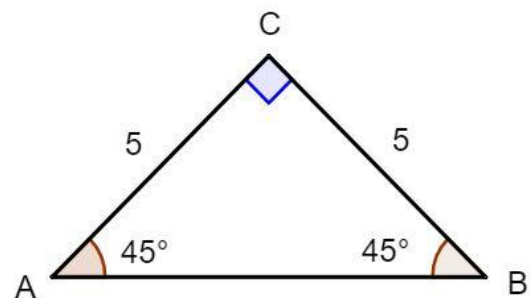
Svarið, með stærðfræðilegri nákvæmni er: $c = 5\sqrt{2}$

Í tugabrotum er svarið:

$$5 \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot 1,414213562 \dots$$

$$5 \cdot \sqrt{2} = 7,071067812 \dots \approx 7,07107$$

Tugabrotið er óræð tala, óendanlegt, sem ekki gefur stærðfræðilega nákvæmt svar.



Athugið kröfur um reiknínákvæmni.

Ef beðið er um stærðfræðilega nákvæmt svar er átt við fullstýtt svar, án tugabrots.

Þá skal halda kvaðratrótum, í svörum. Þannig er svarið stærðfræðilega nákvæmt en ekki námundað.



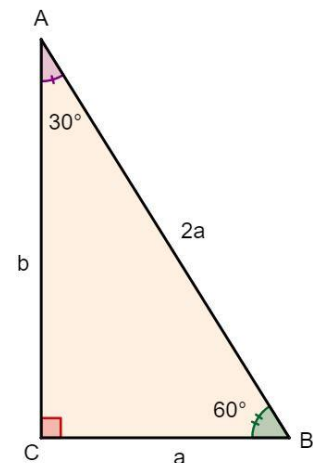
Video 26 Sérstakir þríhyrningar 2

Sérstakur 2.

Rétthyrndur þríhyrningur með hornastærðirnar:
 30° - 60° - 90° .

1. REGLA:

„Lengd langhliðar er tvöföld lengd skemmri skammhliðar.“



Sönnun:

Teiknum rétthyrndan þríhyrning ABC þar sem:

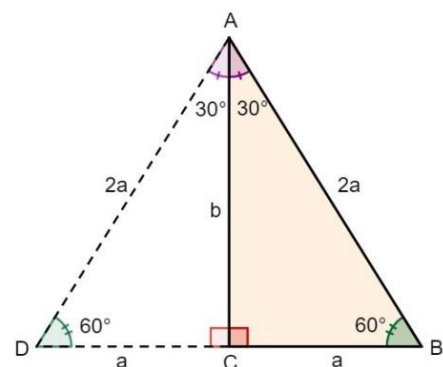
$A = 30^\circ$, $B = 60^\circ$ og $C = 90^\circ$ (sjá þríhyrninginn hér að ofan).

Tökum af honum afrit (copy) og speglum (flippum) því um lengri skammhlið (hlið b).

Þá kemur fram þríhyrningur ABD.

Þessi þríhyrningur er jafnhliða með öll horn 60° og allar hliðar því jafn langar, þ.e. $2a$.

Hliðin AB er því $2a$, tvöfalt lengri en skemmri skammhliðin.



2. REGLA:

„Lengri skammhlið er lengd skemmri skammhliðar, margfölduð með kvaðratrótinni af þrem.“



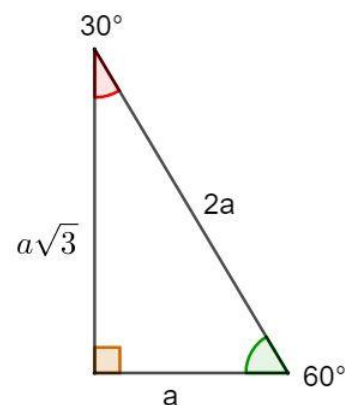
Video 27 Sérstakir þríhyrningar - Sönnun

Sönnun:

Notfærum okkur 1. reglu hér að framan sem sagði að langhliðin væri tvöföld styttri skammhliðin.

Setjum svo stuttu skammhliðina (a) langhliðina ($2a$) inn í reglu Pýþagórasar:

$a^2 + b^2 = c^2$	Regla Pýþagórasar.
$a^2 + b^2 = (2a)^2$	Langhliðin c er $2a$ að lengd.
$b^2 = (2a)^2 - a^2$	Færum a^2 yfir sama sem merkið.
$b^2 = 4a^2 - a^2$	Leysum upp svigann.
$b^2 = 3a^2$	Drögum frá.
$b = \sqrt{3} \sqrt{a^2}$	Drögum kvaðratrót beggja vegna.
$b = \sqrt{3} a$	Sem við skrifum yfirleitt sem $a\sqrt{3}$

Athugið aftur kröfur um reikninákvæmni.

Ef beðið er um stærðfræðilega nákvæmt svar er átt við fullstýtt svar, án tugabrots.

Þá skal halda kvaðratrótum, í svörum. Þannig er svarið stærðfræðilega nákvæmt en ekki námundað. Sama gildir um pí þegar það á við s.s. í hringjum.



Video 28 Sérstakir
þríhyrningar - Sýnidæmi

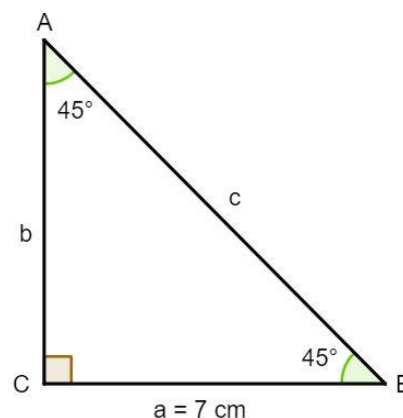
VERKEFNI 3.A.

Allir þríhyrningarnir í þessu verkefni eru „sérstakir“, ýmist af gerðinni 30° - 60° - 90° eða 45° - 45° - 90° .

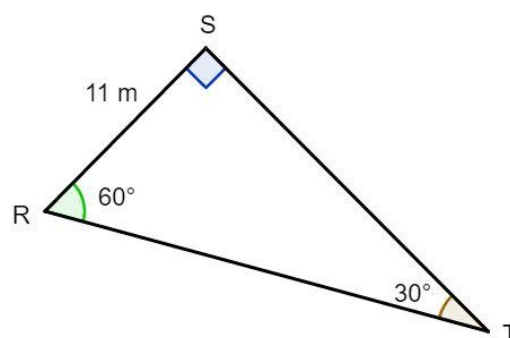
Leysið verkefnin með því að finna lengdir umbeðinna hliða.

Svarið með bæði stærðfræðilegri nákvæmni og tugabroti, námunduðu að fjórum aukastöfum.

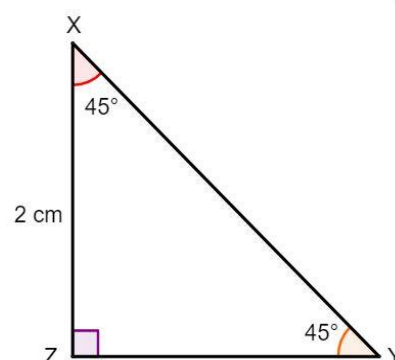
1. Hliðin $a = 7$ cm.
Reiknaðu hliðarnar b og c með stærðfræðilegri nákvæmni.



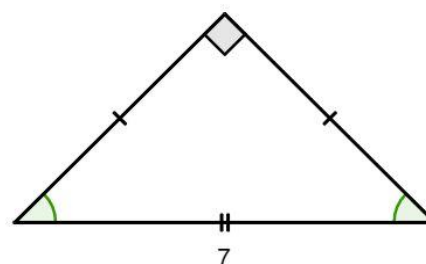
2. Reiknaðu hliðarnar s og r .



3. Reiknaðu hliðarlengdirnar x og z .

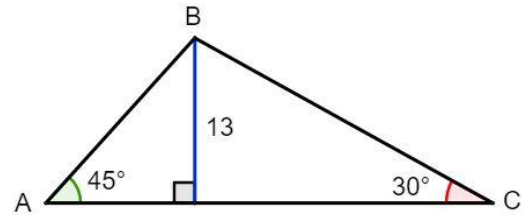


4. Hver er lengd skammhliðanna ef langhliðin er 7?



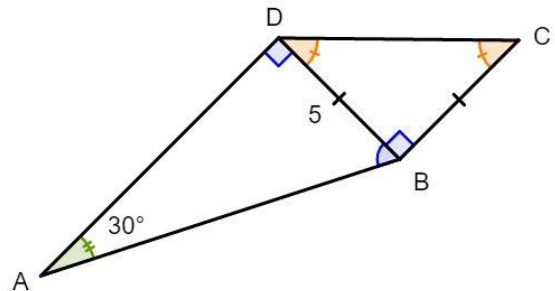
5. Í þríhyrningnum ABC er $h_b = 13$ cm. Reiknaðu:

- hliðina AB
- hliðina BC
- hliðina AC
- hornið B (allt hornið)



6. Hér er $BD = 5$. Reiknaðu:

- hliðina AD
- hliðina AB
- hliðina BC
- hornið B (allt)

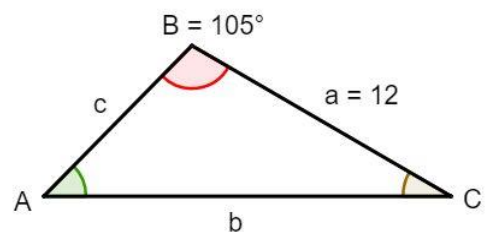


7. Í þríhyrningnum ABC er $A = 45^\circ$, $B = 105^\circ$ og $a = 12$.

Rissaðu hann upp og dragðu inn línurnar h_b og n_a .

Finndu eftirfarandi með stærðfræðilegri nákvæmni:

- hæðina á b (h_b)
- hliðina b
- miðþveril á a (n_a)

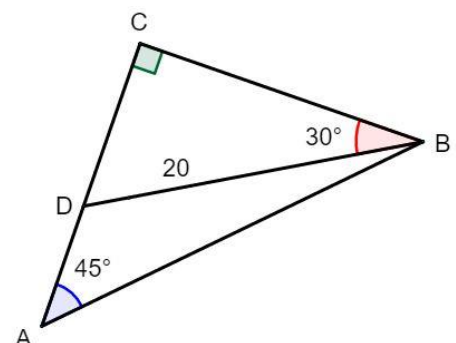


8. Í þríhyrningnum ABC er $A = 45^\circ$. Í þríh. BCD er $B = 30^\circ$

Lengdin BD er 20.

Finndu, með stærðfræðilegri nákvæmni:

- hliðina a
- hliðina c
- lengdina AD.

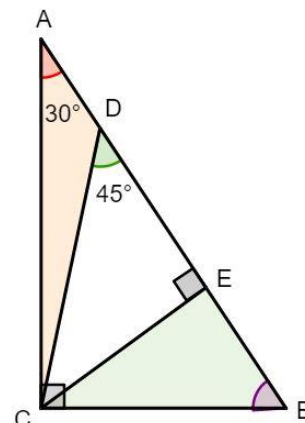


9. Í þríhyrningnum ABC er hornið A 30° og hliðin $BC = 20$.

Í þríh. DEC er hornið D $= 45^\circ$.

Finndu:

- hliðina AB
- lengdin BE
- lengdin CE
- hliðina AC



10. Teiknaðu þríhyrninginn ABC þar sem hornin við grunnlínuna eru þessi: $A = 30^\circ$ og $B = 45^\circ$.

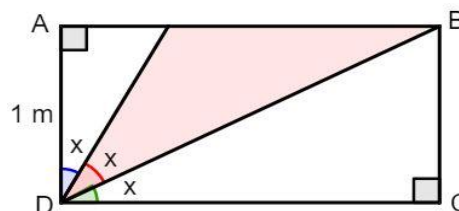
Dragðu hæðina á hliðina c og gefðu henni lengdina $h_c = 7$ cm.

Finndu eftirfarandi lengdir með stærðfræðilegri nákvæmni.

- Lengd BC
- Lengd AC
- Lengd BC

11. ABCD er rétthyrningur. Horninu D er skipt í þrjú jafn stór horn (x). Hliðarlengdin AD er 1 m að lengd.

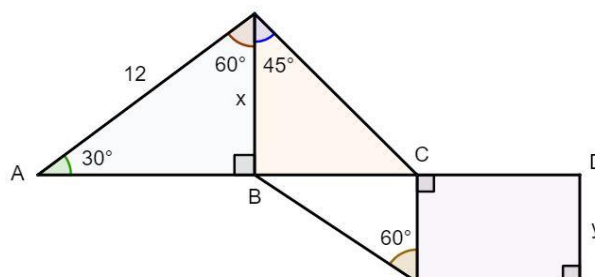
Rissaðu upp myndina í bókina þína og settu inn stærðir allra horna og lengdir allra lína með stærðfræðilegri nákvæmni.



12. Myndin er samsett úr formum sem þú þekkir vel.

Reiknaðu út lengdir hliðanna x og y.

Svarið á að vera af stærðfræðilegri nákvæmni.



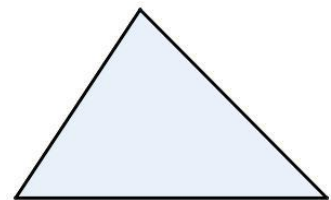
VERKEFNI 3.B.

Í þessum dæmakafla eru ýmis verkefni varðandi þríhyrninga. Þitt er að leysa þau með þeim aðferðum sem þér þykir henta. Til dæmis eru hér verkefni sem fjalla um hornasummu þríhyrninga, utanvert horn, einslögun, Pýþagóras og sérstaka þríhyrninga. Sum dæmanna má leysa á ólíka vegu sem gerir verkefnið skemmtilegra.

Ábending! Byrjaðu á því að greina verkefnið;

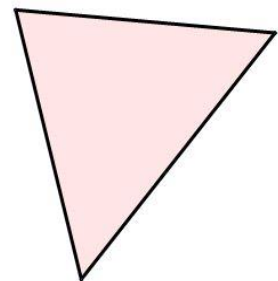
- um hvað er spurt,
- hvaða reglur gilda um vandamálið,
- hvert er sambengið innan þátta verkefnisins?

1. Teiknaðu hvasshyrndan þríhyrning, ABC.
(Notaðu reglustiku) Dragðu síðan hæðir (h_x) á allar hliðar hans.

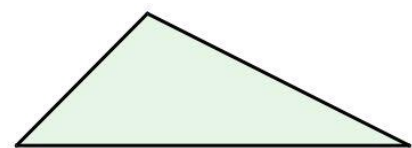


Lausnin er rétt ef allar hæðirnar skerast í einum punkti.

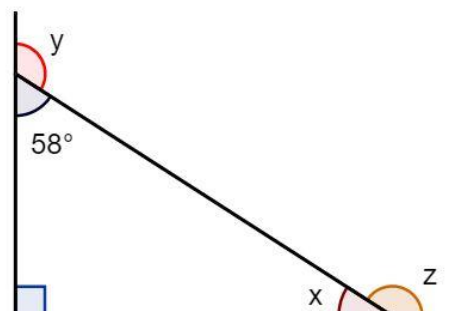
2. Teiknaðu hvasshyrndan þríhyrning, DEF.
Mældu miðju tveggja hliða hans og dragðu svo miðlínur (m_x) á þær hliðar.
Ef þetta er rétt gert er auðvelt að draga þriðju miðlínuna því miðlínur skerast allar í sama punkti.



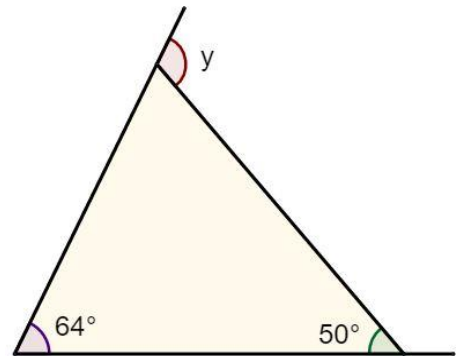
3. Teiknaðu gleiðan þríhyrning, RST.
Mældu út miðpunkta hliðanna og dragðu síðan miðþverla (n_x) á hliðarnar.
Taktu eftir hvar miðþverlarnir skerast.



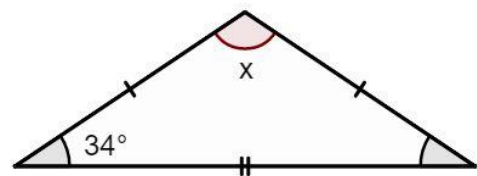
4. Reiknaðu gráðutölu x , y og z .



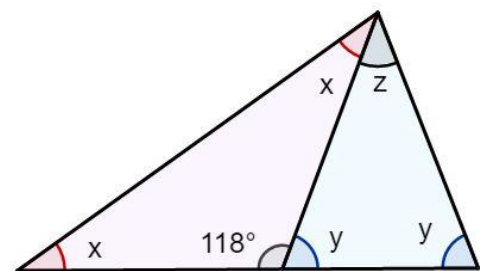
5. Hve stórt er hornið y ?



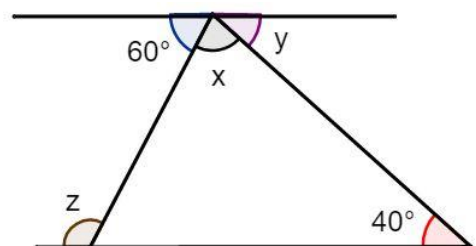
6. Þríhyrningurinn er jafnarma.
Hve stórt er hornið x ?



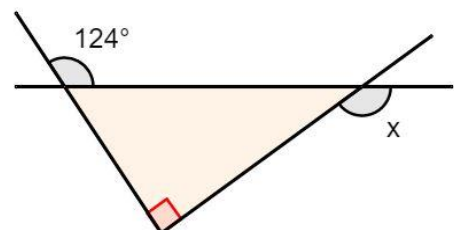
7. Samvöxnu þríhyrningarnir eru
báðir jafnarma.
Reiknaðu gráðutölu x , y , z .



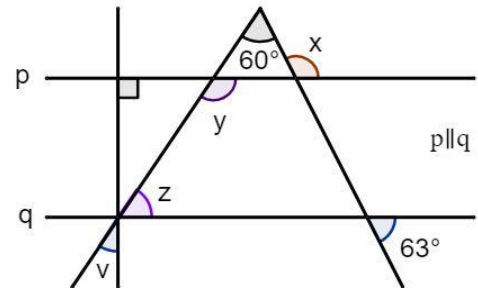
8. Finndu stærð hornanna x , y og z .



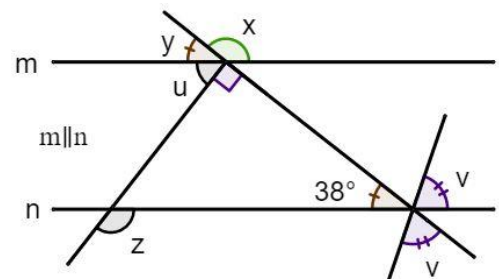
9. Reiknaðu stærð hornsins x .



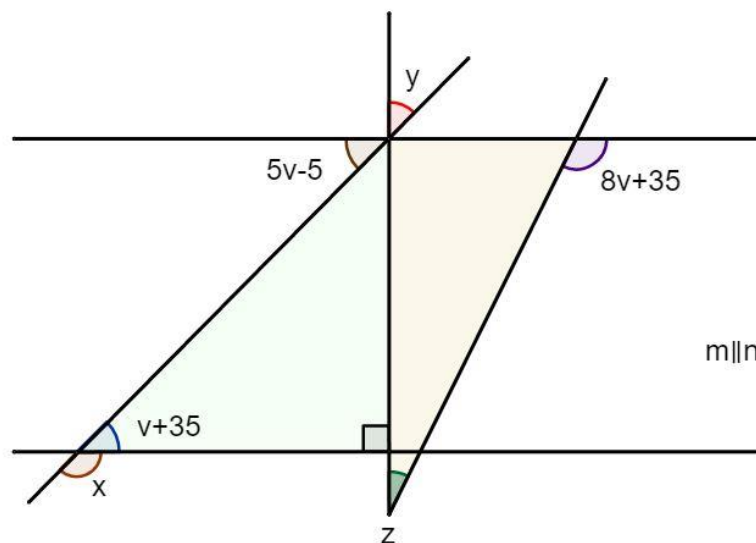
10. Finndu stærð hornanna, sem merkt eru með bókstöfum.



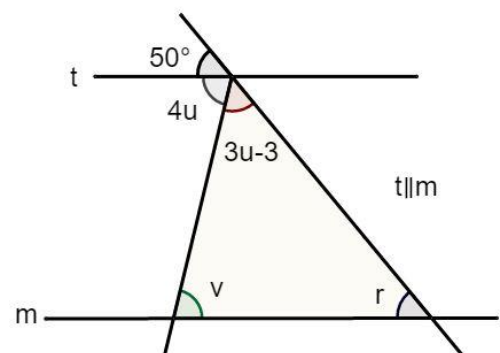
11. Reiknaðu stærð hornanna sem merkt eru með bókstöfum.



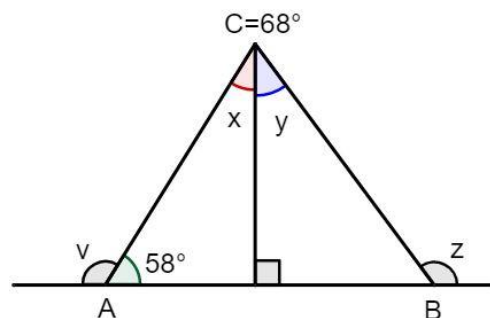
12. Finndu stærð hornanna, sem merkt eru með bókstöfum.



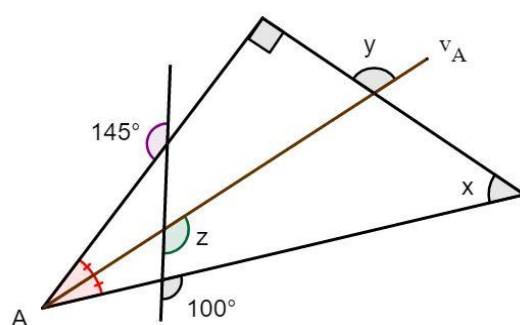
13. Finndu gráðutölu r, u og v.



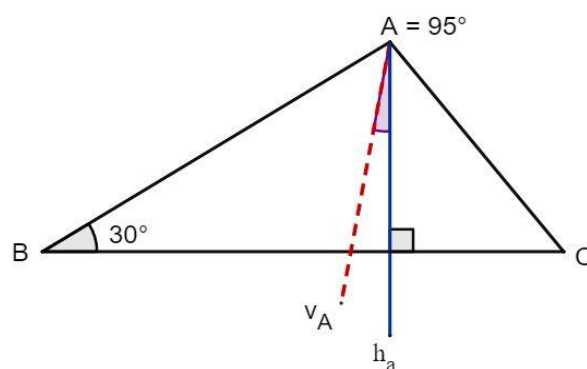
14. Reiknaðu hornin x , y , z og v .



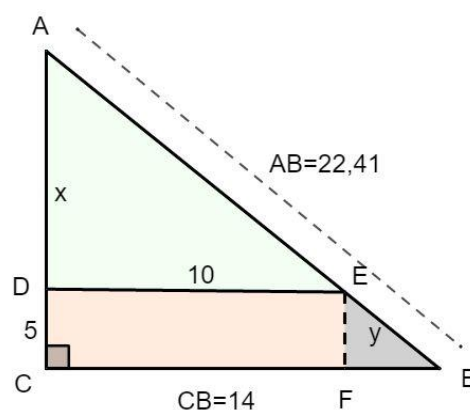
15. Finndu stærð x , y og z .
Ath. að v_A er helmingalína hornsins A.



16. Finndu stærð hornsins á milli helmingalínu hornsins A (v_A) og hæðar á hliðina a (h_a).



17. Mál á einslaga þríhyrningum ABC, AED og EBF er eins og myndin sýnir.
Reiknaðu lengdirnar x og y .
Þú mátt nota hverja þá aðferð sem þú vilt en ekki dugir að mæla.



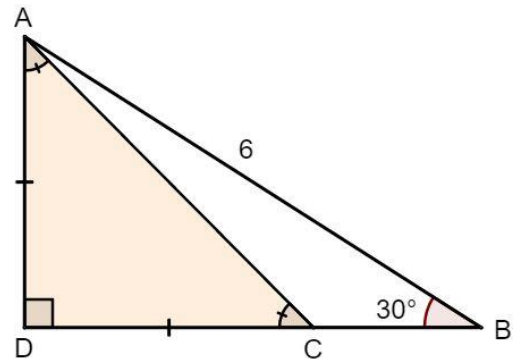
18. Í þríhyrningnum ABD er: $B = 30^\circ$, $D = 90^\circ$ og lengd $AB = 6$.

Þríhyrningurinn ACD er jafnarma.

Finndu lengd CD, AC og BC

með stærðfræðilegri

nákvæmni.



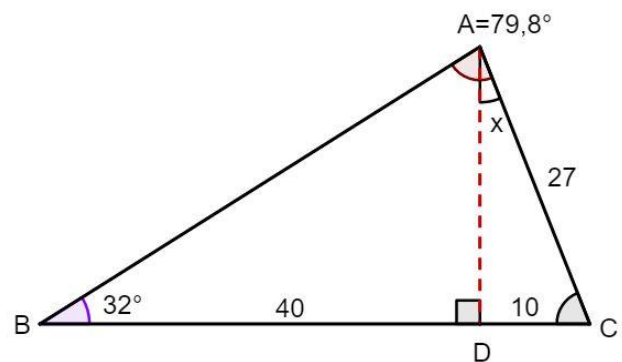
19. Þríhyrningurinn ABC er ekki rétthyrndur.

Lengdin $DC = 10$, hornið

$B = 32^\circ$ og hliðin $b = 27$.

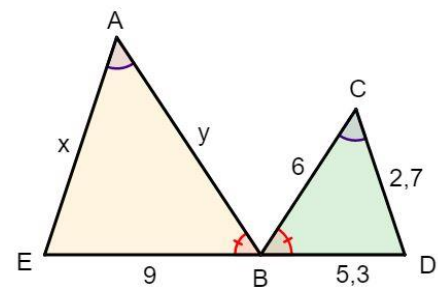
Reiknaðu hæðina á hliðina

a og hliðina c.



20. Þríhyrningarnir ABE og CDB eru einshyrndir.

Reiknaðu x og y.



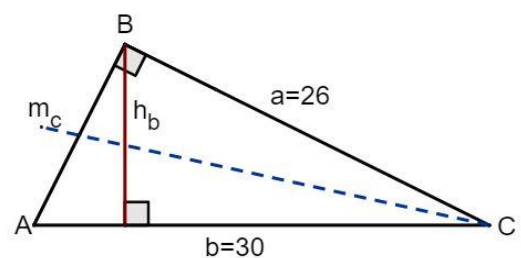
21. Þríhyrningurinn ABC er rétthyrndur með $B = 90^\circ$, $a = 26$ og $b = 30$.

Reiknaðu lengd:

a) Stuttu skammhliðina (c)

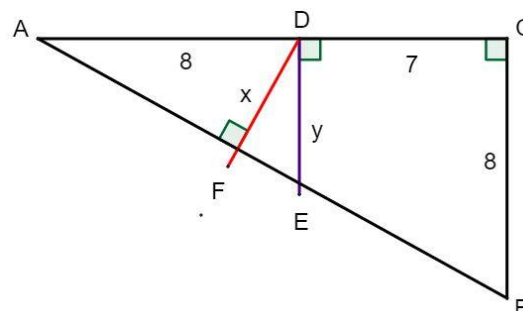
b) hæðar þríhyrningsins (h_b)

c) Miðlínu á hliðina c (m_c)

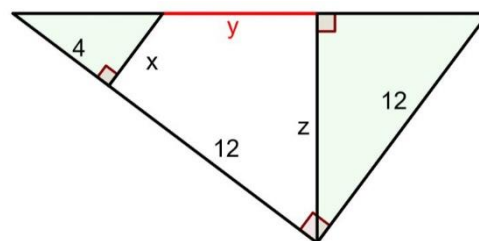


22. Í myndinni má sjá „þrí-einn“ rétthyrndan þríhyrning, þ.e. þríhyrningarnir AFD og ADE eru innbyggðir í ACB.

Byrjaðu á því að finna lengdina AB og síðan lengdirnar x og y.



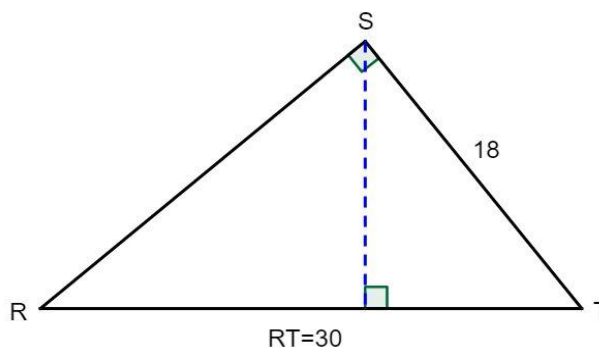
23. Þessir þrír þríhyrningar (tveir í einum) eru allir rétthyrndir og einslaga. Finndu x, y og z.



24. Þríhyrningurinn RST er rétthyrndur með hornið $s = 90^\circ$.

Reiknaðu:

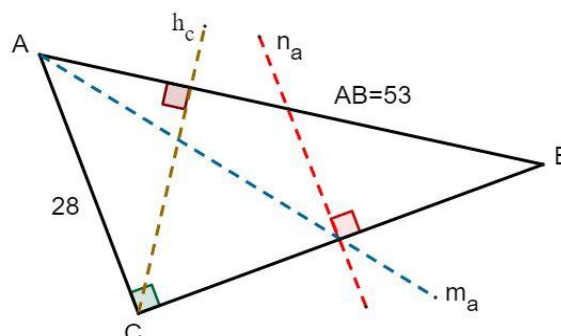
- Lengd hliðarinnar t.
- Hæðina á hliðina s.
- Flatarmál þríhyrningsins.



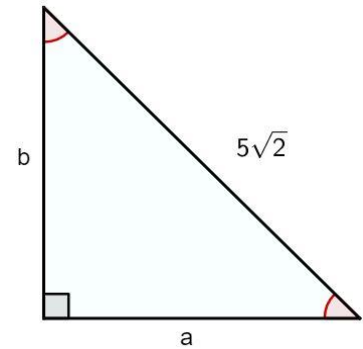
25. Þríhyrningurinn ABC er rétthyrndur með hornið $C = 90^\circ$

Reiknaðu:

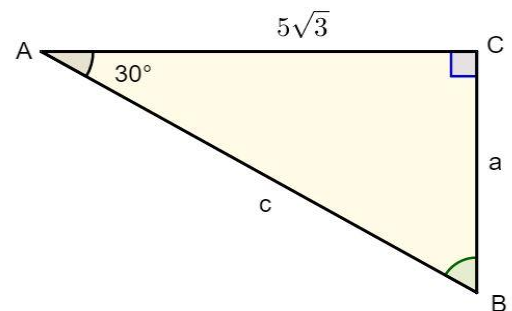
- Lengd hliðarinnar BC.
- Hæðina á hliðina c.
- Lengd miðlínu á hliðina a.
- Lengd miðþverilsins á a.



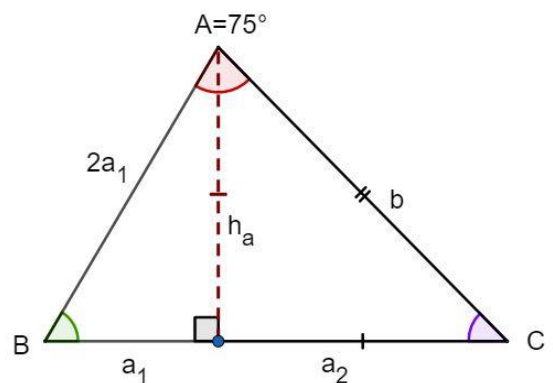
26. Þríhyrningur þessi er jafnarma. Hve langar eru skammhliðar hans?



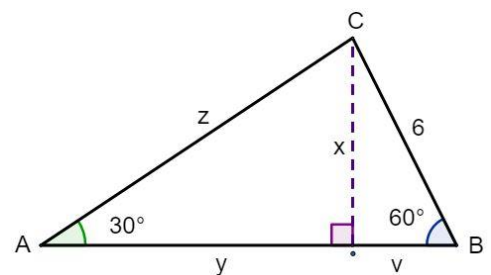
27. Hve langar eru hliðarnar a og c í þessum þríhyrningi?



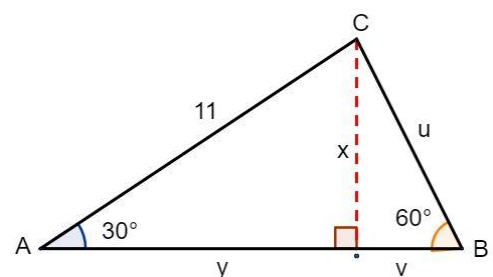
28. Ef þú skoðar þríhyrninginn ABC vandlega áttarðu þig fljótt á hvaða lögmálum hann lýtur. Summa hliðanna a_1 og $c = 15$. Finndu lengdirnar a_1 , a_2 , h_a og b með stærðfræðilegri nákvæmni.



29. Finndu lengdirnar v , y og z með stærðfræðilegri nákvæmni.



30. Finndu lengdirnar x , y , v og z með stærðfræðilegri nákvæmni.



4. KAFLI - HRINGURINN



4.1 Línur í hring

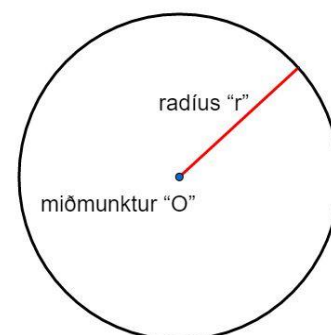
Samkvæmt Evklíð er "hringur mengi þeirra punkta sem liggja allir í sömu fjarlægð (radíus) frá tilteknum punkti M (eða O), sem þá er miðpunktur hringsins".

Í daglegu tali notum við orðið hringur um hvort tveggja, hringferilinn (bogalínuna) og svæðið innan hans (hringflötinn). En það kemur ekki að sök því við ráðum yfirleitt í merkinguna af samhenginu.

Radíus

Fjarlægðin frá miðpunkti (M) hringsins að hringferlinum nefnist radíus.

Radíus hringsins er sá sami hvar sem hann snertir hringferilinn og segir okkur í raun allt um stærð hringsins.



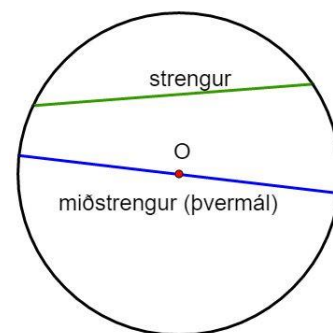
Video 29 Radíus

Strengur

Strik, sem liggur milli tveggja punkta á hringferlinum, nefnist strengur.

Gangi strengur gegn um miðpunkt hringsins nefnist hann miðstrengur.

Lengd miðstrengs er þvermál hringsins sem í raun er 2 radíusar.

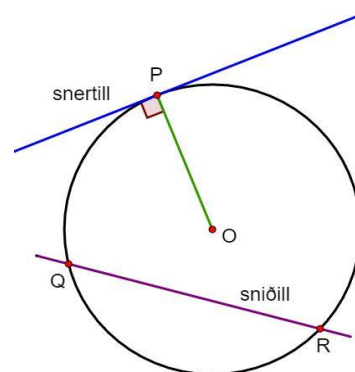


Sniðill og snertill

Lína sem gengur í gegn um hring og sker hringferilinn á tveim stöðum nefnist sniðill.

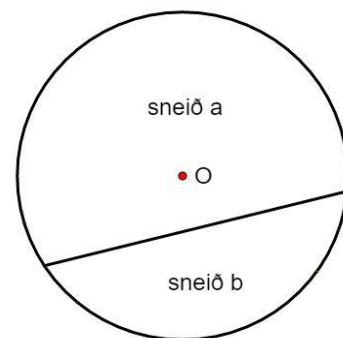
Lína sem snertir hring aðeins í einum punkti nefnist snertill.

Snertill á aðeins einn sameiginlegan punkt (P) með hringnum og hann liggur ætíð hornrétt á radíus hringsins hringsins í þeim punktu.



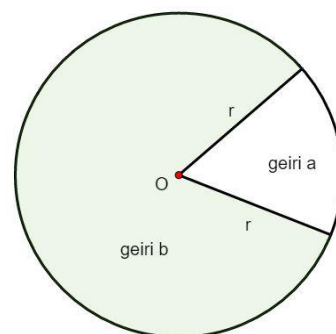
Sneið

Strengur sker hringinn í tvo hluta. Svæðin, sem strengurinn skiptir hringnum í, kallast sneiðar.



Geiri

Tveir radíusar í hring skipta honum í tvo hluta sem nefnast geirar.



Video 31 Sniðill
& snertill



Video 30 Hringgeiri



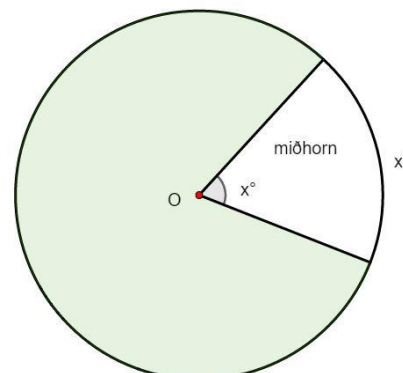
Video 32 Miðhorn & ferilhörn

4.2 Horn í hring

Miðhorn

Ef oddpunktur horns er í miðju hring og armar hornsins eru radíusar þá nefnist hornið miðhorn (horn geirans).

Stærð hornsins er jöfn stærð þess boga sem það spannar. Um þetta verður ekki deilt.

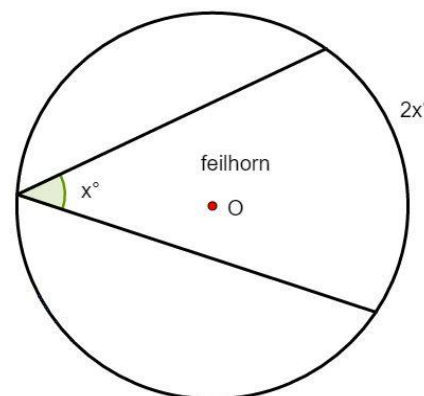


Ferilhörn

Ef oddpunktur horns er á ferli hring og armar þess eru strengir þá nefnist hornið ferilhörn.

Stærð hornsins er jafnt hálfum boganum, sem það spannar.

Ferilhörn geta legið á þrjá vegu í hringnum.



SÖNNUN

Sönnun sem þarf að kunna.

1. Með annan arminn sem miðstreng.

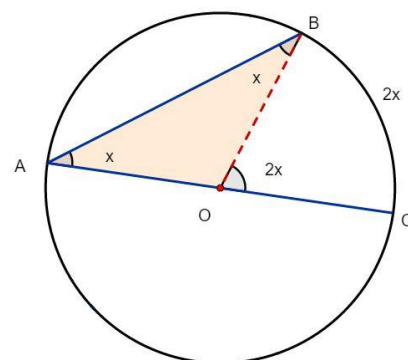
Annar armurinn liggur þá í gegn um miðpunkt hringins:

Látum x vera stærð ferilhorns BAC ($A = x$).

Hægri armur þess (AC) er miðstrengur.

Ef dreginn er radíusinn OB, úr miðpunkti hringins í punktin B, kemur fram jafnarma þríhyrningurinn AOB sem hefur jafn stór horn (x) við grunnlínu sína.

Utanvert horn þessa þríhyrnings er jafnt summu mótlægra innhorna hans svo stærð þess er $2x$. Það er um leið miðhorn hringins sem spannar bogann BC. Boginn BC er þá jafn stór miðhorninu en tvöfalt stærra en ferilhornið BAC.

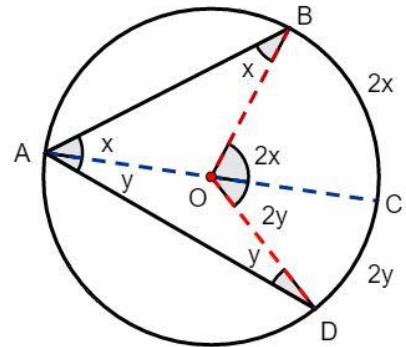


2. Með armana sinn hvoru megin við miðpunkt.

Drögum miðstrenginn AC úr oddpunkti ferilhorsins (A). Þá höfum við tvö ferilhorn, BAC og DAC, sem við meðhöndlum hvort um sig eins og áður var gert. Fáum þannig fram tvö miðhorn, BOC og DOC.

Boginn BD er þá summan af BC og DC.

BC og DC = $(2x + 2y)$, tvöfalt stærra en ferilhornið A, sem er $(x + y)$.



3. Með armana báða sömu megin við miðpunkt.

Við erum með ferilhornið BAD. Við drögum miðstrenginn AC okkur til aðstoðar.

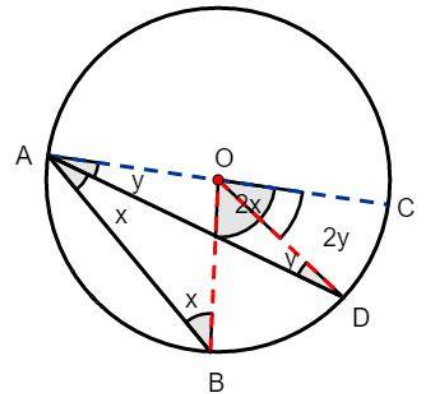
Þá höfum við ferilhornið CAB til að vinna með. Það er tvískipt, í ferilhornið BAD (merkt x) og ferilhornið DAC (merkt y). Hlutverk þess er að tengja hið raunverulega ferilhorn okkar við miðstrenginn.

Drögum radísinn OB og fáum fram þríhyrninginn AOB. Hann er jafnarma með grunnlínuhornin jafn stór. Merkjum þau með x . Utanvert horn þessa þríhyrnings er þá $2x$ að stærð.

Drögum þá radíusinn OD svo til verði þríhyrningurinn AOD. Hann er jafnarma með grunnlínuhornin jafn stór. Merkjum þau með y .

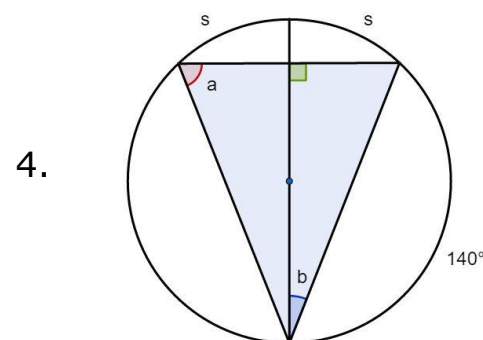
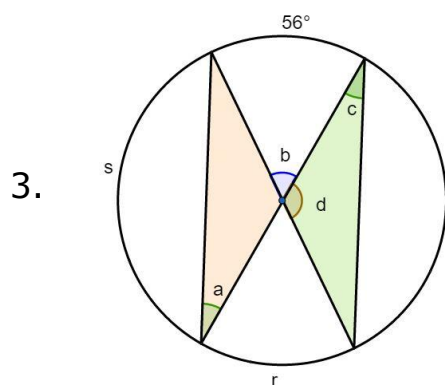
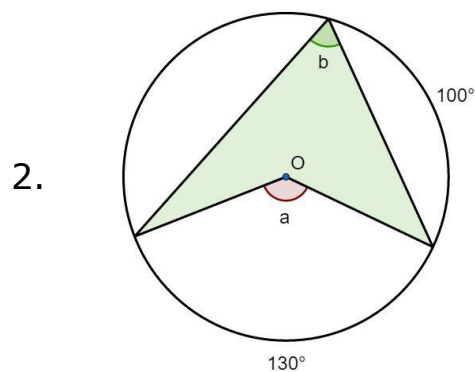
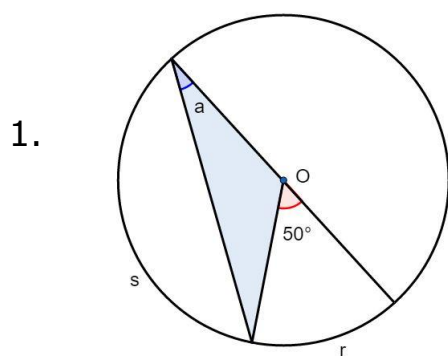
Utanvert horn hans er þá $2y$ að stærð. Stærð bogans sem ferilhornið A spannar er þá mismunur boganna BC og DC.

$BD = BC - CD$.

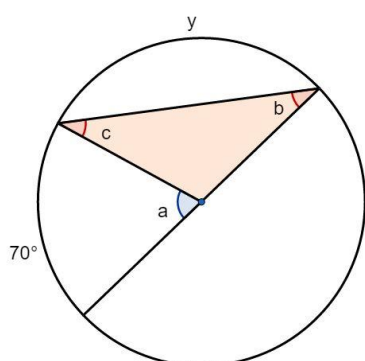
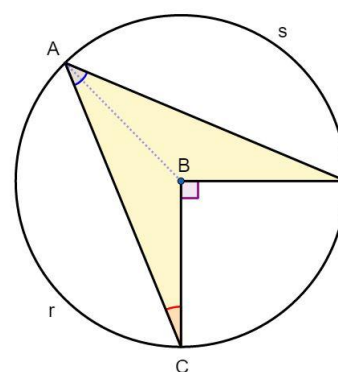


4.A. VERKEFNI

Í dæmum 1 - 4, áttu að reikna stærð horna og boga, sem merktir eru með bókstöfum.

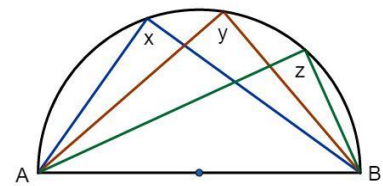


5. Á myndinni eru ferilhornið A og miðhornið B sem spanna sama bogann. Bogarnir r og s eru jafn stórir. Hve stór eru hornin A og C ?

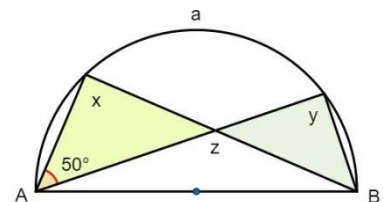


6. Finndu stærð hornanna a, b og c og bogans y.

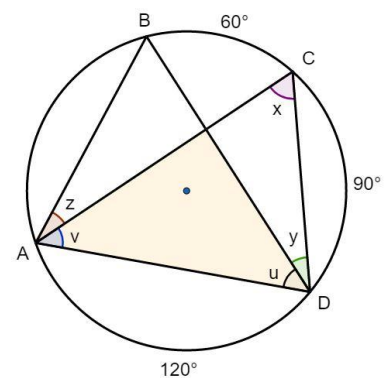
7. Strengurinn AB er miðstrengur hrings.
Hve stór eru hornin x , y og z ?



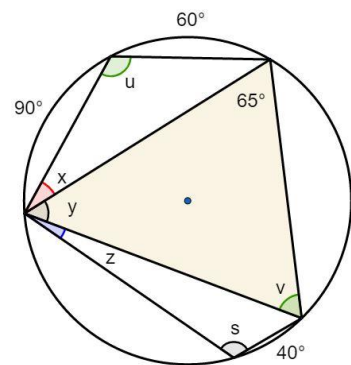
8. Strengurinn AB er miðstrengur hringsins.
Gefið er ferilhörn (50°), sem spannar bogann a. Finnið stærðir hornanna x , y og z sem og bogann a.



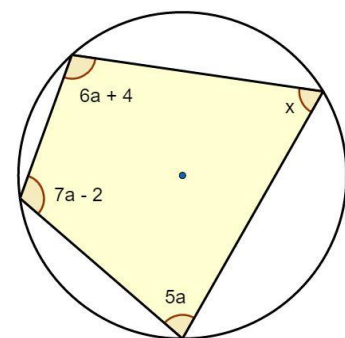
9. Reiknaðu stærðir hornanna sem merkt eru með litlum bókstöfum.



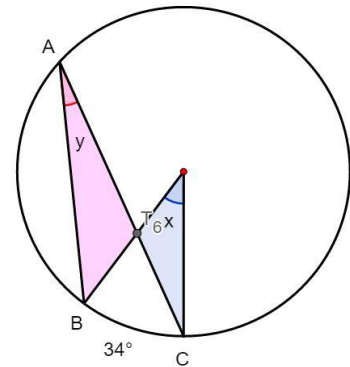
10. Nýttu bogana og uppgefna hornið til að reikna hornin sem merkt eru með bókstöfum.



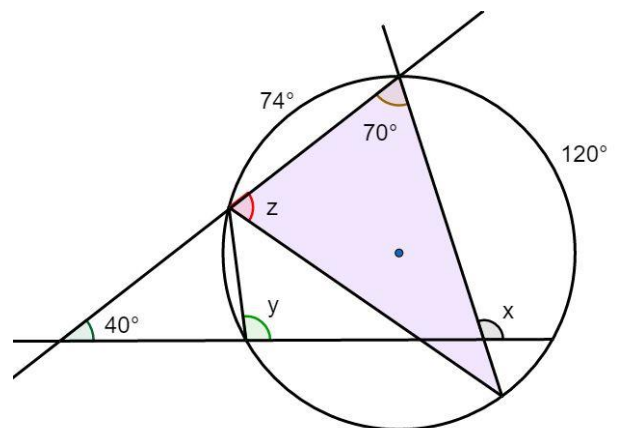
11. Regla er til sem segir:
„Ef ferhyrningur er innritanlegur í hring, þá eru gagnstæð horn hans frændhorn.“
Nýttu þér þessa reglu til að reikna út stærð hornsins x .



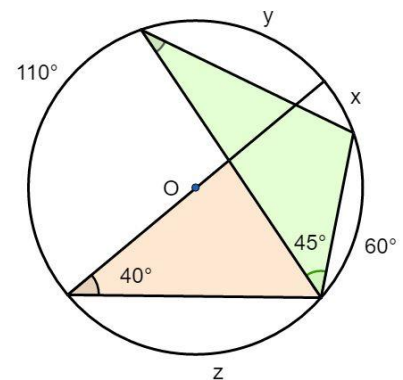
12. Reiknaðu x og y .



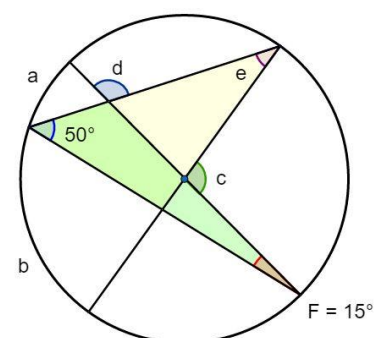
13. Reiknaðu hornin x , y og z .



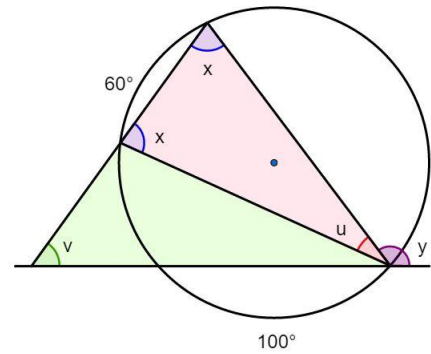
14. Reiknaðu gráðutölu boganna x , y og z .



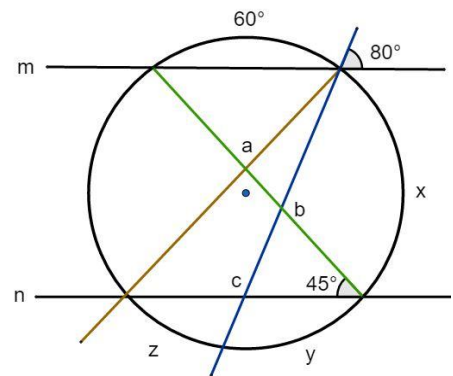
15. Á myndinni er hornið $F = 15^\circ$. Reiknaðu stærð boganna a og b og hornanna c , d og e .



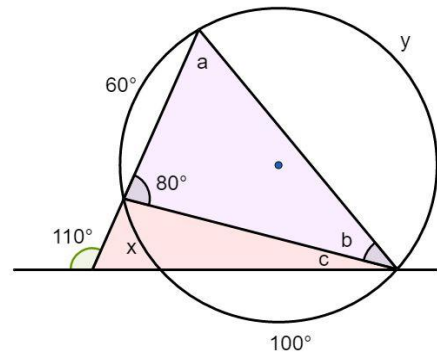
16. Jafnarma þríhyrningur er innritaður í hring. Gefnir eru tveir bogar í hringnum, annar 100° en hinn 60° . Reiknaðu hornin u , v , x , y .



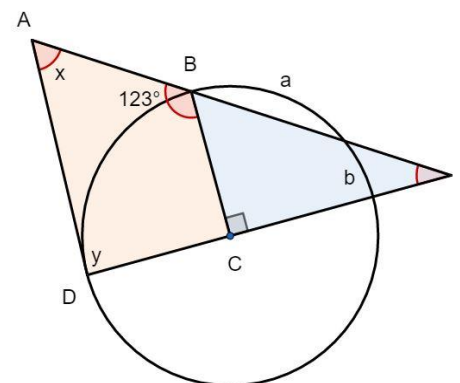
17. Línurnar m og n eru samsíða. Reiknaðu stærð hornanna sem merkt eru með bókstöfum.



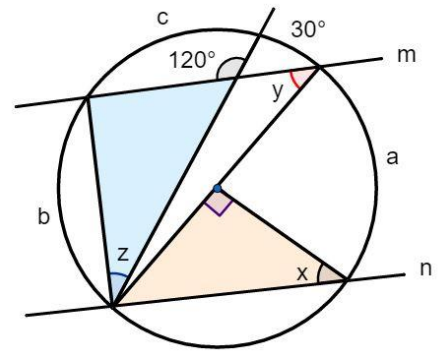
18. Nýttu þér gefnar upplýsingar til að reikna gráðutölu boganna x og y og hornanna a , b og c .



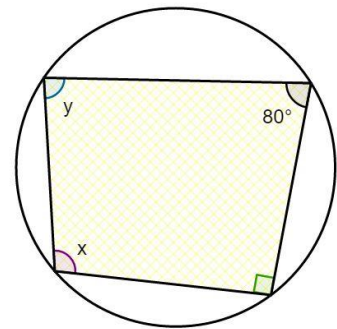
19. Hér eru línurnar AD og BC samsíða. Finndu stærð hornanna x og y og boganna a og b .



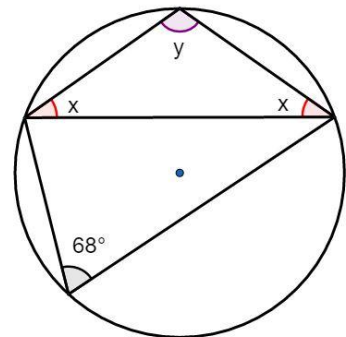
20. Línurnar m og n eru samsíða.
 Gefin er 30° bogi og eitt horn í hringnum auk þess að 90° miðhorn er gefið.
 Finndu stærð hornanna x , y og z og boganna a , b og c .



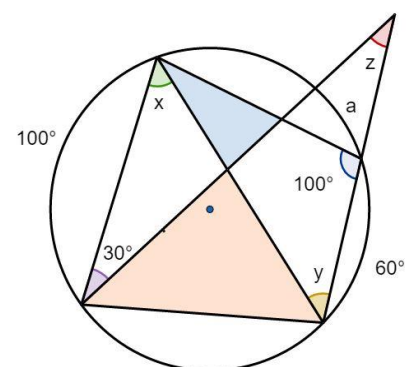
21. Reiknaðu x og y . (sbr. dæmi 11)



22. Reiknaðu x og y .



23. Reiknaðu gráðutölu hornanna x , y og z og bogans a .





Video 33 Utanvert horn

4.3 Horn utan við hring

Hér er átt við horn sem liggur utan við hring, með báða arma sem strengi eða snerta hringferilinn.



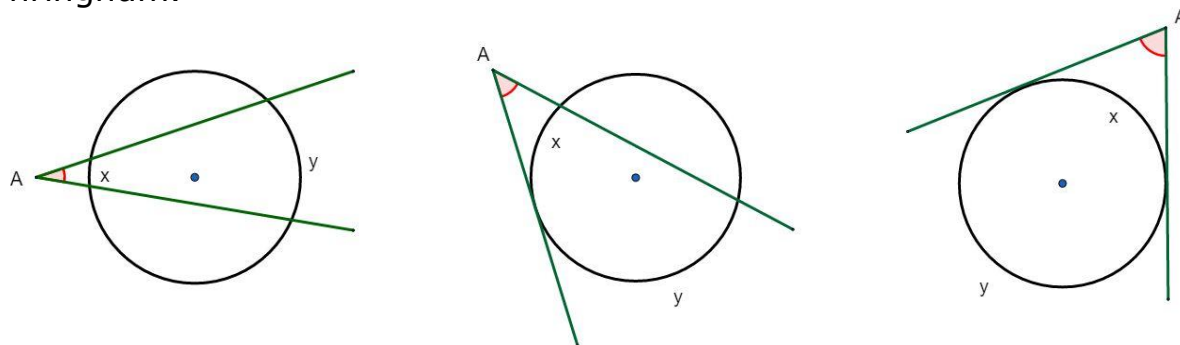
Video 34 Utanvert horn - Sýnidæmi

Reglan er þessi:

Stærð hornsins er jöfn hálfum mismuni boganna sem það spannar. Við reiknum þetta svona:

$$A = \frac{y - x}{2}$$

Þessi regla gildir hvernig svo sem lega hornsins er gagnvart hringnum.

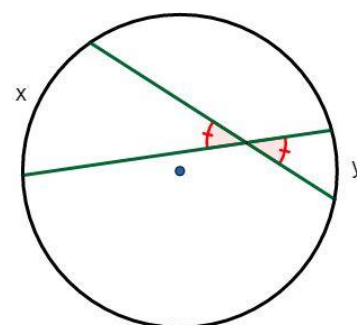


Hvort sem báðir armar hornsins eru sniðlar í hringnum, annar armur þess sniðill og hinn snertill eða þótt báðir armarnir eru snertlar.

Regla um topphorn:

Stærð topphorna innan hringar er jöfn hálfri summu boganna sem þau spanna.

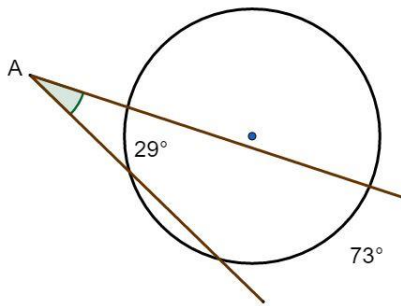
$$A = \frac{y + x}{2}$$



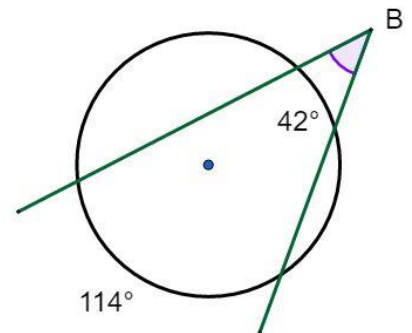
VERKEFNI 4.B

Í dæmum 1 - 4, reiknaðu stærð hornanna utan hringjanna.

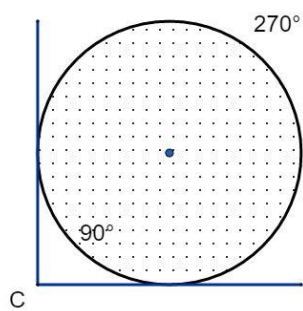
1.



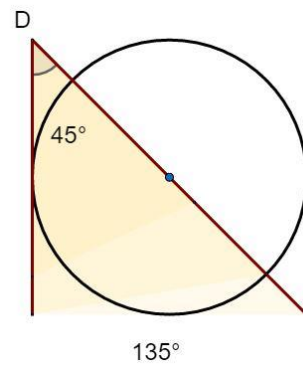
2.



3.

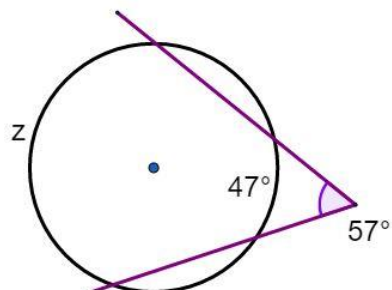


4.

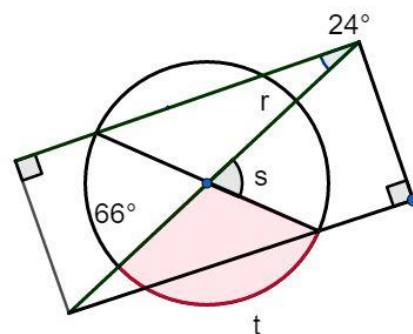


Í næstu dæmum áttu að reikna stærð merktra horna og/eða boga.

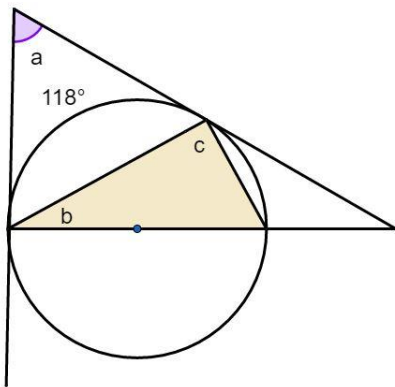
5.



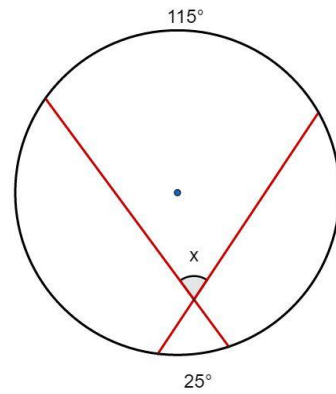
6.



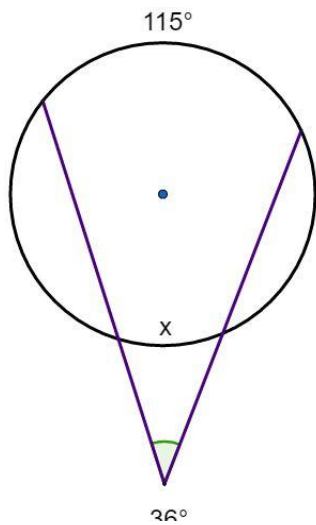
7.



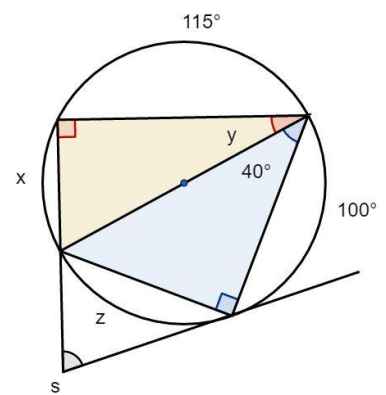
8.



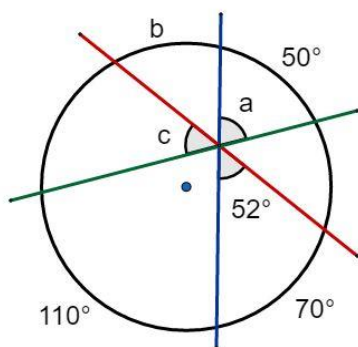
9.



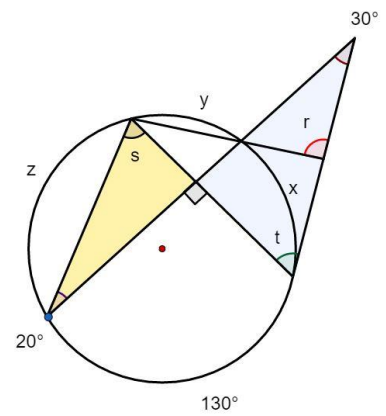
10.



11.



12.



5. KAFLI, HORNAFÖLL



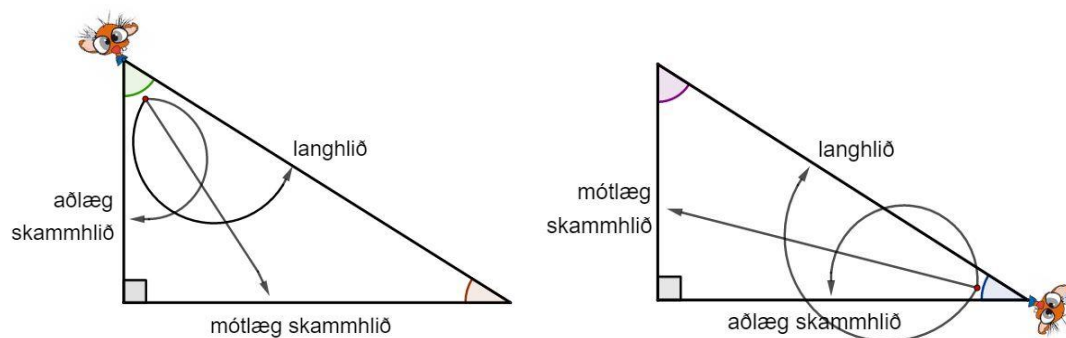
5.1. Hornaföll, inngangur

Byrjum á að koma okkur saman um orðalag og skilgreiningar.

- Hornaföllum er einungis hægt að beita á rétthyrnda þríhyrninga.
- Hornaföll byggjast á samspili milli hliða þríhyrningsins og hvössu horna hans.
- Við tölum um „aðlæga“ skammhlið horns í þríhyrningi, „mótlæga“ skammhlið þess og „langhlið“.
- Langhliðin er alltaf hliðin, sem liggur á móti rétta horninu.

Til að átta okkur á hvor skammhliðin er aðlæg og hvor mótlæg er gott að staðsetja sjálfan sig í víðkomandi horni og horfa inn í

þríhyrninginn. Þá er aðlæg hliðin sú sem liggur að okkur en mótlæg sú sem við horfum á.



Þannig getur hvor skammhliðin sem er verið mótlæg eða aðlæg, það fer eftir því frá hvoru hvassa hornið við ætlum að vinna (horfa).

Hornaföllin eru þrenns konar:

TANGENS byggist á samspili skammhliðanna, mótlægrar og aðlægrar.

$$\text{Tan}(A) = \frac{\text{mótlæg skammhlið}}{\text{aðlæg skammhlið}}$$

SÍNUS byggist á samspili mótlægrar skammhliðar og langhliðar.

$$\text{Sin}(A) = \frac{\text{mótlæg skammhlið}}{\text{langhlið}}$$

KÓSÍNUS byggist á samspili aðlægrar skammhliðar og langhliðar.

$$\text{Cos}(A) = \frac{\text{aðlæg skammhlið}}{\text{langhlið}}$$



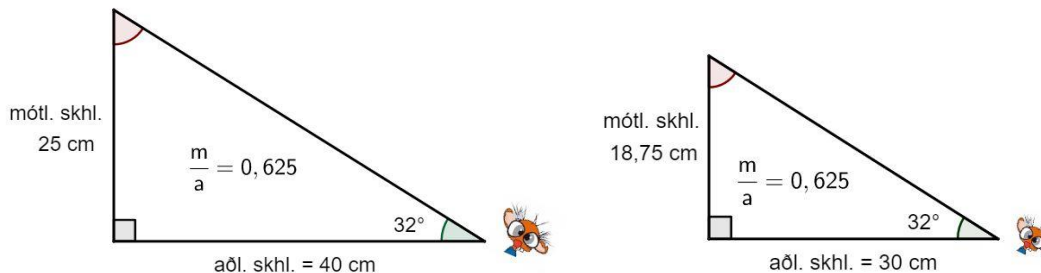
Video 35 Hornaföllin



Video 36 Hornaföllin

5.2. Tangens

Við sáum, þegar við bárum saman tvo einshyrnda þríhyrninga, að hliðarlengdir þeirra skiptu engu máli varðandi hlutföllin milli hliðanna. Þau voru hin sömu þegar hornin voru jafn stór í báðum.



Þessir rétthyrndu þríhyrningar eru einshyrndir og því einslaga þótt þeir séu misstórir.

Hlutföllin milli skammhliða þeirra eru því þau sömu í báðum.

Sá stóri $25/40 = 0.625$ og sá litli $18,75/30 = 0,625$ enda eru sams konar horn þeirra jafn stór.

Staðreyndin er sú að hlutfall þetta er það sama í öllum rétthyrndum þríhyrningum þar sem annað hvassa hornið er 32° (og hitt 58°).

Takið eftir að við erum alltaf að tala um rétthyrnda þríhyrninga þegar við ræðum um hornaföll (tan, sin, cos).

Almennt merkir þetta að ef við þekkjum hvasst horn og eina hlið í rétthyrndum þríhyrningi, þá getum við reiknað út stærðir hinna hliðanna. Og ef við vitum lengdir tveggja hliða getum við reiknað út stærðir horna. Þetta er það sem hornaföllin snúast um.

Hlutfallið milli mótlægrar skammhliðar og aðlægrar nefnist tangens (tan). Vasareiknirinn þinn þekkir þetta hlutfall og getur sagt þér hvað það er ef þú gefur honum upp hornastærð.

Ýttu á „tan“ takkann á vasareikni þínum og sláðu inn 32 (misjafnt eftir vasareiknum hver röðin er).

Vertu viss um að vasareiknirinn sé stilltur á "Deg" (D).



$\tan(32^\circ) = 0,62486935190932750978051082794944 \approx 0,62487$

Ef þú margfaldar lengd aðlægrar skammhliðar með þessari tölu færðu út lengd mótlægrar skammhliðar og öfugt.

Sýnidæmi

Finndu lengd hliðarinnar x , sem er mótlæg hlið hornsins $A = 60^\circ$.

Lausn:

$$\tan(A) = \text{mótlæg/aðlæg}.$$

$$\tan(60^\circ) = x/17$$

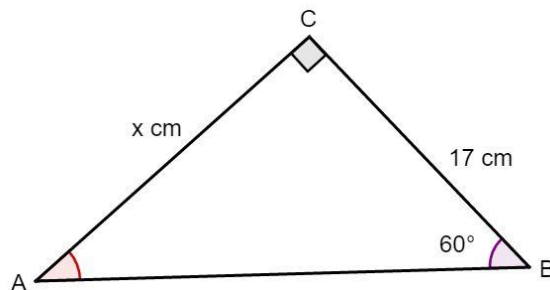
Umrita jöfnuna

$$\tan(60^\circ) \cdot 17 = x$$

Spyrjum vasareikninn um hlutfall skammhliðanna þegar hornið er 60° ($\tan(60)$).

$$1,73205 \cdot 17 = x \quad \text{þ.e.} \quad 29,445 = x$$

Sem segir: „ef hvasst horn í rétth. þríh. er 60° og aðlæg hlið þess er 17cm að lengd þá er lengd mótlægrar skammhliðar 29,445 cm.“



Skoðum nú sama þríhyrning út frá horninu B og reiknum út lengd sömu hliðar. Hún er þá aðlæg skammhlið hornsins B (sem er 30°).

Reglan er sú sama en hornið annað og hliðarnar skipta um hlutverk.

$$\tan(30^\circ) = \text{mótlæg/aðlæg}$$

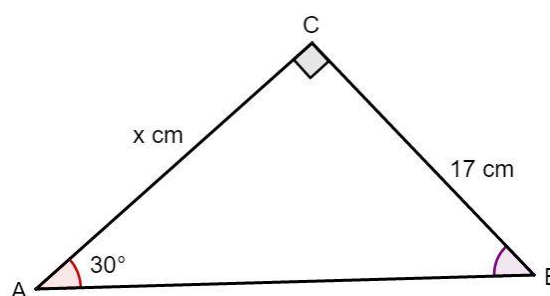
$$\tan(30^\circ) = 17/x \quad \text{Umritum jöfnuna fyrir } x..$$

$$x \cdot \tan(30^\circ) = 17$$

$$x = 17/\tan(30^\circ)$$

$$x = 17/0,57735 = 29,445$$

Niðurstaðan er sú sama.

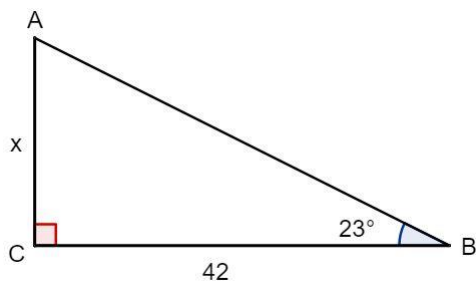


Video 37
Einingahringurinn

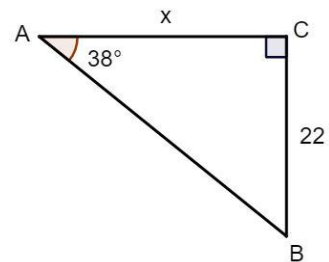
VERKEFNI 5.A.

Finndu hliðarlengdir skammhliða sem merktar eru x með því að beita tangens hornafallinu.

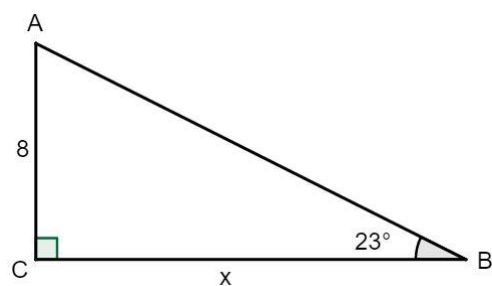
1.



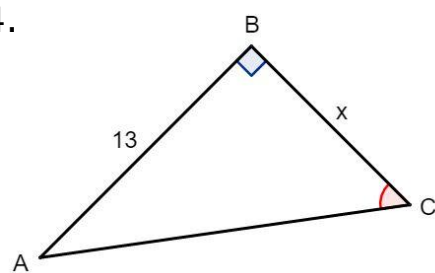
2.



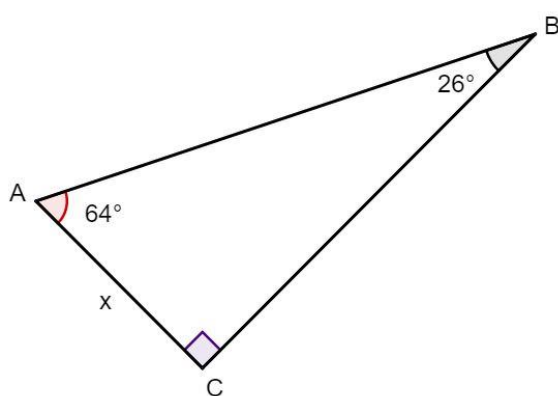
3.



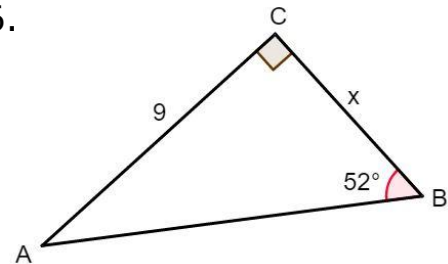
4.



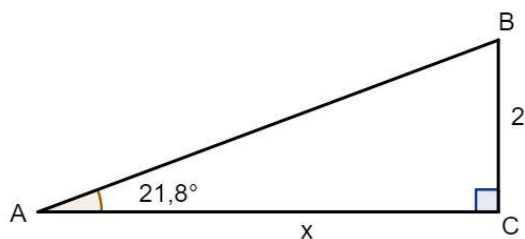
5.



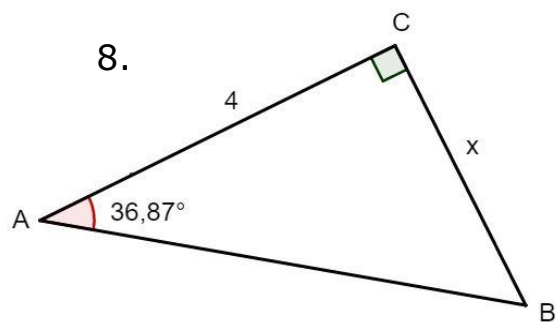
6.



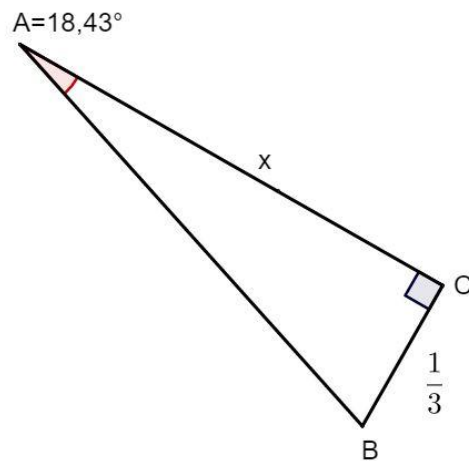
7.



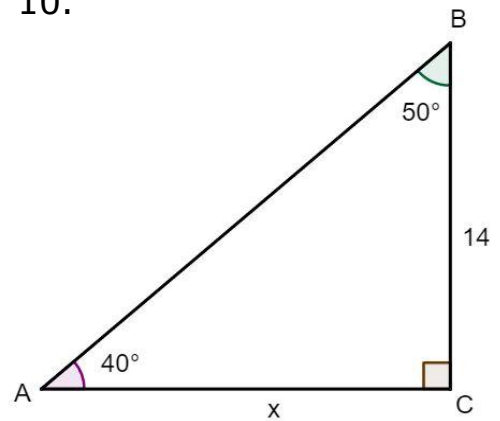
8.



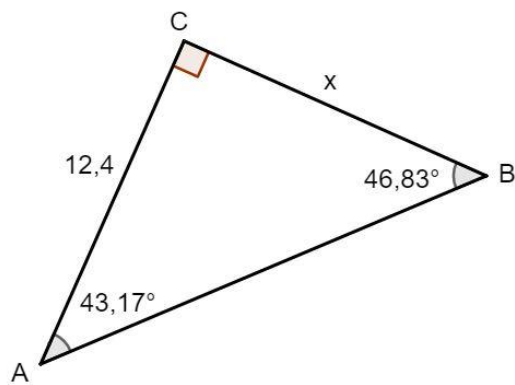
9.



10.

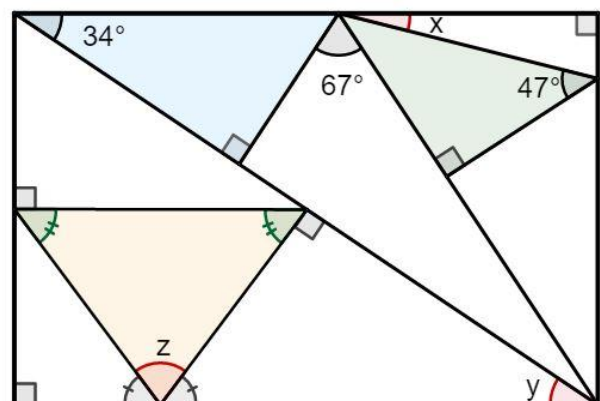


11.



12.

Þrjónaðu þig hornanna á milli til að finna stærðir hornanna x , y og z .



5.3. Finnum stærð horna

Á vasareiknum, undir „tan“ takkanum, er skipunin „tan⁻¹“.
Hún gefur okkur upp hornastærð ef við stimplum inn lengdir skammhliðanna.

Við setjum dæmið upp á þennan hátt:

$$(A^\circ) = \tan^{-1} \left(\frac{\text{mót. skh.}}{\text{aðl. skh.}} \right)$$

Ath. Á sumum vasareiknum þarf að setja tölurnar í sviga.

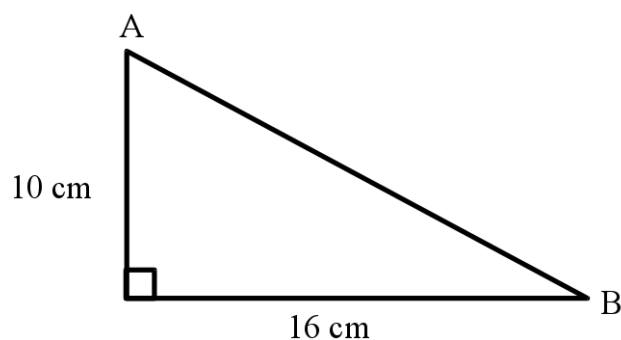
Sýnidæmi

Reiknaðu stærð hornsins A.

$$(A^\circ) = \tan^{-1} (\text{m.skh.}/\text{a.sskh.})$$

$$(A^\circ) = \tan^{-1} (16/10)$$

$$(A^\circ) = 58^\circ$$

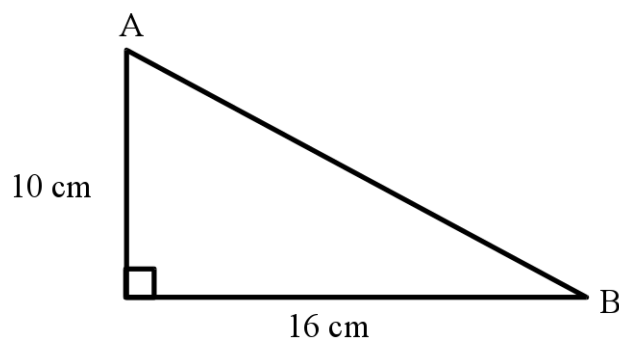


Á sama hátt getum við reiknað út hornið B. Þá stillum við okkur upp í horninu B og hliðarnar skipta um sæti. Formúlan breytist ekkert.

$$(B^\circ) = \tan^{-1} (\text{m.skh.}/\text{a.skh.})$$

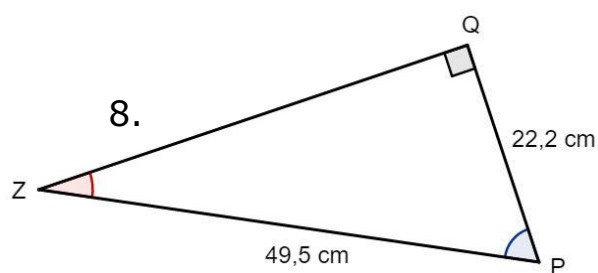
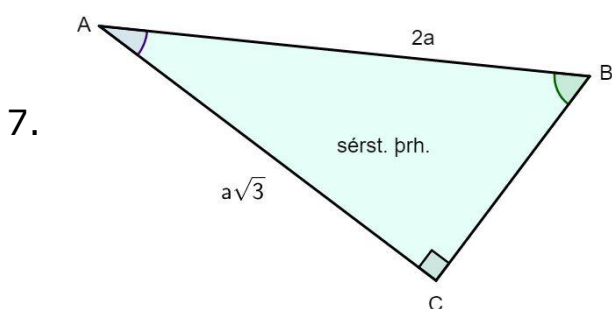
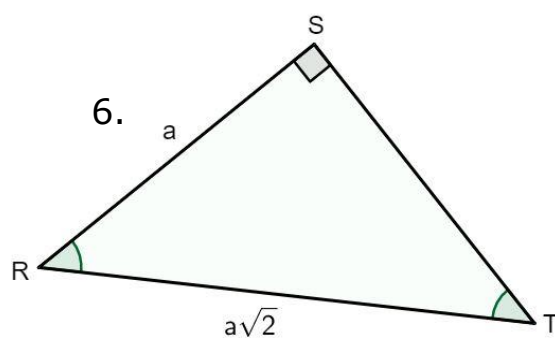
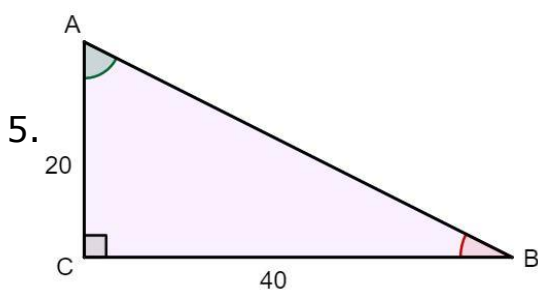
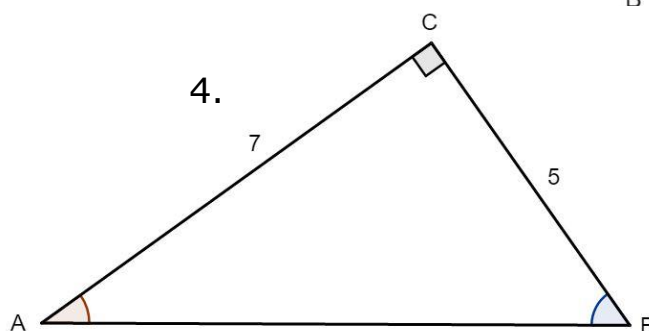
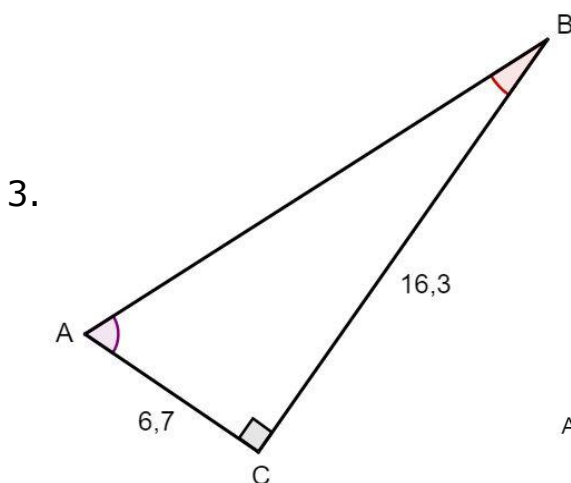
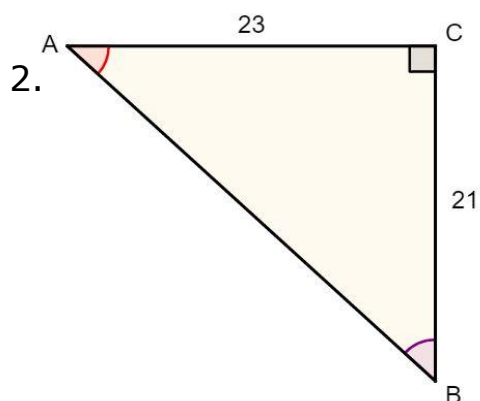
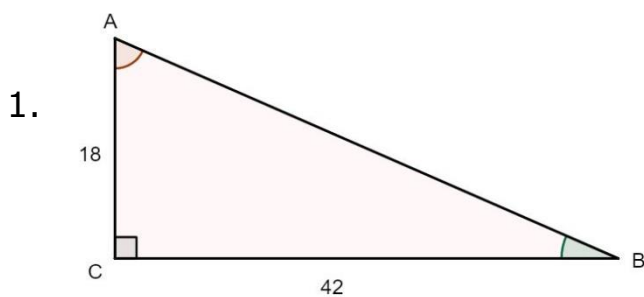
$$(B^\circ) = \tan^{-1} (10/16)$$

$$(B^\circ) = 32^\circ$$



VERKEFNI 5.B.

Finndu stærðir hvössu hornanna með því að beita tangens hornafallinu.



5.4. Sínus og kósínus

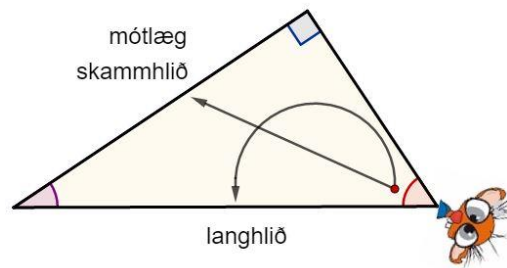
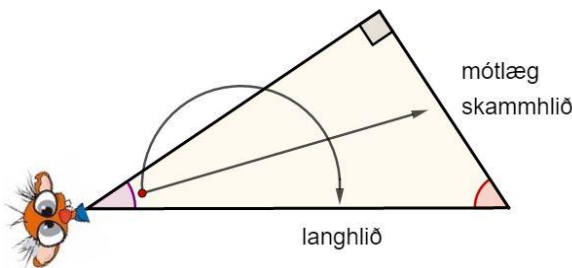
Hornafallið tangens fjallar um tengsl skammhliðanna út frá hvössu hornunum.

Hin hornaföllin tvö, sínus og kósínus, byggjast hins vegar á tengslum skammhliðanna við langhlið út frá hvössu hornunum.

Takið eftir að rétta hornið lætur sig hornaföll einskis varða.

Rétta hornið tryggir hins vegar að hægt er að beita hornaföllum við þríhyrninginn.

Sínus byggir á sambandi langhliðar og mótlæga skammhlið.



Sýnidæmi

a) Finndu lengd hliðar b út frá horni B .

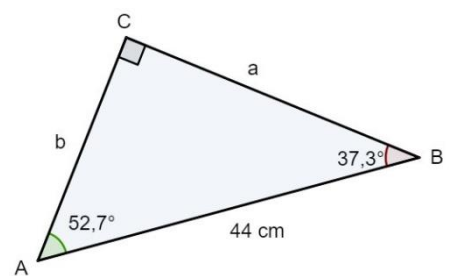
$$\sin(B) = \frac{\text{mótlæg skammhlið}}{\text{langhlið}}$$

$$\sin(37,3^\circ) = \frac{b}{44}$$

$$0,60599 = \frac{b}{44}$$

$$0,60599 \cdot 44 = b$$

$$26,7 = b$$



b) Finndu lengd hliðar a út frá horni A .

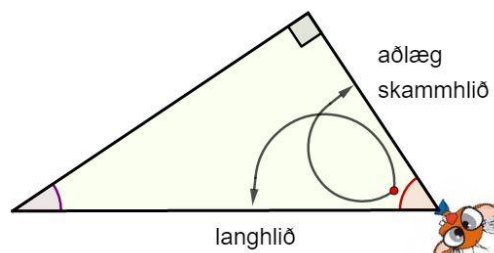
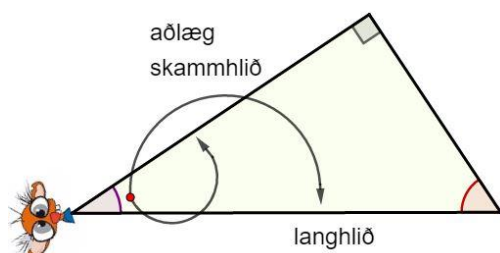
$$\sin(A) = \frac{\text{mótlæg skammhlið}}{\text{langhlið}}$$

$$\sin(52,7^\circ) = \frac{a}{44}$$

$$0,79547 \cdot 44 = a$$

$$35,0 = a$$

Kósínus byggir á sambandi langhl. og aðlægrar skammhliðar.



Sýnidæmi

Notaðu hornafallið kósínus (Cos) til að finna:

a) lengd hliðar a út frá horni B.

$$\cos(B) = \frac{\text{aðlæg skammhlið}}{\text{langhlið}}$$

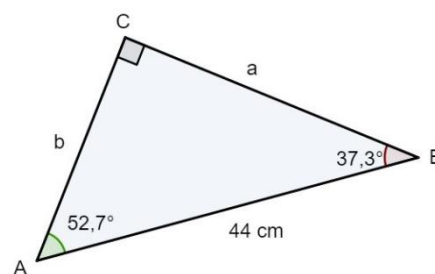
$$\cos(37,3^\circ) = \frac{a}{44}$$

$$0,79547 = \frac{a}{44}$$

$$0,79547 \cdot 44 = x$$

a út frá horni A.

$$35,0 = x$$



b) lengd hliðar

$$\cos(B) = \frac{\text{aðlæg skammhlið}}{\text{langhlið}}$$

$$\cos(52,7^\circ) = \frac{b}{44}$$

$$0,60599 \cdot 44 = x$$

$$26,7 = b$$

Taktu eftir samhenginu milli þessara hornafalla. Sínusinn af horninu A er sama talan og kósínusinn af B og öfugt. Enda byggir þetta augljóslega á sömu hliðarlengdum.

Finnum að lokum langhliðina með t.d. sínus af horninu B. Hún ætti að vera 44,0 að lengd ef allt er rétt.

$$\sin(37,3^\circ) = \frac{26,7}{x}$$

$$0,60599 = \frac{26,7}{x}$$

$$0,60599 \cdot x = 26,7$$

$$x = \frac{26,7}{0,60599}$$

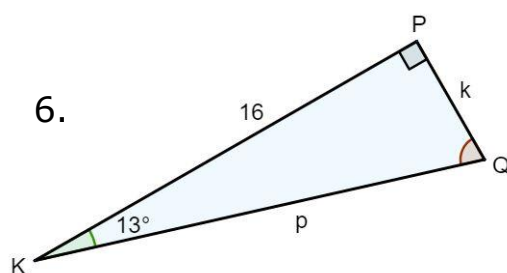
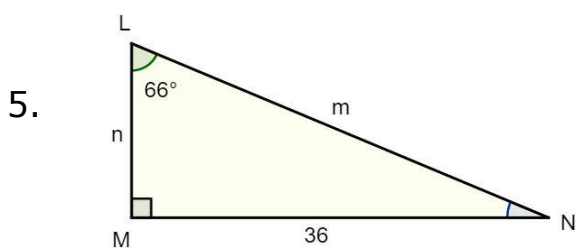
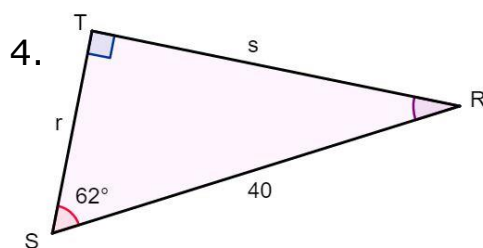
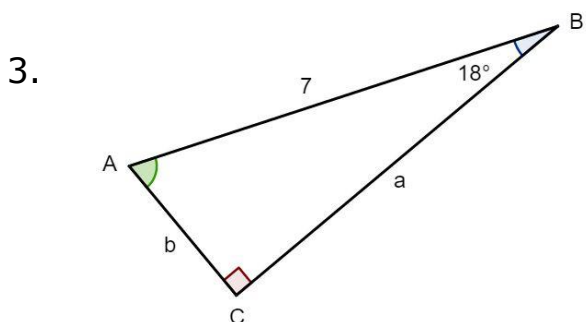
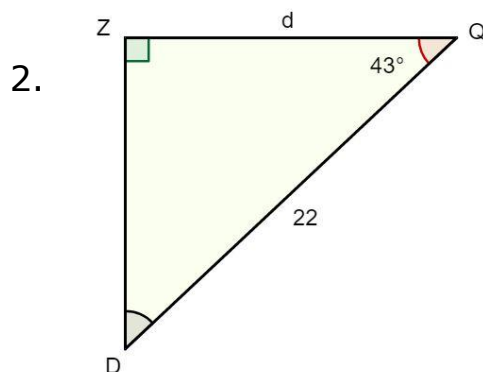
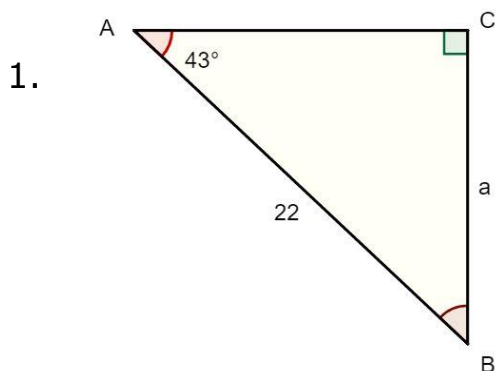
$$x = 44,0$$

þetta virkar!

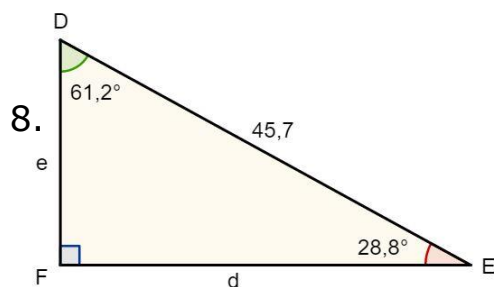
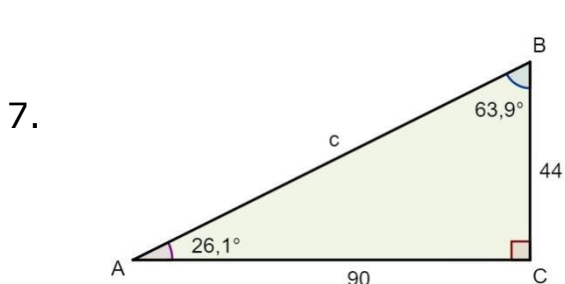
VERKEFNI 5.C.

Finndu lengdir hliðanna sem merktar eru með bókstöfum.

Notaðu sínus- eða kósínusregluna eftir því sem við á.



Í dæmum 7 og 8 máttu velja sin eða kos eftir því sem þú vilt.



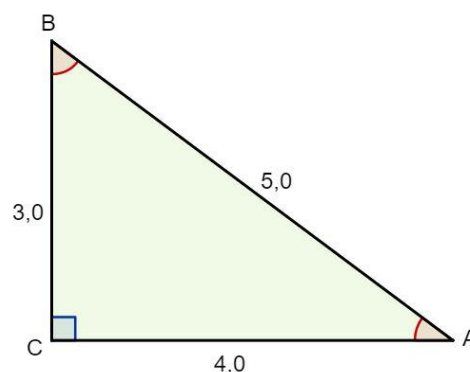
5.5. Finnum horn

Á vasareiknum, undir „sin“ takkanum, er skipunin „sin⁻¹“ og undir „cos“ takkanum er „cos⁻¹“. Þær gefa okkur upp hornastærðir ef við stimplum inn lengd viðkomandi skammhliðar og langhliðar.

Við setjum dæmið upp eins og gert er í sýnidæminu:

Sýnidæmi

Reiknaðu stærð hornsins B með því að nota hornaföllin.



$$B^\circ = \tan^{-1} (\text{mótl./aðl.})$$

$$B^\circ = \tan^{-1} (4 / 3)$$

$$B^\circ = 53,1301^\circ$$

$$B^\circ = \sin^{-1} (\text{mótl./langhl.})$$

$$B^\circ = \sin^{-1} (4 / 5)$$

$$B^\circ = 53,1301^\circ$$

$$B^\circ = \cos^{-1} (\text{aðl./langhl.})$$

$$B^\circ = \cos^{-1} (3 / 5)$$

$$B^\circ = 53,1301^\circ$$

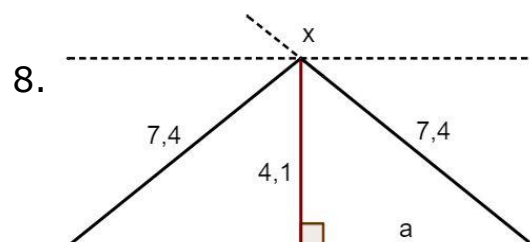
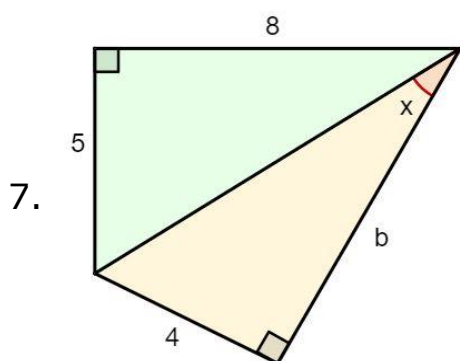
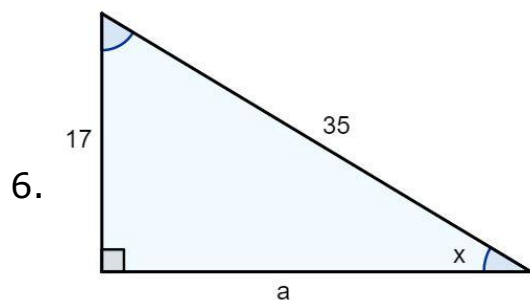
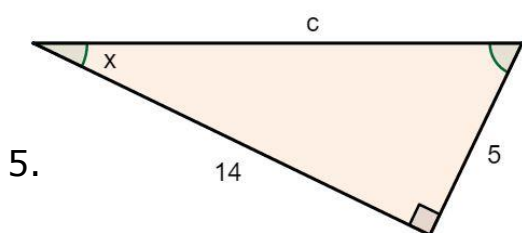
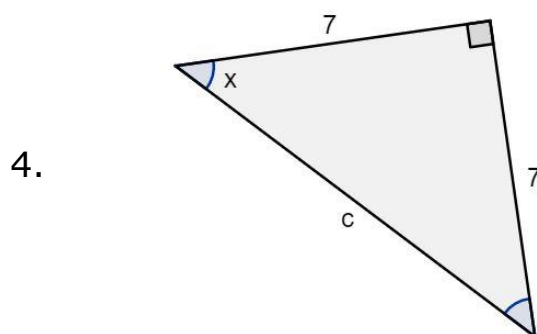
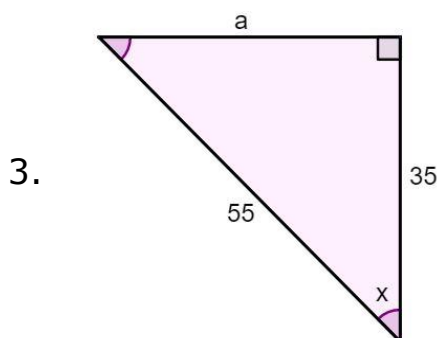
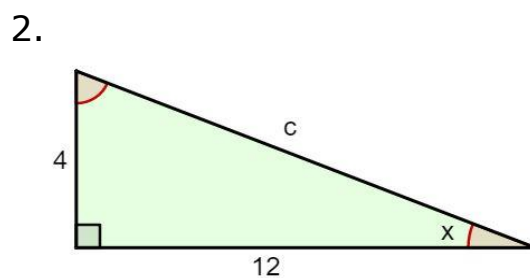
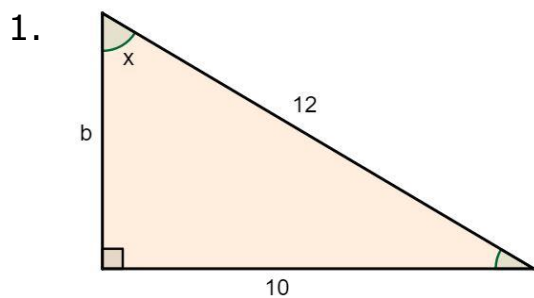
Takið eftir að öll hornaföllin skila nákvæmlega sömu niðurstöðum. Af hverju ?

Jú, hlutföll hliðana eru innbyrðis alltaf hin sömu.

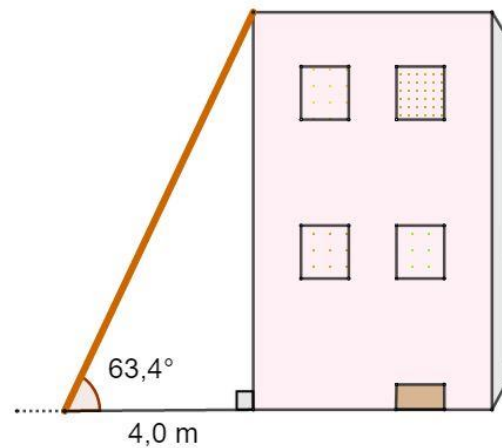
VERKEFNI 5.D.

Þríhyrningarnir í þessu verkefni eru allir rétthyrndir.

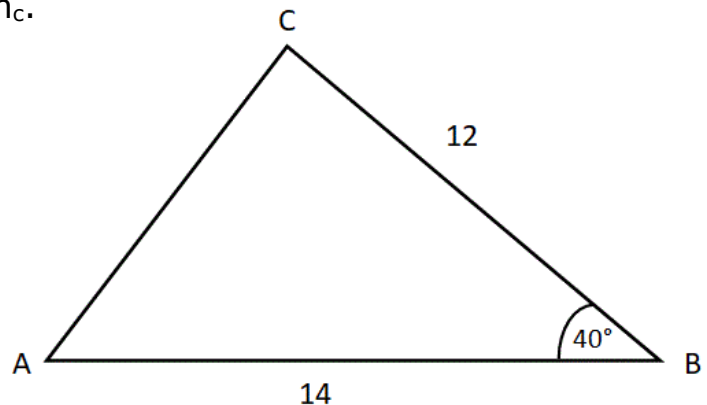
Notaðu hornaföllin til að finna x-merktu hornin og óþekktu hliðarnar.



- 9 . Við hús þetta stendur stigi.
Neðri endi stigans er 4 metra
frá húsinu og hann hallar um
 $63,4^\circ$.
Reiknaðu út hve hátt húsið er
og hve langur stiginn er.



10. Þríhyrningurinn ABC er ekki rétthyrndur.
Horni B = 40° , hliðin a = 12 og hliðin c = 14.
Reiknaðu h_c , A, b og n_c .



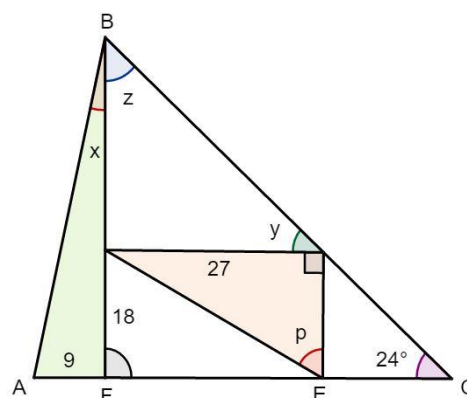
VERKEFNI 5.E.

Dæmin í þessum kafla virðast sum hver flókin. En þú kannt allt sem til þarf til að leysa þau.

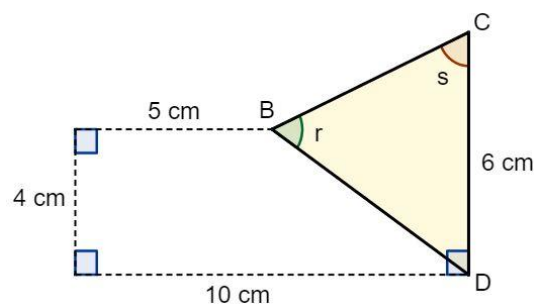
Þú mátt nota þá aðferð og reglu sem þú vilt, Pýþagóras, hornaföll eða einslögun.

Láttu vaða. !

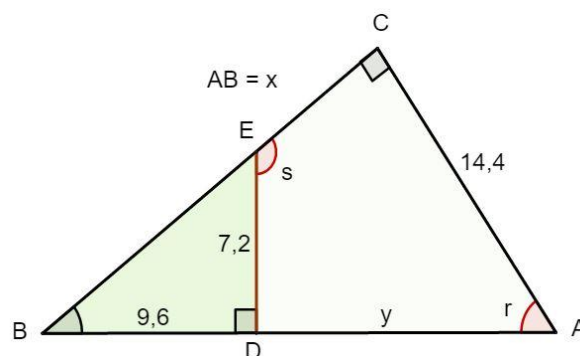
- Hér höfum við þríhyrninginn ABC hólfaðan niður á kerfisbundinn hátt svo fram koma 5 minni þríhyrningar, sumir hverjir einshyrndir. Finndu stærðir hornanna: A, B, p, x y og z. Finndu einnig lengdirnar: AB, AC BC og BF.



- Kannaðu hvort þríhyrningurinn BCD er jafnarma, jafnhliða eða hvorugt. Rökstuddu svar þitt. Hve stór eru hornin r og s?



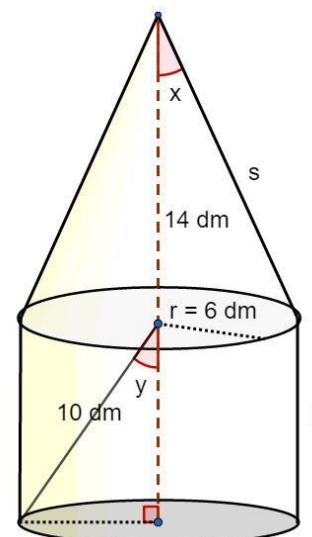
- Þríhyrningarnir ABC og EBD eru einshyrndir. Reiknið hornin r og s. Reiknið einnig lengdir x og y.



4. Hér til hliðar er keila föst ofan á sívalningi.

Radíus beggja forma er 6 dm.og hæð keilunnar er 14 dm.

Reiknaðu áshornið x , hornið y og lengdirnar s og t .

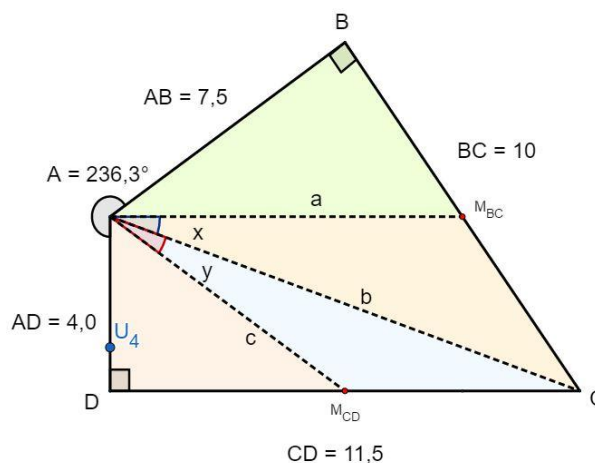


5. Línurnar a og c liggja úr A í miðpunkta hliðanna BC og CD. Línan b er AC.

„Glađhorniđ“ A = 236,3°,

hličin $AB = 7,5$, $BC = 10$ og $CD = 11,5$.

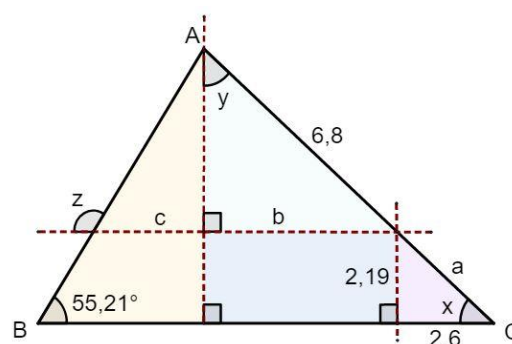
Reiknaðu stærðir hornanna x og y og lengdir línanna a og b .



6. Finndu, með þeim ráðum sem henta:

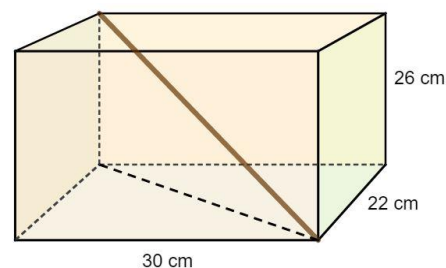
- a) Hornin x, y, z
b) Lengdirnar, a, b og c .

- b) Lengdirnar, a , b og c .



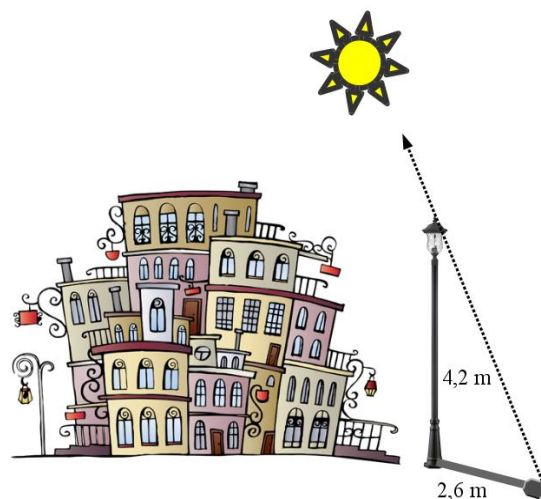
7. Á myndinni er kassi sem í er langur rörbútur. Rörið liggur úr einu hægra horni að ofan í vinstra horn við botn.

Reiknaðu lengd rörsins og stærð hornanna, sem það myndar við lóðréttar brúnir kassans.

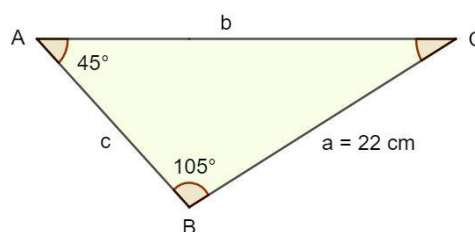


8. Ljósastaurinn er 4,2 m á hæð og varpar af sér skugga sem er 2,6 m langur.

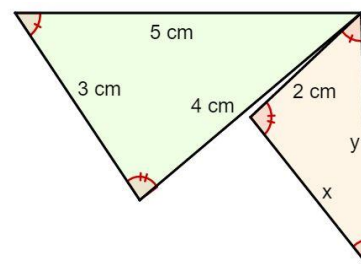
- a) Hver er sólarhæðin á þessu augnabliki?
b) Hve hár væri maður sem á þessum tíma stæði við staurinn og varpaði af sér 110 cm löngum skugga?



9. Reiknaðu lengdir hliðanna b og c með stærðfræðilegri nákvæmni.



10. Þríhyrningarnir eru einslaga. Reiknaðu lengdir hliðanna x og y . Skilaðu svarinu með stærðfræðilegri nákvæmni (alm. brot).



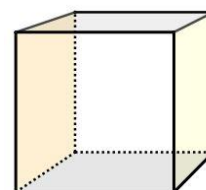
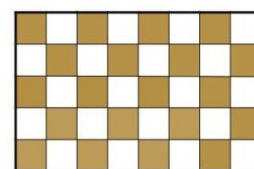
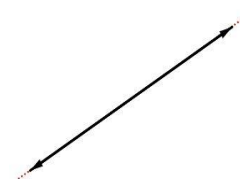
6. KAFLI, FLATARMÁL



Veröldin sem við lifum í er í þrem víddum.

1. Fyrsta vídd er lengd. Við tölum um bil milli hluta, fjarlægð frá einum punkti í annan. Við sjáum endalausar línur eða mislöng strik.
2. Önnur vídd er flötur. Við skynjum lengd og breidd og köllum það flöt eða yfirborð. Veggur, gólf, blaðsíða. Borðplatan þín er flötur.
3. Þriðja vídd er rými. Við upplifum umhverfið sem pláss (rými) þegar við bætum dýpt við flötinn. Við tölum þá um lengd, breidd og hæð, t.d. í herberginu þínu, í kassa eða inni í kúlu.

Þessi kafli fjallar um tvívíð form, fleti sem hafa lengd og breidd.



Einnig reiknum við ummál flatarmynda, sem er summa allra hliðarlengda eða bogalína flatar, línan sem afmarkar flötinn.

Mælieiningar flatarmáls er í 2. veldi (t.d. cm^2) því einingarnar margfaldast saman um leið og tölurnar.

Tökum sem dæmi $2 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 2 \cdot 3 \cdot \text{cm} \cdot \text{cm} = 6 \text{ cm}^2$.

Mælieiningar ummáls eru í 1. veldi því þar leggjast lengdirnar og mælieiningarnar saman. T.d. $2 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$



Video 38 Flatarmál

6.1. Rétthyrningar

Rétthyrningur er ferhyrndur flötur með öll horn rétt (90°).

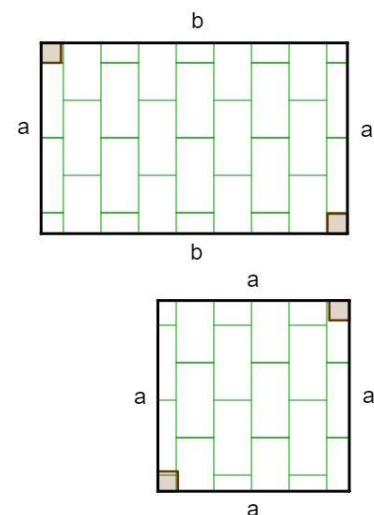
Ef allar hliðar hans eru jafn langar kallast hann ferningur.

Flatarmál rétthyrnings reiknast með því að margfalda saman lengd hans og breidd.

$$F = l \cdot b \quad (\text{Feringur: } F = a^2)$$

Ummá rétthyrnings fæst með því að leggja saman allar hliðarlengdirnar. Og auðvitað eru tvær og tvær hliðar jafn langar.

$$U = 2a + 2b \quad (\text{Feringur: } U = 4a)$$



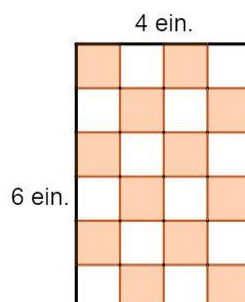
Sýnidæmi

Reiknaðu flatarmál og ummál rétthyrningsins.

$$F = l \cdot b$$

$$F = 6 \text{ ein} \cdot 4 \text{ ein}$$

$$F = 24 \text{ ein}^2$$



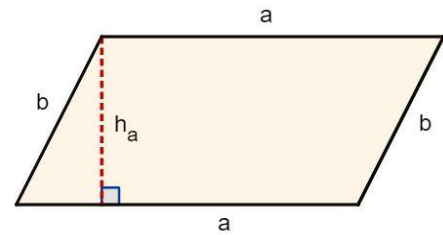
$$U = 2 \text{ ein} + 2 \text{ ein}$$

$$U = 2 \cdot 6 \text{ ein} + 2 \cdot 4 \text{ ein}$$

$$U = 12 \text{ ein} + 8 \text{ ein} = 20 \text{ ein}$$

6.3. Samsíðungur

Samsíðungur er ferhyrningur þar sem mótlægar hliðar (tvær og tvær) eru samsíða.

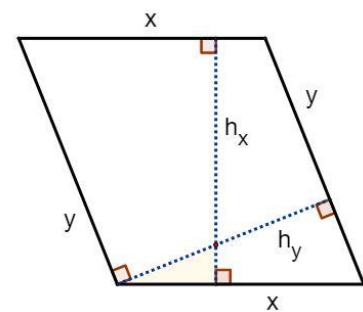


Mótlægar hliðar eru jafn langar og mótlæg horn jafn stór. Fjarlægðin milli mótlægra hliða kallast hæð. Hún liggur hornrétt á báðar hliðarnar.

Flatarmál samsíðungs reiknast með því að margfalda saman grunnlínu (hliðarlengd) og hæðina á þá grunnlínu.

$$F = x \cdot h_x \text{ eða } F = y \cdot h_y$$

Ummál er sem áður summa allra hliða.



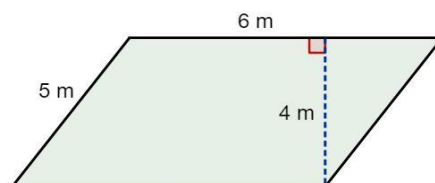
Sýnidæmi

Reiknaðu flatarmál og ummál þessa samsíðungs.

$$F = g \cdot h$$

$$F = 6\text{m} \cdot 4\text{m}$$

$$F = 24 \text{ m}^2$$



$$U = \text{summa hliða}$$

$$U = 2 \cdot 6\text{m} + 2 \cdot 5\text{m}$$

$$U = 12\text{m} + 10\text{m}$$

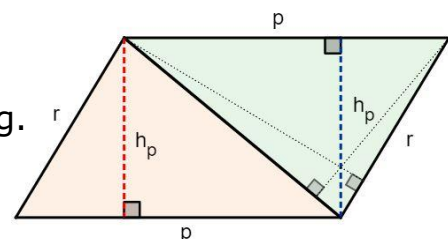
$$U = 22 \text{ m}$$

6.4. Þríhyrningar

Líta má á þríhyrning sem hálfan samsíðung. Þá liggur reikniformúla flatarmáls hans í augum uppi:

„Grunnlína sinnum hæð deilt með tveim“.

Ummál er hér eins og annar staðar, summa allra hliða.



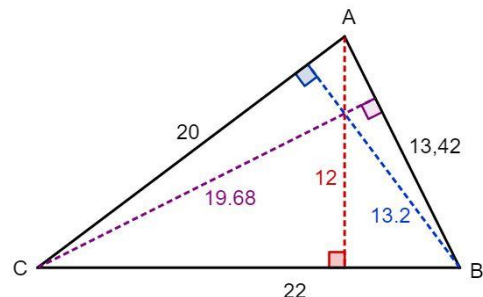
Sýnidæmi

Reinaðu flatarmál þessa þríhyrnings út frá öllum þrem hliðum hans.

$$F_a = \frac{22 \cdot 12}{2} = 132$$

$$F_b = \frac{20 \cdot 13,2}{2} = 132$$

$$F_c = \frac{13,42 \cdot 19,68}{2} = 132$$

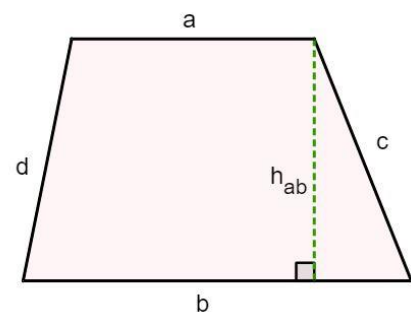


Ummál þríhyrningsins er summa allra hliða hans:

$$a + b + c = 22 + 20 + 13,42 = 55,42$$

6.4. Trapisa

Trapisa er ferhyrndur flötur þar sem tvær mótlægar hliðar eru samsíða en hinar tvær ekki.



Flatarmál trapisu finnst með því að margfalda meðaltal samsíða hliðanna tveggja með hæðinni á milli þeirra. Takið eftir að við leggjum saman lengdir samsíða hliðanna og deilum með tveim.

$$F = \frac{a + b}{2} \cdot h_{ab}$$

Taktu eftir að formúluna má einnig rita svona:

$$F = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

En þá verður að á að leysa úr sviganum áður en margfaldað er og deilt.

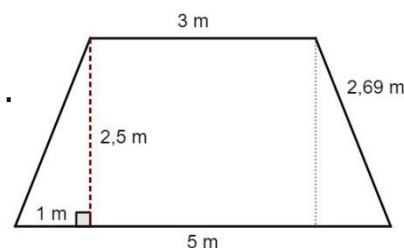
Ummál er eins og áður, summa allra hliðanna (hæðin ekki með).

Sýnidæmi

Reiknaðu flatarmál þessarar reglulegu trapisu.

$$F = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

$$F = \frac{(3 + 5) \cdot 2,5}{2} = \frac{8 \cdot 2,5}{2} = 10 \text{ m}^2$$



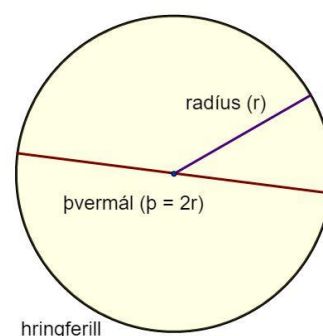
Til að reikna ummál trapisunnar verðum við að vita lengdir hliðanna sem ekki eru samsíða.

Þessi trapisa er regluleg svo okkur nægir að reikna út lengd annarrar hliðarinnar. Hin er jafn löng. Hér er heppilegt að nota reglu Pýþagórasar sem gefur okkur 2,6926 m.

$$U = 3 + 5 + 2 \cdot 2,69 = 13,38 \text{ m}$$

6.5. Hringurinn

Flatarmál hringlaga flatar finnst með því að setja radíus hans í annað veldi og margfalda síðan með pí. $F = r^2 \cdot \pi$



Ummál hings (lengd hringferils) reiknast með því að margfalda þvermál með pí. $U = p \cdot \pi$

-Pí er fasti (óbreytanleg stærð). hlutfallið milli ummáls og þvermáls hings.

($\pi \approx 3.141592654\dots$).

Pí er óræð tala, þ.e. að sem tugabrot er hún óendanleg (án lotu).

Sýnidæmi

Reiknaðu flatarmál og ummál hringis með radíusinn 4,5 cm.

$$F = r^2 \cdot \pi$$

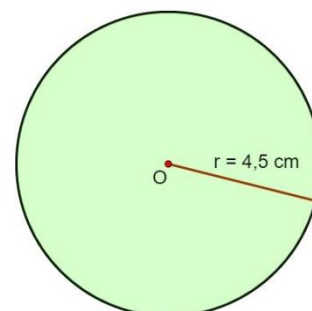
$$F = 4,5^2 \cdot \pi$$

$$F = 63,62 \text{ cm}^2$$

$$U = P \cdot \pi$$

$$U = 9 \cdot \pi$$

$$U = 28,27 \text{ cm}$$

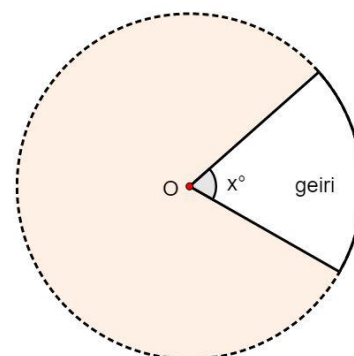


Video 39 Flatarmál
& ummál hringgeira

6.6. Hringgeiri

Geiri er hluti af hring með ákveðinn radíus. Stærð geirans er gefinn upp sem gráðtal bogans (miðhorn)sem hann spannar.

Til að reikna út flatarmál geirans þurfum við að vita flatarmál alls hringsins, sem hann er hluti af. Ef við deilum með 360 í flatarmál hringsins vitum við hvert flatarmál hverrar gráðu í honum er. Ef við margföldum það með gráðufjölda geirans vitum við flatarmál hans. Þessi formúla er auðskilin.



$$F = \frac{r^2 \pi}{360^\circ} \cdot x^\circ$$

Við finnum eina gráða úr flatarmáli hringsins og margföldum með gráðutölu geirans.

Það sama gerum við með ummál geirans. Við finnum ummál alls hringsins, deilum með 360° og margföldum síðan með gráðutölu geirans. Þá erum við komin með lengd bogans (hluta hringferilsins). Bætum síðan tveim radíusum við til að fá allt ummál geirans.

Þessi formúla er líka auðskilin eins og þú sérð.

$$U = \frac{2r\pi}{360^\circ} \cdot x^\circ + 2r$$

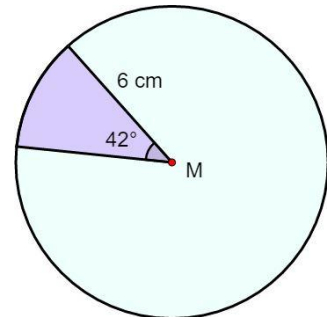
Sýnidæmi

Reiknaðu flatarmál og ummál 42° hringgeira með radíus 6 cm.

Flatarmál:

$$F = \frac{6^2 \cdot \pi}{360^\circ} 42^\circ$$

$$F = \frac{\pi}{10} \cdot 42^\circ = 13,195 \text{ cm}^2$$



Ummál:

$$U = \frac{2r\pi}{360^\circ} \cdot M^\circ + 2r$$

$$U = \frac{2 \cdot 6 \cdot \pi \cdot 42^\circ}{360^\circ} + 2 \cdot 6$$

$$U = \frac{7\pi}{5} + 12 = 16,4 \text{ cm}$$

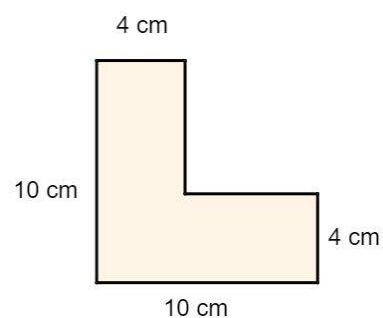
Ath. Kannaðu hvort styttingar og útreikningarnir eru réttir.

VERKEFNI 6.A.

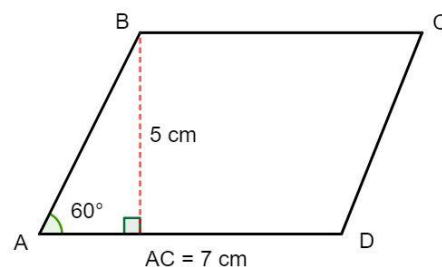
Rissaðu myndirnar í bókina þína, settu inn málin og skrifaðu upp viðeigandi formúlur.

Þú þarft að skipta myndunum upp í form sem þú þekkir og reikna myndirnar í hlutum.

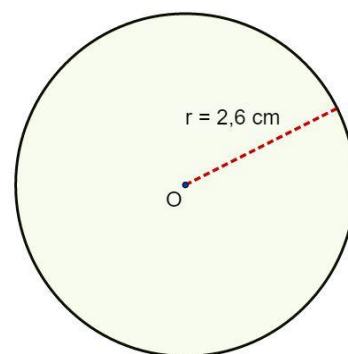
1. Reiknaðu flatarmál og ummál þessa flatarmyndar.



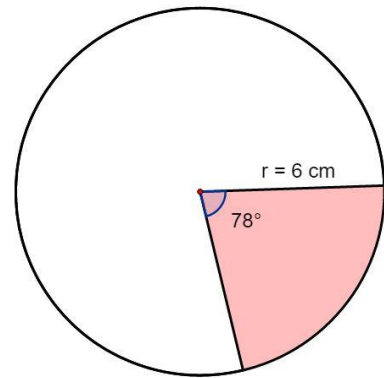
2. Reiknaðu flatarmál og ummál þessa samsíðungs.



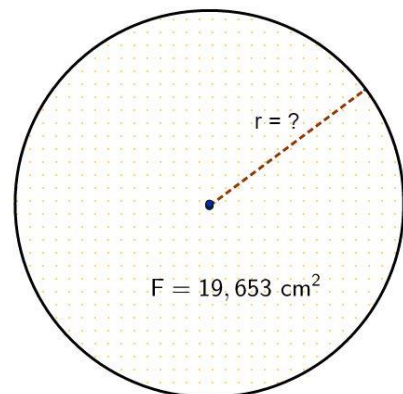
3. Reiknaðu flatarmál og ummál hrings sem hefur radíus 2,6 cm.



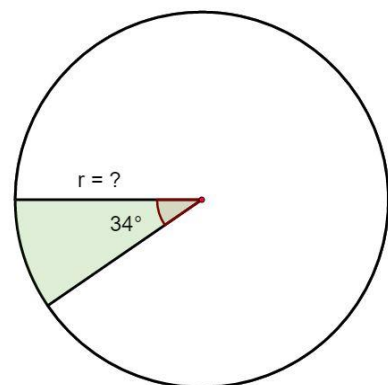
4. Reiknaðu flatarmál og ummál þessa 78° hringgeira með $r = 6$ cm.



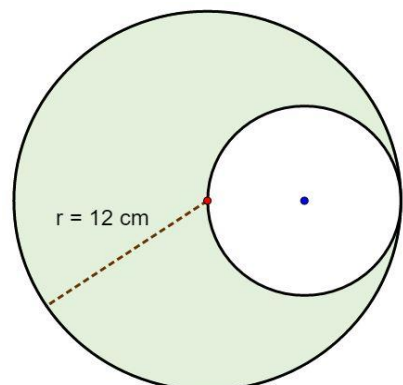
5. Reiknaðu radíus hrings sem hefur flatarmálið $19,635$ cm².



6. Reiknaðu radíus hrings ef flatarmál 34° geira í honum er $13,72$ cm².

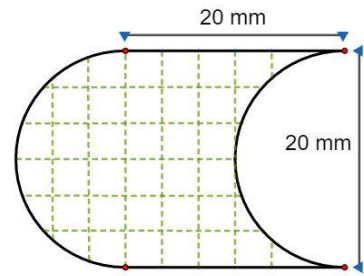


7. Reiknaðu flatarmál og allt ummál skyggða svæðisins ef radíus stóra hringsins er 12 cm.

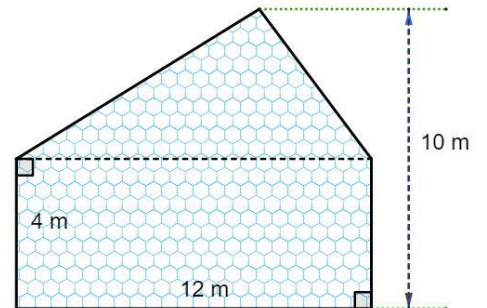


Video 40 Flatarmál samsettra hluta

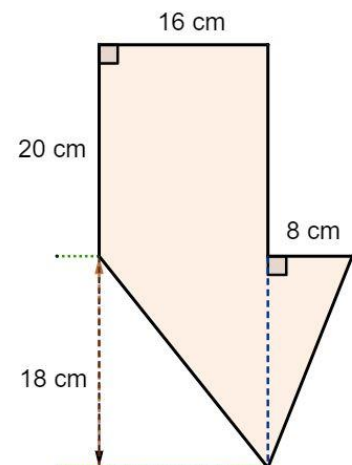
8. Reiknaðu flatarmál og ummál skyggðra svæða á myndinni.



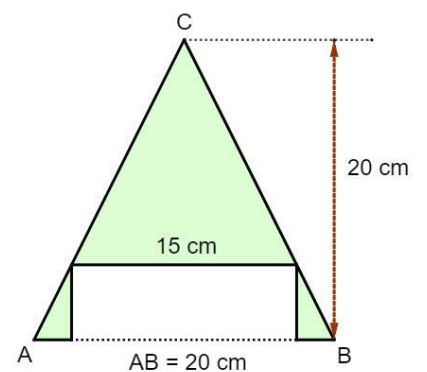
9. Myndin gæti verið af húsi. En til að reikna flatarmál hennar þarf að skipta henni í búta, form sem við getum unnið með. Gerðu það.



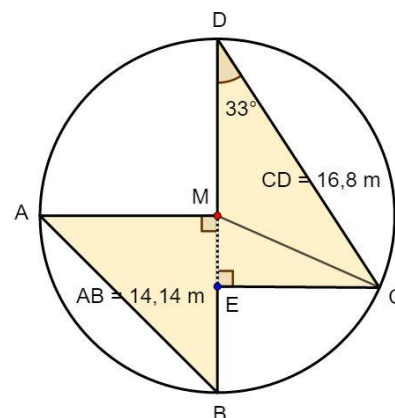
10. Reiknaðu flatarmál myndarinnar.



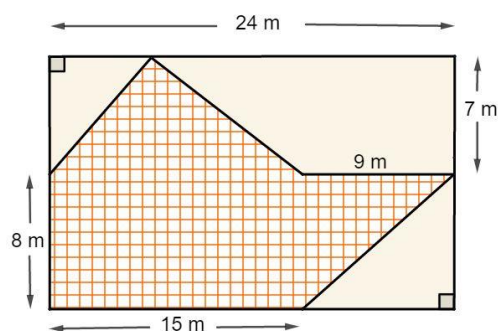
11. Grunnlína og hæð jafnarma þríhyrnings er 20 cm hvort tveggja. Reiknaðu flatarmál og ummál litaða svæðisins.



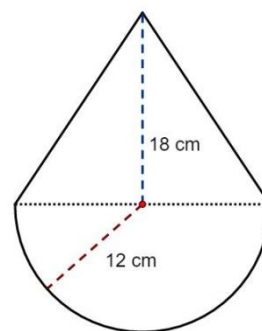
12. Reiknaðu flatarmál og ummál óskyggða svæðisins. (boga og hliðar).
Hve stórir eru bogarnir BC og CD?



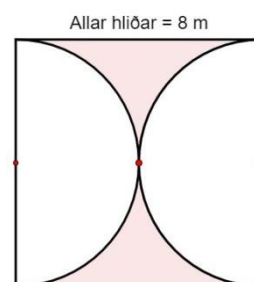
13. Reiknaðu flatarmál mynstraða hluta myndarinnar. Línur netsins eru hornréttar á hliðar rammans.



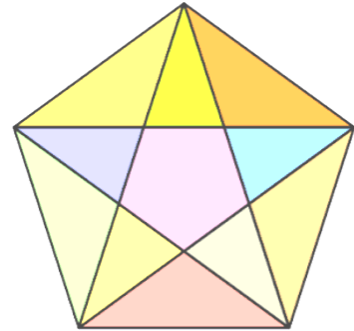
14. Þetta er hálfhringur undir jafnarma þríhyrningi.
Reiknaðu flatarmál og ummál myndarinnar.



15. Reiknaðu flatarmál og ummál skyggða svæðisins í ferningnum.

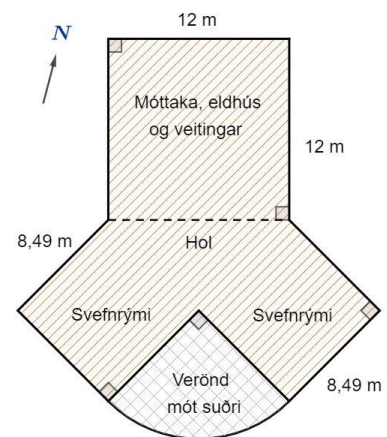


16. Hve marga þríhyrninga er hægt að lesa út úr þessum margbrotna fimmhyrningi?

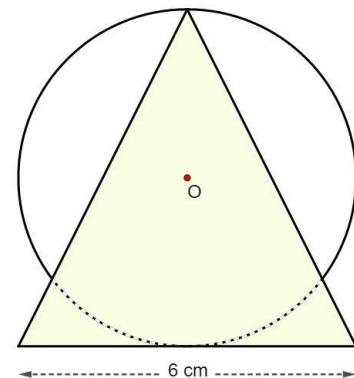


17. Til hliðar er grunnteikning af litlu veiðihúsi sem rísa mun við Nikravað. Grunnform hússins eru ferningar, einn með hliðarlengdir 12 m og tveir með hliðarlengdir 8,49 m.

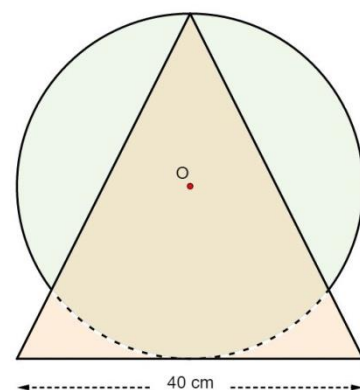
- a) Hvert er flatarmál hússins?
b) Hvert er flatarmál verandarinnar?



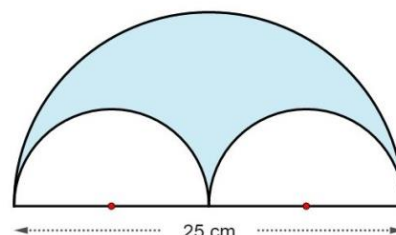
18. Flatarmál þríhyrningsins er 18 cm^2 . Reiknaðu út flatarmál hringsins.



19. Ummál hringsins er 116 cm. Reiknaðu flatarmál þríhyrningsins.

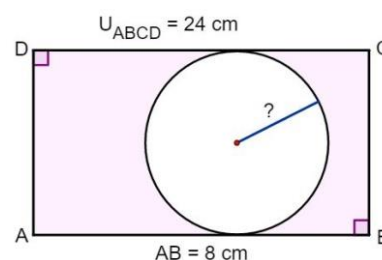


20. Litlu hálfhringirnir tveir eru jafn stórir.
Reiknaðu út flatarmál skyggða
svæðisins.

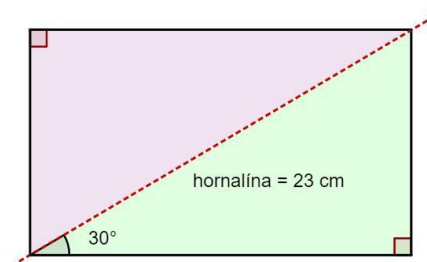


21. Rétthyrningur nokkur er 4 sinnum lengri en hann er breiður.
Flatarmál hans er 100 cm^2 .
Teiknaðu og reiknaðu lengd og breidd rétthyrningsins .
(engin mynd)

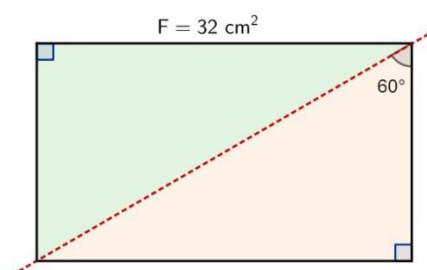
22. Rétthyrningur þessi hefur ummálið 24 cm. Lengd hans er 8 cm. Reiknaðu flatarmál hringins.



23. Reiknaðu flatarmál þessa rétthyrnings
sem er með 23 cm hornalínu og hún
myndar 30° horn við lengri hliðar
hans.

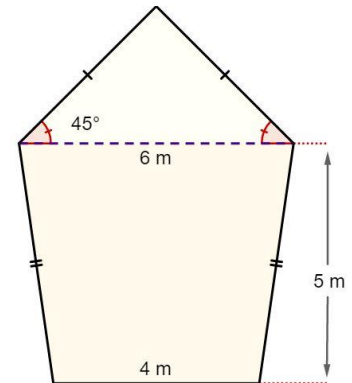


24. Flatarmál þessa rétthyrnings er 32 cm^2 . Hornalína myndar 30° og 60°
horn við hliðarlínur.
Reiknaðu út hliðarlengdir hans.

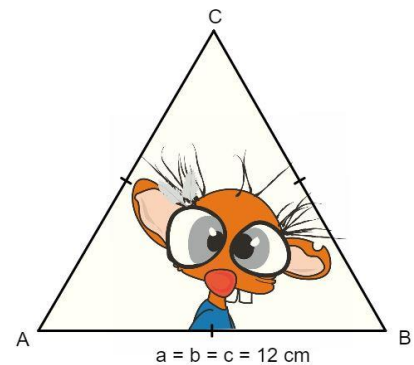


25. Jafnarma þríhyrningur liggur á trapisu. Lengdir eru eins og myndin sýnir. Reiknaðu flatarmál myndarinnar.

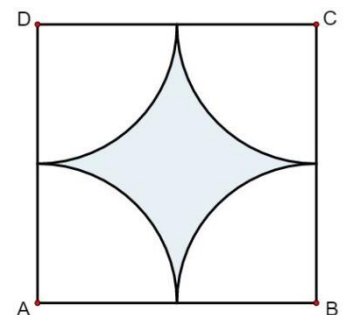
4



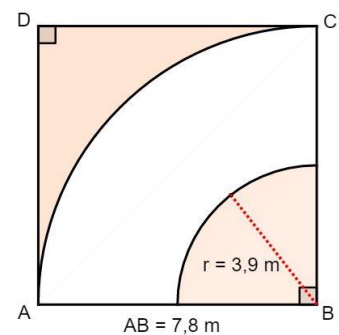
26. Þríhyrningurinn er jafnhliða með hliðarlengdina 12 cm. Reiknaðu flatarmál hans.



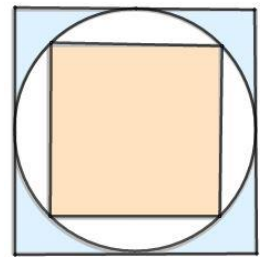
27. Ferningur hefur hliðarlengdina 2 pí.
a) Reiknaðu flatarmál litaða hlutans.
b) Reiknaðu ummál litaða hlutans.



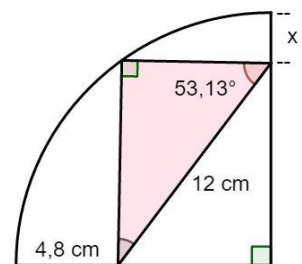
28. Hér til hliðar höfum við saman ferning, með hliðarlengdina 7,8 m, og $1/4$ úr hring. Reiknaðu flatarmál skyggða svæðisins.



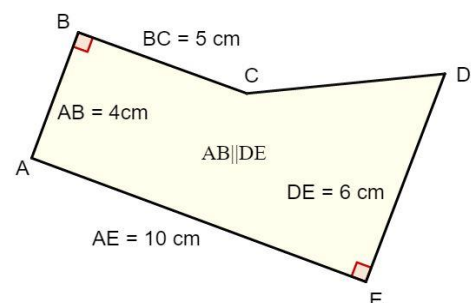
29. Hér höfum við tvo ferninga og hring með þvermálið 10 cm. Reiknaðu út flatarmál hvíta svæðisins.



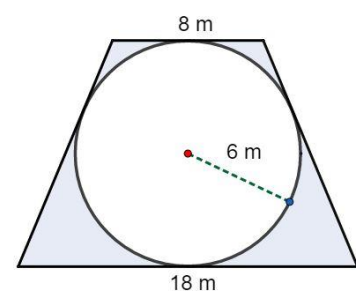
30. Hvað er x á þessari mynd?



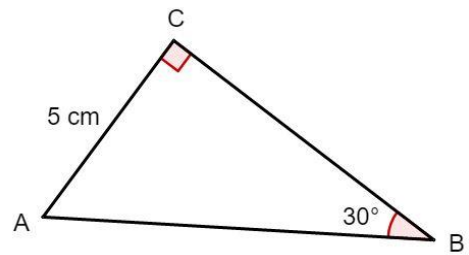
31. Reiknaðu flatarmál og ummál myndarinnar.



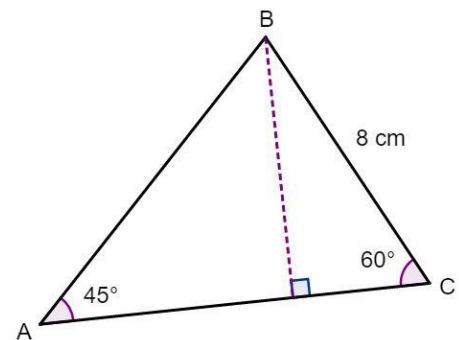
32. Reiknaðu flatarmál skyggða svæðisins í trapisunni ef radíus hringins er 6 m.



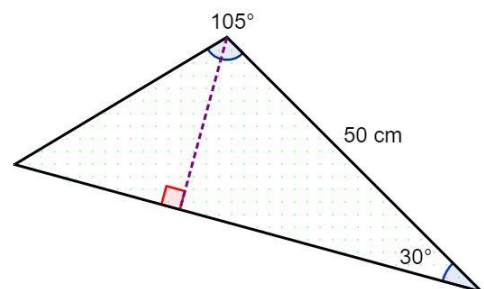
33. Hér er þríhyrningurinn ABC þar sem hornið $B = 30^\circ$
Ákvarðaðu stærð hornsins A og
reiknaðu lengd hliðarinnar
a með þrem aukastöfum.
Hvert er flatarmál þríhyrningsins?



34. Reiknaðu:
a) Stærð hornsins B
b) Lengd hliðarinnar AC
c) Flatarmál þríhyrningsins ABC.



35. Reiknaðu flatarmál þríhyrningsins.



Formúla umrituð

Nokkur dæmi í kaflanum hafa verið þannig að þurft hefur að „umrita jöfnu fyrir óþekktu stærðina“. Það á við um öll dæmis sem eftir eru.

Best er að gera þetta svona:

Teiknaðu myndir og skrifaðu viðeigandi formúlu áður en þú byrjar að reikna. Það er mikilvægt upp á samhengið í úrvinnslunni.

Trúðu mér !

36. Flatarmál rétthyrnings er 68 cm. Lengri hlið hans er 17 cm. Hve löng er styttri hliðin. Teiknaðu mynd.

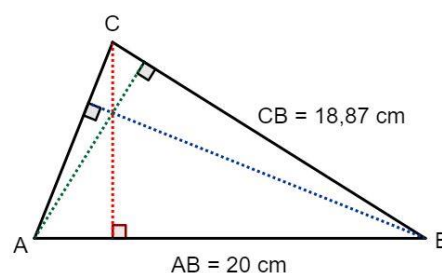
37. Flatarmál fernings er 256 cm². Reiknaðu ummál hans. Teiknaðu mynd.

38. Flatarmál þessa þríhyrnings er 100 cm². Hlið a er 18,87 cm en c er 20 cm.

a) Hver er hæðin á hlið c?

b) Hver er hæðin á hlið a?

c) Hve löng er hliðin b ef $h_b = 18,57$ cm



39. Flatarmál hrings er 154.000 km².

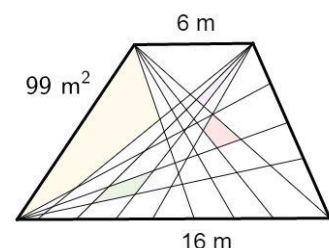
Teiknaðu hann og reiknaðu ummál hans.

40. Hver er hliðarlengd fernings þar sem flatarmál og ummál hefur sama gildi ($F = U$)?



41. Reiknaðu flatarmál og ummál hrings, sem hefur radíusinn π .

42. Flatarmál trapissunnar er 99 m^2 .
Reiknaðu hæð hennar.



43. Ef pizza með 9 tommu þvermál dugar til að metta tvö börn, hve mörg börn ætti þá 18 tommu pizza að metta?
44. Rétthyrningur er 3 sinnum lengri en hann er breiður.
Flatarmál hans er 729 cm^2 .
Teiknaðu mynd af honum og reiknaðu hliðarlengdir hans.
45. Í trapisu einni er hæðin helmingur af lengd styttri grunnhliðar en lengri grunnhlið er tvöföld sú styttri. Flatarmál trapisunnar er 108 cm^2 .
Reiknaðu hliðarlengdir samsíða hliðanna og hæðina.
Teiknaðu mynd.

7. KAFLI, RÚMMÁLSREIKNINGUR



Eftir að hafa unnið í flatarmáli (tvívídd) er einfalt að hoppa upp um eina vídd og skoða rúmmál (þrívídd).

Það gerum við með því að bæta dýptinni við flatarmál myndarinnar, þ.e. margfalda flötinn með 3. víddinni, sem skapar dýpt.

Reikniregla rúmmáls er afar einföld og hún gildir fyrir öll regluleg form. Við segjum einfaldlega að rúmmál sé:

„lengd sinnum breidd sinnum hæð“

Lengd sinnum breidd er flatarmál í tvívídd. Þriðja víddin er þá hæð.

$V = l \cdot b \cdot h$ eða, til einföldunar:

$V = B \cdot h$ þar V stendur fyrir rúmmál („volume“), B er flatarmál botnflatar og h er hæð hlutarins.

Og þar sem víddirnar eru þrjár margfaldast mælieiningin þrisvar með sjálfri sér og er því í þriðja veldi (t.d. cm^3).

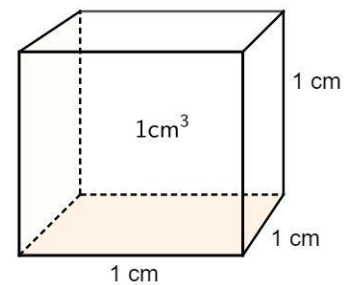


7.1. Ferstrendingur

Ferstrendingur er það sem við köllum „kassi“ í daglegu tali. Ef allar hliðar ferstrendingsins eru jafn stórar kallast hann teningur.

$$V = B \cdot h$$

$$V = (l \cdot b) \cdot h$$



Sýnidæmi

Málin á pappakassi undan fjölrítunarpappír er u.þ.b. 30 x 22 x 26 cm

Reiknaðu rúmmál kassans í cm³.

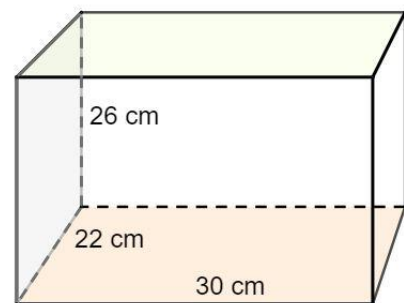
$$V = B \cdot h$$

$$V = l \cdot b \cdot h$$

$$V = 30 \text{ cm} \cdot 22 \text{ cm} \cdot 26 \text{ cm}$$

$$V = 17.160 \text{ cm}^3$$

Rúmlega 17 þúsund rúmsentímetrar.



Til að átta sig á hvor þetta er mikið rými eða lítið er ágætt að hugsa um hve mikið af vatni kæmist í þennan kassa. Þar sem rúmmál (cm³) er í þriðju vídd en lagarmál (ltr.) í fyrstu vídd er þetta svolítið snúið. En við getum notfært okkur þær staðreyndir að:

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml.}$$

„Einn rúm-sentí-metri rúmar einn millílítra.“

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ ltr.}$$

„Einn rúm-desí-metri rúmar einn lítra.“

Skoðaðu töfluna hér á eftir.



Km ³	hm ³	dam ³	m ³	dm ³	cm ³	mm ³
			1000 ltr	1 ltr	1 ml	

Mál kassans er gefð upp í cm, hann rúmar 17.160 cm³ sem við nú vitum að merkir 17.160 ml.

Ef við viljum breyta þessu í lítra getum við deilt með 1000 og fengið út 17,16 ltr. (17,16 dm³).

EN !

Við hefðum einnig getað reiknað vatnsmagnið strax í lítrum með því að gefa mál kassans upp í dm í stað cm því 1 dm³ = 1 ltr.

$$V = B \cdot h$$

$$aV = l \cdot b \cdot h$$

$$V = 3,0 \text{ dm} \cdot 2,2 \text{ dm} \cdot 2,6 \text{ dm}$$

$$V = 17,16 \text{ dm}^3$$

Til samanburðar má nefna að heilarými í höfuðkúpu meðal manns er um 14 dm³ sem jafngildir 14 lítrum.



Video 41
Mælieiningar



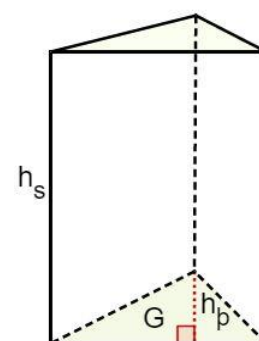
7.2. Þrístrendingur

Formúlan $F = B \cdot h$ gildir um reglulega strendinga eins og áður sagði. Í þrístrendingi er botnflöturinn þríhyrningur. Flatarmál botnflatar (B) er:

$$B = \frac{g \cdot h}{2}$$

Rúmmálsformúla þrístrendings lítur þá svona út:

$$V = \frac{g \cdot h_b}{2} \cdot h_s$$



Sýnidæmi

Botn strendings er rétthyrndur þríhyrningur með grunnlínu 90 cm og hæð 30 cm. Hæð strendingsins er 120 cm.

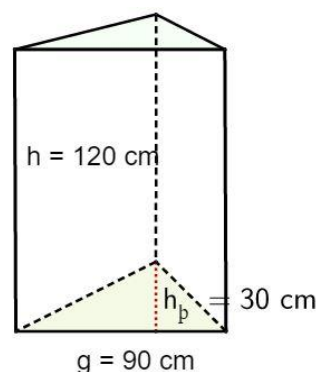
Reiknaðu rúmmál hans í lítrum.

$$V = \frac{g \cdot h_b}{2} \cdot h_s$$

$$V = 1.350 \text{ cm} \cdot 120 \text{ cm}$$

$$V = 162.000 \text{ cm}^3$$

Það jafngildir 162.000 ml.



Í hverjum lítra eru 1000 ml svo þessi strendingur rúma 162 ltr.

Við getum einnig breytt cm í dm og fengið svarið beint í lítrum.

$$V = 13,5 \text{ dm}^2 \cdot 12 \text{ dm}$$

$$V = 162 \text{ cm}^3 \text{ sem jafngildir 162 ltr.}$$

7.4. Sívalningur

Sívalningur er reglulegt form með hringlaga grunnflöt.

Því gildir reglan:

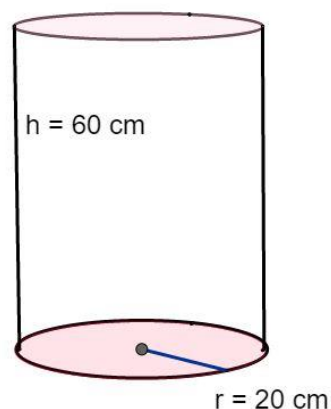
$$V = B \cdot h$$

Botninn er hringlaga svo flatarmál

$$\text{hans er: } B = r^2 \cdot \pi$$

Þá höfum við formúluna:

$$V = (r^2 \cdot \pi) \cdot h$$



Video 42 Rúmmál
- Sívalningur

Sýnidæmi

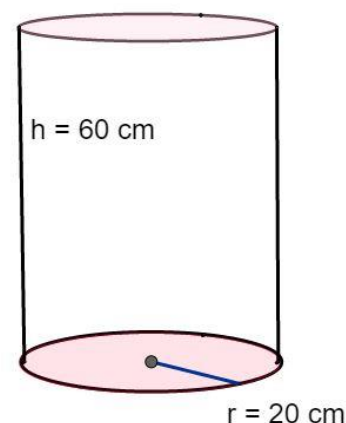
Sívalningur, 60 cm hár hefur radíusinn 20 cm. Reiknaðu út rúmmál hans í lítrum.

Til að reikna rúmmálið út beint í ltr. breytum við málum í dm. Hæðin er þá 6 dm og radíus 2 dm.

$$V = (r^2 \cdot \pi) \cdot h$$

$$V = 22 \cdot \pi \cdot 6$$

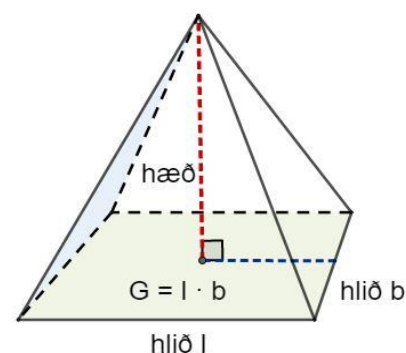
$$V = 75,4 \text{ ltr.}$$

7.5. Pýramídi

Pýramídi er eins botns strendingur þar sem hliðarnar koma saman í toppi. Hann er eiginlega "skertur" strendingur ef svo má segja.

Samanborið við venjulegan strending er rúmmál pýramídans aðeins þriðjungur af rúmmáli strendingss með sama botnflöt.

Formúla fyrir rúmmál pýramída er því:
„flatarmál botnflatar sinnum hæðin frá botni upp í topppunkt, deilt með þrem“.



$$V = \frac{B \cdot h}{3} \quad \text{eða} \quad V = \frac{l \cdot b \cdot h}{3}$$



Video 43 Rúmmál
- Pýramídi

Sýnidæmi

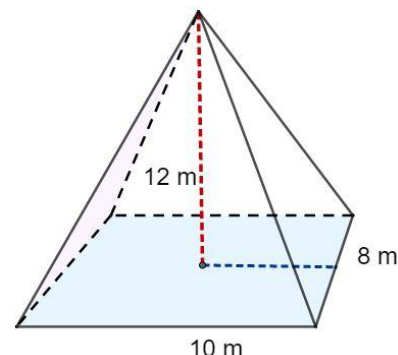
Reiknaðu rúmmál ferstrends pýramída þar sem grunnlínur botnflatar eru 10m og 8 m og hæð hans er 12 m.

Lausn:

$$V = \frac{10 \cdot 8 \cdot 12}{3}$$

$$V = \frac{l \cdot b \cdot h}{3}$$

$$V = 320 \text{ m}^3$$

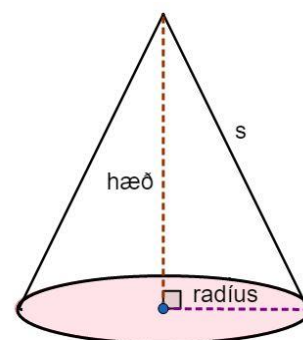
7.6. Keila

Keilan hefur einn hringlaga botn og er því í ætt við sívalning.

Rúmmál keilu er 1/3 af rúmmáli sívalnings með

$$V = \frac{B \cdot h}{3} \quad \text{sams}$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} \quad \text{konar botnflöt.}$$

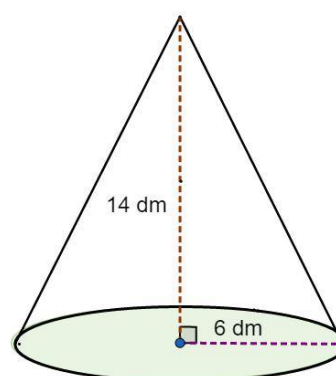


eða

Sýnidæmi

Reiknaðu rúmmál keilu sem hefur radíusinn 6 dm og hæðina 14 dm.

Lausn:



Video 44 Rúmmál
- Keila

$$V = \frac{6^2 \cdot \pi \cdot 14}{3}$$

$$V = \frac{36 \cdot \pi \cdot 14}{3}$$

$$V = 168\pi$$

$$V = 527,79 \text{ dm}^3$$

7.7. Kúla

Formúla fyrir rúmmál kúlu er svona:

$$V = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$$

Takið eftir að radíusinn er í 3. veldi enda er um þrívítt form að ræða.



Sýnidæmi

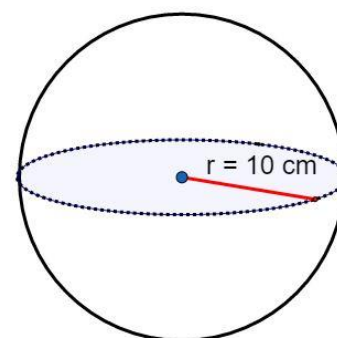
Reiknaðu rúmmál kúlu sem hefur radíusinn 10 cm.

$$V = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$$

$$V = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot \pi}{3}$$

$$V = \frac{4 \cdot 1000 \cdot \pi}{3}$$

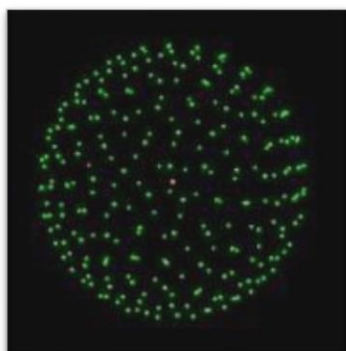
$$V = \frac{4000\pi}{3} = 4.188,8 \text{ cm}^3$$



Video 45 Rúmmál
- Kúla

Pæling.

Segja má um hringinn að hann sé ekkert annað en miðpunktur með óendanlega marga punkta, alla í sömu fjarlægð, umhverfis sig, alla í sama fleti (plani). Hringurinn er jú tvívítt form.



Eins má segja um kúluna að hún sé ekkert annað en miðpunktur með óendanlega marga punkta, alla í sömu fjarlægð frá sér, í allar hugsanlegar áttir. Kúlan er jú þrívítt form.

Er veröldin e.t.v. eins stór kúla með þig sem miðpunkt? Hver veit?

7.8. Yfirborðsflatarmál

Auðvelt er að finna út yfirborð strendinga með því að reikna hverja hlið fyrir sig og leggja stærðir þeirra saman.

Sama er að segja um pýramída; summa botnflatar og allra hliða.

Yfirborð ávalra hluta er aðeins snúnara. Og þó. Við höfum formúlurnar og getum sett inn í þær það sem til þarf.



Yfirborðsflatarmál sívalnings:

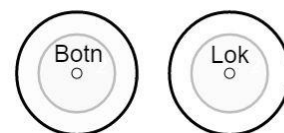
Summa flatarmáls botns, loks og möttuls (sveigði flöturinn).

Botn og lok eru eins (tveir hringlaga fletir) en möttullinn er í raun ferhyrningur ef hann er flattur út þar sem önnur hliðin er ummál hrings og hin hliðin er hæð sívalningsins.

Formúla fyrir yfirborð sívalning er þá:

$Y = 2 \text{ hringir} + \text{möttull}$

$Y = 2(r^2 \cdot \pi) + (p \cdot \pi \cdot h)$



Ummál dósarinnar



Hæð
dósarinnar

Sýnidæmi

ORA baunadósin hefur þvermálið 7,4 cm og hæðina 7,5 cm. Reiknaðu yfirborðsflatarmál hennar

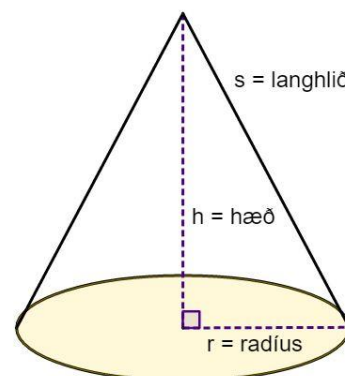
$Y = 2(3,7^2 \cdot \pi) + (7,4 \cdot \pi \cdot 7,5)$

$Y = 86,02 + 174,36 = 260,38 \text{ cm}^3$



Yfirborðsflatarmál keilu.

Til að reikna yfirborðsflatarmál keilu þurfum við að átta okkur á úr hvaða formum hún er mynduð. Botnflötur hennar er venjulegur hringur en möttullinn ("kramarhúsið") er hringur sem geiri hefur verið skorinn úr. Radíus þessa hrings kemur fram sem hlið keilunnar sem er merkt með "s".



Ef við vitum radíus botnflatar og hæð keilunnar má finna s-ið með Pýþagórasarreglunni eða með hornaföllum.

Formúla fyrir yfirborðsflatarmál keilu er þessi:

$$Y = \text{botn} + \text{möttull}$$

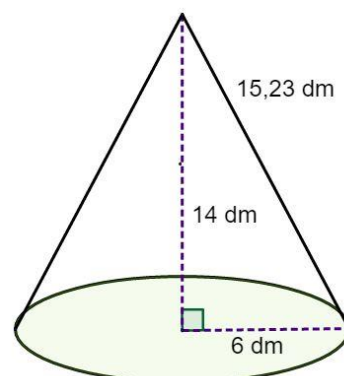
$$Y = (r^2 \cdot \pi) + (\pi \cdot r \cdot s)$$



Sýnidæmi

Reiknaðu yfirborð keilunnar hér til hliðar.

$$Y = (r^2 \cdot \pi) + (\pi \cdot 6 \cdot 15,23) = 113,1 + 287,1 \\ = 400,2 \text{ dm}$$



Yfirborðsflatarmál kúlu.

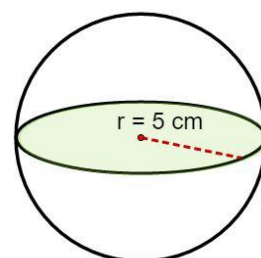
Til að reikna yfirborðsflatarmál kúlu notum við formúluna:

$$Y = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

Sýnidæmi

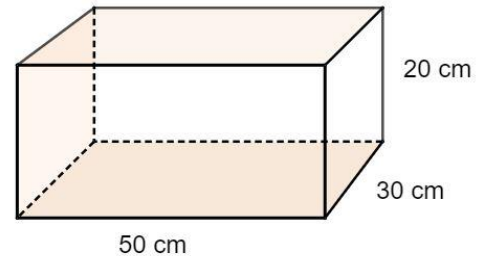
Reiknaðu yfirborð kúlu með radíusinn 5 cm

$$Y = 4 \cdot 5^2 \cdot \pi = 4 \cdot 25 \cdot \pi = 314,16 \text{ cm}^2$$

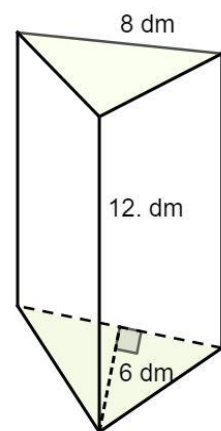


VERKEFNI 7.A.

1. Stálbitinn hér til hliðar hefur málín 50cm x 20cm x 30cm. Reiknaðu rúmmál hans í ml. og yfirborðsflatarmál í cm^2 .



2. Botnflötur þessa strendings er þríhyrningur með grunnlínuna 8 dm og hæðina 6 dm. Hæð strendingsins er 12 dm. Reiknaðu rúmmál hans í lítrum.



3. Málningardósín hér til hliðar er 16 cm há með radíus botnflatar 6,32 cm. Reiknaðu hve marga lítra af málningu dósín rúmar.

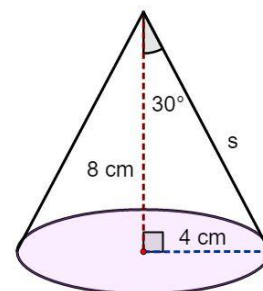


4. Málín á litlu fiskabúri eru 60 x 40 x 13,7 cm. Rissaðu upp mynd af því og reiknaðu rúmmál þess í lítrum.

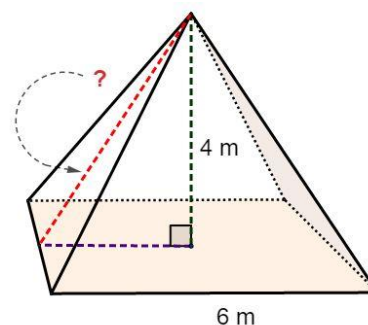
5. Hvert er yfirborðsflatarmál pappakassa sem er teningslaga með allar hliðalengdir 25 cm. Hve marga lítra rúmar hann?



6. Keila hefur áshornið 30° og radíusinn 4 cm og hæðina 8 cm.
Reiknaðu bæði rúmmál og yfirborðsflatarmál keilunnar.

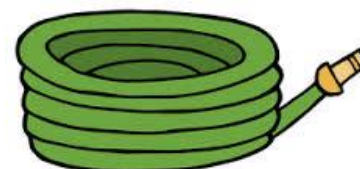


7. Pýramídinn hefur ferningslaga botnflöt, 6 m á kant.
Hæð hans er 4 m.
Reiknaðu rúmmál hans í lítrum og yfirborðið í fermetrum.



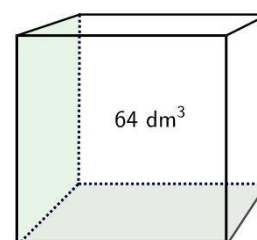
8. Botnflötur annars pýramíd, sem ekki er ferningslaga, hefur hliðarlengdirnar 12 cm og 16 cm. Hæð hans er 18 cm.
Teiknaðu mynd af honum og reiknaðu rúmmál hans í lítrum og yfirborðsflatarmál í fermetrum.

9. Hve mikið vatn er í slöngu sem er 15 m löng og innra þvermál hennar er 2,4 cm?

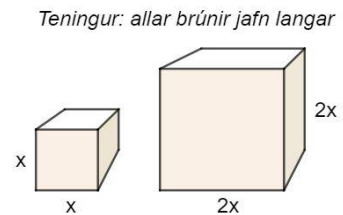


10. Segjum að slangan í dæminu á undan yrði tengd við aðra slöngu sem er með þvermálið 3,2 cm og vatnið fært yfir í hana.
Hvað þyrfti sú slanga að vera löng til að rúma allt vatnið?

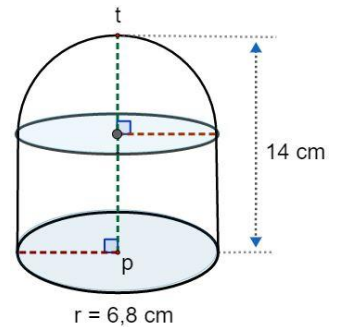
11. Reiknaðu yfirborðsflatarmál tenings sem hefur rúmmálið 64 dm^3 .



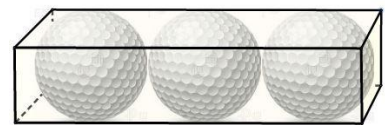
12. Hvað eykst rúmmál tenings margfalt ef þú tvöfaldar allar hliðarlengdir hans?



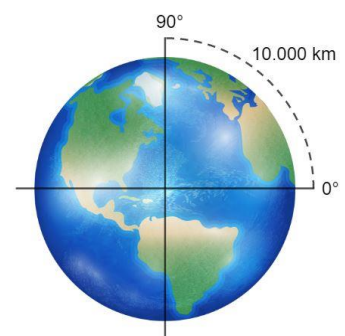
13. Hlutur þessi er úr blýi í laginu eins og hálfkúla sem situr ofan á sívalningi. Radíus hálfkúlunnar og sívalnings er 6,8 cm. Heildar hæð hlutarins er 14 cm. Reiknaðu rúmmál og yfirborðsflatarmál hans.



14. Í pakka af golfkúlum eru yfirleitt 3 kúlur. Þvermál hverrar kúlu er 4,2 cm. Reiknaðu magn lofts í einum pakka ef kúlurnar liggja þétt saman og snerta allar hliðar pakkans.



15. Fjarlægðin frá Norðurpól að miðbaug er 10.000 km. Reiknaðu rúmmál jarðar í km^3 . (Miðum við að jörðin sé regluleg kúla.)



16. Hvert er rúmmál 34°geira úr köku sem er 9 cm þykk og radíus hennar er 12 cm?



17. Kúlan, sem notuð er í kúluvarpi karla, skal vera 11 – 13 cm í þvermál og vega nákvæmlega 7,26 kg.

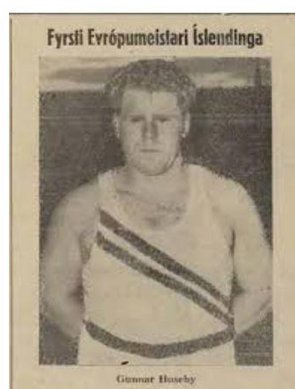
Kúlan á myndinni er gerð úr kopar.

Þvermál hennar er 11,5 cm.

a) Reiknaðu rúmmál hennar í cm^3 og yfirborð í cm^2 .

b) Reiknaðu þyngd hennar í kg ef eðlismassi kopars er 8,92 gr/cm^3 (það merkir að hver cm^3 er 8,92 gr.)

c) Er kúlan lögleg í kúluvarpi karla?



Gunnar Alexander Huseby (1923 – 1995) var mesti kúluvarpari (og kringlukastari) sem Ísland hefur átt. Á Evrópumóti í Osló 1946 sigraði hann með kasti upp á 15,6 m (30 cm lengra en næsti maður).

Á Evrópumeistaramótinu í Brüssel 1950 varði Gunnar titil sinn með glæsibrag, varpaði kúlunni 16,74 metra, sem var nýtt Íslands-, Norðurlanda- og Evrópumet og lengsta kast hans á ferlinum. Sigurkast Gunnars var nær hálfum öðrum metra lengra en kast silfurverðlaunahafans og sagði Gunnar sjálfur á eftir að hann hefði getað staðið fyrir aftan kasthringinn og unnið samt.

(Heimild: Wikipedia)

18. Fótbolti af stærðinni 5 hefur þvermálið ≈ 22 cm.
Hve marga lítra rúmar slíkur bolti?

19. Hvað er ummál bolta nr. 5?

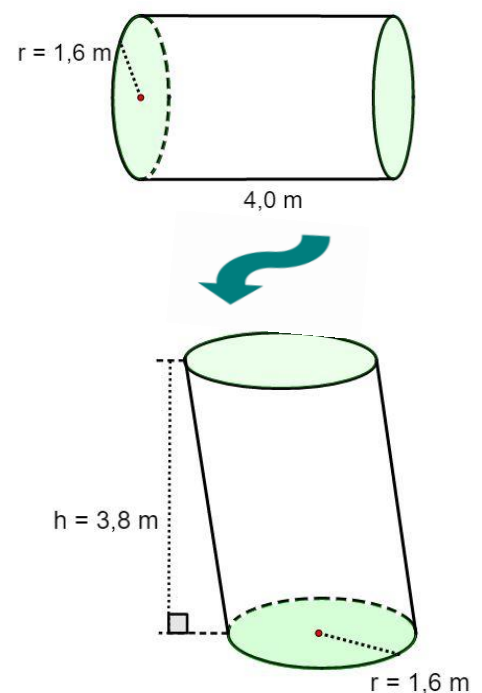
20. Reiknaðu yfirborðsflatarmál bolta af stærðinni 5.



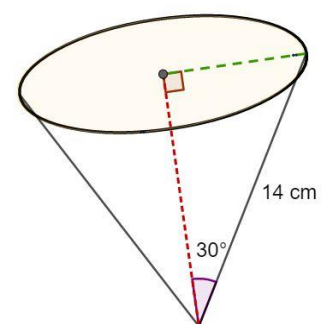
21. Meðal stór olútankur í olíubirgðastöð (t.d. í Örfisey) getur verið um 25 m í þvermál og 13 m hár.
- Hve marga lítra rúmar slíkur tankur?
 - Hve margir lítrar eru í hverjum millimetra hæðarinnar?



22. Tankur þessi, sem lengi hafði legið á hliðinni var reistur við. Við það skekkist hann eins og teikningin sýnir. Þar með lækkaði hæð hans um 20 cm, úr 4,0 m í 3,8 m.
- Um hve marga lítra minnkaði rými hans?
 - Hæðin lækkaði um 5%. Hvað minnkaði rúmmálið um mörg prósent?



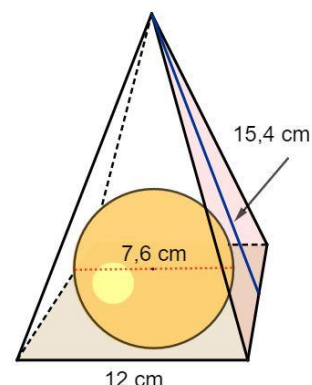
23. Horfðu á myndina af keilunni hér til hliðar. Reyndu að giska á hvað hún rúmar mikið magn af vatni fyllt í topp. Hér eru 4 möguleikar:
- Tæplega hálfan lítra.
 - Rúman einn lítra.
 - U.þ.b. 200 ml.
 - 7,467 dl.
- Reiknaðu svarið áður en þú kíkir í svörin.



24. Hér er pýramídalaga skrautgripur úr gleri en inni í honum er sólín úr skýra gulli.

Grunnflötur pýramídans er ferningur, 12 cm á kant. Hæð pýramídans er óþekkt en hæðin í hverri hlið hans er 15,4 cm. Þvermál sólarinnar er 7,6 cm.

- Hvert er heildar rúmmál alls gripsins (pýramídans með sólinni í)?
- Hvert er rúmmál „sólarinnar“?
- Hvert er rúmmál glersins eingöngu (án gulls)?

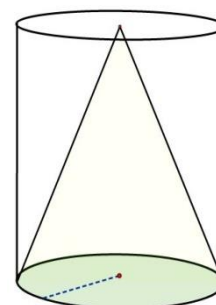


25. Vatnsglas þetta er „kónískt“ með þvermál botns 5 cm, þvermál við efri brún 7 cm og hæð þess er 11 cm. Hvert er rúmmál þess í ml.?



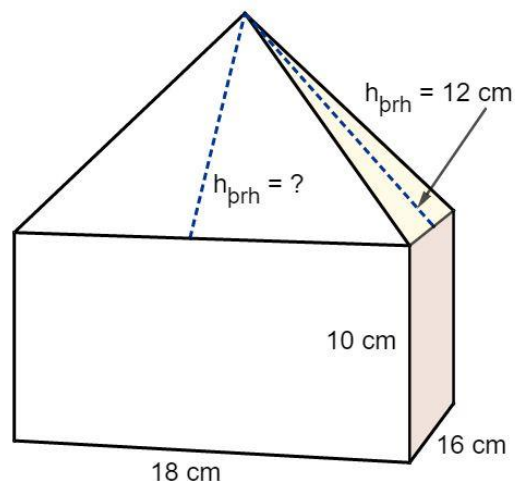
26. Hér er keilulaga holrúm inni í massívum sívalningi.

Keilan og sívalningurinn eru jafn há og þvermál botnflata þeirra er jafnt. Hve mörg prósent er rúmmál keilunnar af rúmmáli alls sívalningsins?

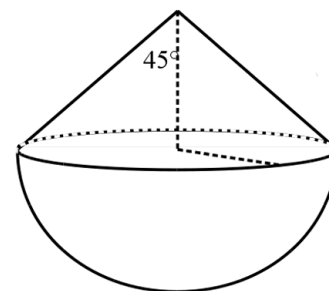


27. Hver er radíus kúlu sem inniheldur 1 lítra af ... einhverju? (Nú ættir þú að skrifa upp formúluna og vinna út frá henni).
28. Hver er hliðarlengd tenings sem inniheldur sama magn af einhverju slímugu ógeði?

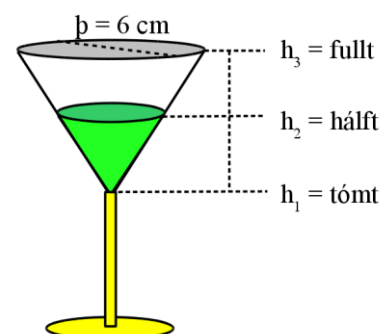
29. Reiknaðu rúmmál og yfirborð hlutarins hér fyrir neðan.
Hlutturinn er gegnheill, samsettur úr pýramída og ferstrendingi.



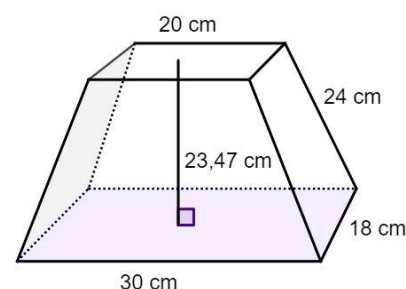
30. Hlutturinn til hægri er keila ofan á hálfkúlu. Áshorn keilunnar er 45° og hæð hennar er 84 cm.
Reiknaðu rúmmál hlutarins í lítrum og yfirborð í fermetrum.



31. Opið á vínglasinu á myndinni hefur þvermálið 6 cm. Það rúmar 237,5 ml, sléttfullt.
Hvað þarf að drekka mikið úr glasinu til að hæð vökvans helmingist í keilunni?

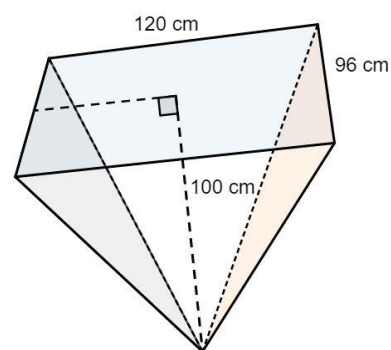


32. Trapisulaga kubbur er með málin eins og myndin sýnir. Reiknaðu rúmmál hans í lítrum og yfirborðið í dm^2 .



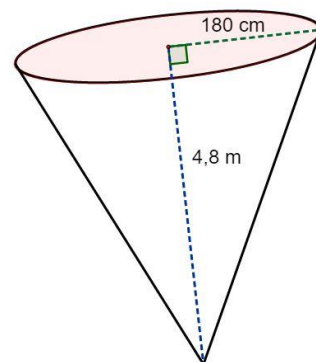
33. Pýramíðinn hér til hliðar er á hvolfi eins og myndin sýnir.

Reiknaðu rúmmál hans í lítrum og yfirborð í ferdesímetrum.



34. Mál keilunnar eru gefnar upp í m og cm.

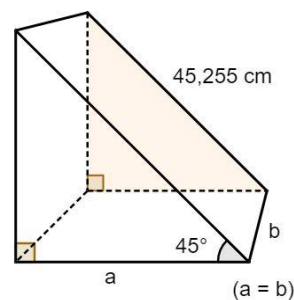
Reiknaðu rúmmál hennar í lítrum og yfirborðið í m^2 .



35. Reiknaðu rúmmál og yfirborðsflatarmál þessa hlutar í cm.

(Þetta dæmi má reikna á marga vegu.

Forvitnaðustu um hvernig félagar þínir leysa það og finnið út hver auðveldasta leiðin er).



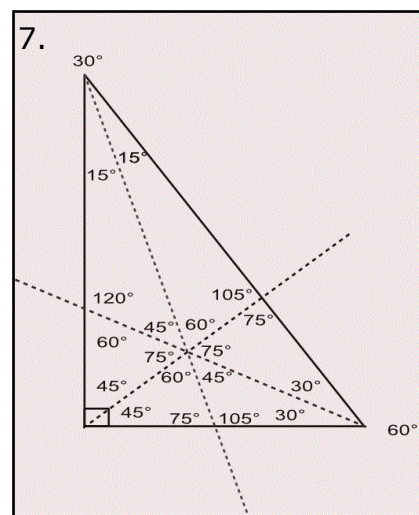
SVÖR OG LAUSNIR

1.A. Verkefni

1. AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.
2. $y = 124^\circ$
3. Oddp. er T
4. 45° og 135°
5. $x = 7^\circ$
 32° og 58°
6. 156°
7. $x = 46^\circ$
 $y = 44^\circ$
 $z = 136^\circ$
8. $x = 100^\circ$
 $v = 45^\circ$
 $q = 80^\circ$
9. $x = 72^\circ$,
 $z = 46^\circ$
10. $x = 140^\circ$
x og y eru grannhorn
 $z = 140^\circ$
x og z eru topph.
x og q eru grannh.
11. Einslæg x eru:
a, c, z.
12. $a = 26^\circ$
 $b = 64^\circ$
 $c = 154^\circ$
13. $x = 27,67^\circ$
 $a = 128,67$
 $b = 51,33^\circ$
14. $x = 42^\circ$
 $y = 48^\circ$
 $z = 42^\circ$
15. a) 40°
b) 64°
c) 114°
d) 154°
15. a) topph.
b) grannh.
c) d) lagsh.
16. $x = y = 60^\circ$
 $z = 30^\circ$
17. $a = 85^\circ$
 $b = 95^\circ$
 $c = 50^\circ$
 $d = 130^\circ$
18. $x = 25^\circ$
 $y = 120^\circ$
19. $x = 45^\circ$
r & s eru samsíða
20. $x = 26^\circ$
Einslæg h.
ekki jafn stór.
21. $x = 22^\circ$
22. $x = 45^\circ$
 $Y = 0^\circ$
23. $z = 53^\circ$

2.A. Verkefni

1. a) Teikn.sleppt.
b) $C = 55^\circ$
2. Allar hliðar jafn langar, öll horn jafn stór, 60° .
3. Hornin við grunnl. = 40° .
Hornas. = 180°
4. Hornið er 60° .
5. a) $B=60^\circ$
 $50^\circ+60^\circ+70^\circ=180^\circ$
b) Teikn. sleppt.
6. Í miðri langhlið.



2.B Verkefni

1. $x = 74^\circ$
2. $y = 30^\circ$

3. $x = 36^\circ$,
 $y = 108^\circ$

4. $r = 140^\circ$,
 $s = 40^\circ$

5. $x = 27^\circ$

6. $r = 56^\circ$
 $s = 57^\circ$
 $t = 70^\circ$
 $u = 53^\circ$

7. $a = 3,072$
 $b = 12,5$

8. $x = 14$
 $y = 4,714$

9. $x = 4,85$
 $y = 3,81$

10. $x = 5,13$
 $y = 9,46$
 $z = 8,00$

11. $x = 3,4$

12. $a = 20,21$
 $b = 15,16$

13. $x = 19,2$

14. $y = 20,093$

15. Hornas. er
 1080°
Hvert horn 135°

16. 13 - hyrningur
Horn $152,31^\circ$

17. 11 - hyrningur.

18. $x = 6,857$
 $y = 10,971$

19. $a = 4$
 $B = 3,375$
 $C = 8$

20. $x = 4,8$
 $y = 6,4$

21. $x = 9,429$
 $y = 6,364$

22. $x = 17,5$
 $y = 25$

2.C. Verkefni

1. a) er rétth.,
b) ekki.

2. 18,682 m

3. 6,32 cm

4. a) $x = 8$ m
b) $x \approx 6$ cm
c) $x = 44,654$ m
d) $x = 5,19$ dm

5. 7,778 m

6. $x = 6$

7. a) $AC = 6,40$
b) $CD = 5,66$

8. 3,606

9. 4,653

10. $x = 33,3$

11. 8,66 cm

12. 13,333 (skammhlið)
19,333 (Langhlið)

13. 4,8 cm

Verkefni 2.D.

1. $x = 30$

2. $A = 56$
 $B = 76^\circ$
 $C = 48^\circ$
 $u = 76^\circ$
 $v = 94^\circ$

3. $x = 11,25$
 $y = 4.2$

4. 1: helml. A, (v_A)
2: miðp.b, (n_b).
3: hæð c, (h_c).
4: miðl b, (m_b).

5. a) $b = 13,42$
b) $m_a = 14,67$
c) $n_a = 6,71$

3.A. Verkefni

1. $b = 7$ cm
 $c = 7\sqrt{2}$ cm
 $= 9,8995$ cm

2. $r = 11\sqrt{3} = 19,053$ m
 $s = 22$ m

3. $x = 2$ cm
 $z = 2\sqrt{2}$
 $= 2,8284$ cm

4. $a = b =$
 $\frac{7}{\sqrt{2}} \approx 4,9497$

5. a) $AB = 13\sqrt{2}$
b) $BC = 26$
c) $AC = (13 + 13\sqrt{3})$
d) $B = 105^\circ$

6. a) $AD = 5\sqrt{3}$
 $\approx 8,6603$
b) $AB = 10$
c) $BC = 5$
d) $B = 150^\circ$

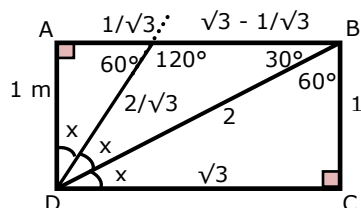
7. a) $h_b = 6$
b) $(6 + 6\sqrt{3})$
c) $\frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

8. a) $a = 10\sqrt{3}$
b) $c = 10\sqrt{6}$
c) $f = 10\sqrt{3} - 10$

9. a) $AB = 40$
 b) $BE = 10$
 c) $CE = 10\sqrt{3}$
 d) $AC = 20\sqrt{3}$

10. a) $BC = 7\sqrt{2}$
 b) $AC = 14$
 c) $AB = 7 + 7\sqrt{3}$

11.



Ath. !

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Sjáðu hvað gerist ef þú margfaldar í gegn um þessa jöfnu með $\sqrt{3}$.

12. $x = 6$
 $y = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

Verkefni 3.B.

1. Svari sleppt.
 2. Svari sleppt.
 3. Í miðri langhlið.

4. $x = 32^\circ$
 $y = 122^\circ$
 $z = 148^\circ$

5. $y = 114^\circ$

6. $x = 112^\circ$

7. $x = 31^\circ$
 $z = 56^\circ$
 $y = 62^\circ$

8. $x = 80^\circ$
 $y = 40^\circ$
 $z = 120^\circ$

9. $x = 146^\circ$

10. $v = 33^\circ$
 $x = 117^\circ$
 $y = 123^\circ$
 $z = 57^\circ$

11. $x = 142^\circ$
 $y = 38^\circ$
 $z = 128^\circ$
 $v = 71^\circ$
 $u = 52^\circ$

12. $v = 10^\circ$
 $y = 45^\circ$
 $x = 135^\circ$
 $z = 25^\circ$

13. $u = 19^\circ$
 $v = 76^\circ$
 $r = 50^\circ$

14. $x = 32^\circ$
 $y = 36^\circ$
 $z = 126^\circ$
 $v = 122^\circ$

15. $x = 25^\circ$
 $z = 112,5^\circ$
 $y = 122,5^\circ$

16. $12,5^\circ$

17. $x = 12,5$
 $y = 6,4$

18. $CD = 3$
 $AC = 3\sqrt{2}$
 $BC = 3\sqrt{3} - 3$

19. $h_a = 25,08$
 $h_c = 47,21$

20. $x = 4,585$
 $y = 10,189$

21. $c = 14,967$
 $h = 12,971$
 $m_c = 27,056$

22. $AB = 17$
 $x = 3,765$
 $y = 4,267$

23. $x = 3$
 $y = 7,8$
 $z = 9,6$

24. a) $t = 24$
 b) $h_s = 14,4$
 c) $F = 216$

25. a) $BC = 45$
 b) $h_c = 23,77$
 c) $m_a = 35,92$
 d) $n_a = 14$

26. $a = b = 5$

27. $a = 5$ $c = 10$

28. $a_1 = 5$
 $a_2 = 10$
 $h_a = 5\sqrt{3}$
 $b = 5\sqrt{6}$

29. $v = 3$
 $x = 3\sqrt{3}$
 $y = 9$
 $z = 6\sqrt{3}$

30. $x = \frac{11}{2} = 5,5$
 $y = \frac{11\sqrt{3}}{2}$
 $v = \frac{11}{2\sqrt{3}}$
 $u = \frac{11}{\sqrt{3}}$

4. A. verkefni

1. $a = 25^\circ$
 $r = 50^\circ$
 $s = 130^\circ$
2. $a = 130^\circ$
 $b = 65^\circ$
3. $a = 28^\circ$
 $b = 56^\circ$
 $c = 28^\circ$
 $d = 124^\circ$
 $r = 56^\circ$
 $s = 124^\circ$
4. $a = 70^\circ$
 $b = 20^\circ$
 $s = 40^\circ$
5. $A = 45^\circ$
 $C = 22,5^\circ$
6. $a = 70^\circ$
 $b = 35^\circ$
 $c = 35^\circ$
 $y = 110^\circ$
7. Öll horn 90°
8. $a = 100^\circ$
 $x = 90^\circ$
 $y = 90^\circ$
 $z = 140^\circ$
9. $x = 60^\circ$
 $y = 30^\circ$
 $z = 30^\circ$
 $v = 45^\circ$
 $u = 45^\circ$
10. $x = 30^\circ$
 $y = 40^\circ$
 $z = 20^\circ$
 $u = 105^\circ$
 $v = 75^\circ$
 $s = 115^\circ$

11. ($a = 16^\circ$)
 $x = 70^\circ$

12. $x = 34^\circ$
 $y = 17^\circ$

13. ($ED = 20^\circ$)
 $x = 110^\circ$
 $y = 97^\circ$
 $z = 73^\circ$

14. $x = 20^\circ$
 $Y = 70^\circ$
 $Z = 100^\circ$

15. $a = 30^\circ$
 $b = 70^\circ$
 $c = 100^\circ$
 $d = 115^\circ$
 $e = 35^\circ$

16. $u = 30^\circ$
 $v = 50^\circ$
 $x = 75^\circ$
 $y = 125^\circ$

17. $x = 90^\circ$
 $y = 50^\circ$
 $z = 70^\circ$
 $a = 90^\circ$
 $c = 100^\circ$
 $b = 125^\circ$

18. $a = 70^\circ$
 $b = 30^\circ$
 $c = 20^\circ$
 $x = 40^\circ$
 $y = 160^\circ$

19. $x = 57^\circ$
 $y = 90^\circ$
 $a = 66^\circ$
 $b = 24^\circ$

20. $a = 90^\circ$
 $b = 90^\circ$
 $c = 60^\circ$
 $x = 45^\circ$
 $y = 45^\circ$
 $z = 30^\circ$

21. $x = 100^\circ$
 $y = 90^\circ$

22. $x = 34^\circ$
 $y = 112^\circ$

23. $a = 40^\circ$
 $x = 50^\circ$
 $y = 50^\circ$
 $z = 30^\circ$

4.B. Verkefni

1. $A = 22^\circ$
2. $B = 36^\circ$
3. $C = 90^\circ$
4. $D = 45^\circ$
5. $z = 161^\circ$
6. $r = 18^\circ$
 $s = 66^\circ$
 $t = 114^\circ$
7. $a = 62^\circ$
 $b = 31^\circ$
 $c = 90^\circ$
8. $x = 70^\circ$
9. $x = 43^\circ$
10. $x = 65^\circ$
 $y = 32,5^\circ$
 $z = 80^\circ$
 $s = 67,5^\circ$
11. $a = 80^\circ$
 $b = 34^\circ$
 $c = 48^\circ$
12. $x = 80^\circ$
 $y = 40^\circ$
 $z = 100^\circ$
 $r = 100^\circ$
 $s = 70^\circ$
 $t = 60^\circ$

5.A. Verkefni

1. $x = 17,8279$
2. $x = 28,1587$
3. $x = 18,8468$
4. $x = 8,4423$
5. $x = 7,8037$
6. $x = 7,0316$
7. $x = 5,0004$
8. $x = 3,0$
9. $x = 1,0$
10. $x = 16,6846$
11. $x = 11,6322$
12. $x = 14^\circ$
 $Y = 34^\circ$
 $Z = 68^\circ$

5.B. Verkefni

1. $A = 66,80^\circ$
 $B = 23,20^\circ$
2. $A = 42,40^\circ$
 $B = 47,60^\circ$
3. $A = 67,66$
 $B = 22,34^\circ$
4. $A = 35,54^\circ$
 $B = 54,46^\circ$
5. $A = 63,43^\circ$
 $B = 26\ 57^\circ$
- 6) 45-45-90 þrh.
- 7) 30-60-90 þrh.

$$\begin{aligned} 8. \quad P &= 63,35^\circ \\ Z &= 26,65^\circ \end{aligned}$$

5.C. Verkefni

1. $a = 15$
2. $d = 16,09$
3. $a = 6,66$
 $b = 2,16$
4. $r = 18,78$
 $s = 35,32$
5. $m = 39,41$
 $n = 16,03$
6. $k = 3,7$
 $p = 16,42$
7. $c = 100,2$
8. $d = 40$
 $e = 22,101$

5.D. Verkefni

1. $x = 56,44^\circ$
 $b = 6,6332$
2. $x = 18,43$
 $c = 12,6524$
3. $x = 50,48^\circ$
 $a = 42,4264$
4. $x = 45^\circ$
 $c = 7\sqrt{2}$
5. $x = 19,654^\circ$
 $c = 14,8659$
6. $x = 29,06^\circ$
 $a = 30,5941$

$$\begin{aligned} 7. \quad x &= 25,09^\circ \\ b &= 8,544 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \quad x &= 146,35^\circ \\ a &= 6,16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \quad \text{Hús: } &7,9878 \text{ m} \\ \text{Stigi: } &8,9334 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \quad h_c &= 7,7135 \\ A &= 58,07^\circ \\ b &= 9,089 \\ n_c &= 5,873 \end{aligned}$$

5.E. Verkefni

$$\begin{aligned} 1. \quad \text{Hornin:} \\ A &= 78^\circ \\ B &= 60^\circ \\ p &= 56,31^\circ \\ x &= 12^\circ \\ y &= 24^\circ \\ z &= 48^\circ \\ \text{Strikin:} \\ AB &= 43,29 \\ AC &= 56 \\ BC &= 63,23 \\ BF &= 42,31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad r &= 60,5^\circ \\ s &= 68,2^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad r &= 53,13^\circ \\ s &= 126,87^\circ \\ x &= 19,2 \\ y &= 14,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad x &= 23,2^\circ \\ y &= 36,87^\circ \\ s &= 15,23 \text{ dm} \\ t &= 8 \text{ dm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad x &= 19,18^\circ \\ y &= 15,64^\circ \\ a &= 9,0 \\ b &= 12,5 \\ c &= 7,0 \end{aligned}$$

6. $x = 40,11^\circ$
 $y = 49,89^\circ$
 $z = 124,79^\circ$
 $a = 3,4$
 $b = 5,2$
 $c = 3,0$
7. Rör er:
 45,387 cm
 Horn:
 $34,95^\circ$ og
 $55,05^\circ$
8. a) $58,24^\circ$
 b) 177,7 cm
9. $b = 11 + 11\sqrt{3}$
 $C = 11\sqrt{2}$
10. $x = 2\frac{2}{3}$ cm
 $y = 3\frac{1}{3}$ cm
10. $F = 536 \text{ cm}^2$
11. $F = 125 \text{ cm}^2$
 $U = 74,72 \text{ cm}$
12. $F = 199,702 \text{ m}^2$
 $U = 128,77 \text{ m}$
 $BC = 66^\circ$
 $CD = 114^\circ$
13. $F = 208,5 \text{ m}^2$
14. $F = 442,195 \text{ cm}^2$
 $U = 80,966 \text{ cm}$
15. $F = 13,734 \text{ m}^2$
 $U = 41,132 \text{ m}$
16. Veit það ekki.
17. a) $F = 324,2 \text{ m}^2$
 b) $F = 56,6 \text{ m}^2$
18. $F = 9\pi \text{ cm}^2$
19. $f = 738,48 \text{ cm}^2$
20. $R = 122,72 \text{ cm}^2$
21. $20 \times 5 \text{ cm}$
22. $4\pi \text{ cm}^2$
23. $229,063 \text{ cm}^2$
24. $4,3 \times 7,4 \text{ cm}$
25. 43 m^2
26. $F = 62,35 \text{ cm}^2$
27. $F = 4\pi^2 - \pi^3$
 $U = 2\pi^2$
28. $R = 25,002 \text{ cm}^2$
29. $F = 71,461 \text{ cm}^2$
30. 2,4 cm
31. $F = 45 \text{ cm}^2$
 $U = 30,39 \text{ cm}$
32. $F = 42,903 \text{ m}^2$
33. $F = 21,65 \text{ cm}^2$
34. a) 75°
 b) $AC = 10,93 \text{ cm}$
 c) $F = 37,86 \text{ cm}^2$
35. $853,765 \text{ cm}^2$
36. 4 cm
37. 64 cm
38. a) 10 cm
 b) 10,6 cm
 c) 10,77 cm
39. 1.391,12 km
40. 4
41. $F = \pi^3$
 $U = 2\pi^2$
42. 9 m
43. 8 börn
44. 15,588 cm og
 46,765 cm
45. $h = 10,392 \text{ cm}$
 $a = 20,784 \text{ cm}$
 $b = 41,568 \text{ cm}$

6. A. Verkefni

1. $F = 64 \text{ cm}^2$
 $U = 40 \text{ cm}$
2. $F = 35 \text{ cm}^2$
 $U = 25,548 \text{ cm}$
3. $F = 21.237 \text{ cm}^2$
 $U = 16,336 \text{ cm}$
4. $F = 24,5 \text{ cm}^2$
 $U = 8,168 \text{ cm}$
5. $r = 2,5 \text{ cm}$
6. $r = 6,8 \text{ cm}$
7. $F = 339,292 \text{ cm}^2$
 $U = 37,699 \text{ cm}$
8. $F = 400 \text{ mm}^2$
 $U = 102,83 \text{ mm}$
9. $F = 84 \text{ m}^2$

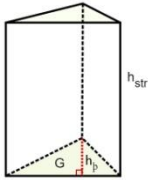
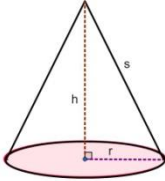
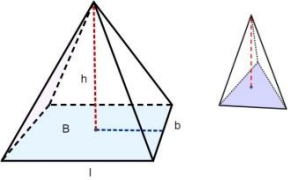
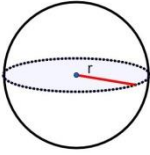
7. A. Verkefni

- | | |
|---|--|
| 1. $V = 30.000 \text{ ml}$
$Y = 6.200 \text{ cm}^2$ | 20. $1520,53 \text{ cm}^2$ |
| 2. $288 \text{ ltr. (dm}^3\text{)}$ | 21.
a) $6.381.360,078 \text{ l.}$
b) $490,87 \text{ ltr}$ |
| 3. $V = 2 \text{ lítrar}$ | 22. a) 1610 ltr.
b) 5% |
| 4. $32,88 \text{ ltr.}$ | 23. $391,78 \text{ ml}$ |
| 5. 3.750 cm^2
$15,625 \text{ ltr}$ | 24. a) $680,54 \text{ cm}^3$
b) $229,85 \text{ cm}^3$
c) $450,69 \text{ cm}^3$ |
| 6. $V = 116,083 \text{ cm}^3$
$Y = 150,796 \text{ cm}^2$ | 25. $1278,63 \text{ ml}$ |
| 7. $V = 48.000 \text{ ltr}$
$Y = 96 \text{ m}^2$ | 26. Þriðjungur |
| 8. $V = 1,152 \text{ ltr}$
$Y = 0,0732 \text{ m}^2$ | 27. $0,62035 \text{ dm}$
$\approx 6,2 \text{ cm}$ |
| 9. $6,7858 \text{ ltr}$ | 28. $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$ |
| 10. $8,44 \text{ m}$ | 29. $V = 364198 \text{ cm}^3$
$Y = 1362,85 \text{ cm}^2$ |
| 11. 96 dm^2 | 30. $V = 1862 \text{ ltr}$
$Y = 7,568 \text{ m}^2$ |
| 12. Áttfaldast | 31. $207,81 \text{ ml}$ |
| 13. $V = 1704,47 \text{ cm}^3$
$Y = 743,421 \text{ cm}^2$ | 32. $V = 9 \text{ ltr}$
$Y = 27,64 \text{ dm}^2$ |
| 14. $105,88 \text{ cm}^3$ | 33. $V = 384 \text{ ltr}$
$Y = 304,105 \text{ dm}^2$ |
| 15. $V =$
$1,0808 \times 10^{12}$ | 34. $V = 3916,79 \text{ ltr}$
$Y = 39,168 \text{ m}^2$ |
| 16. $384,53 \text{ cm}^3$ | 35. $V = 163,84 \text{ cm}^3$
$Y = 4520 \text{ cm}^2$ |
| 17. a) $796,33 \text{ cm}^3$
$415,48 \text{ cm}^2$
b) $7,103 \text{ kg}$
c) Nei. | |
| 18. $V = 5,575 \text{ ltr.}$ | |
| 19. $69,115 \text{ cm}$ | |

Þetta reiknar sig ekki sjálft !!



FORMÚLUBLAÐ - ÞRÍVÍÐ FORM

	FERSTRENDINGUR Rúmmál: $V = l \cdot b \cdot h$ Yfirborð: $Y = \text{summa flatarmála allra hliðanna sex.}$ $Y = 2(l \cdot b) + 2(l \cdot h) + 2(b \cdot h)$
	ÞRÍSTRENDINGU Rúmmál: $V = \frac{G \cdot h_b}{2} \cdot h_{str}$ Yfirborð: $Y = \text{summa flatarmála allra hliðanna fimm.}$
	SÍVALNINGUR (dós) Rúmmál: $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$ Yfirborð: $Y = \text{botn} + \text{lok} + \text{möttull}$ $Y = 2(r^2 \cdot \pi) + p \cdot \pi \cdot h$
	KEILA (kramarhús) Rúmmál: $V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$ Yfirborð: $Y = \text{botn} + \text{möttull.}$ $Y = (r^2 \cdot \pi) + (r \cdot \pi \cdot s)$
	PÝRAMÍDI Rúmmál: $V = \frac{B \cdot h}{3}$ Yfirborð: $Y = \text{summa botnflatar og allra hliða.}$
	KÚLA Rúmmál: $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$ Yfirborð: $Y = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
METRAKERFIÐ	km - hm - dam - METRI - dm - cm - mm
LENGDARMÁL	1 km = 1000 m 1m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm
LAGARMÁL	1 ltr = 10 dl = 100 cl = 1000 ml
FLATARMÁL	1 m² = 100 dm² = 10.000 cm²
RÚMMÁL/LAGARMÁL	1 m³ = 1000 ltr 1 dm³ = 1 ltr 1 cm³ = 1 ml

