

Nokkur minnisatriði um formúlur og aðferðir.

Bókstafareikningur:

Liðun þýðir að margfalda upp úr svigum, þáttun er að búa til margföldun með svigum (sviga).

Liðun er framkvæmd með því að margfalda upp úr svigum eða nota reglu 3.6 (bls. 53):

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1. \text{regla}) \quad \text{Ferningsregla fyrir summu}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2. \text{regla}) \quad \text{Ferningsregla fyrir mismun}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad (3. \text{regla}) \quad \text{Samokareglan}$$

Aðferðir til þáttunar eru:

- Taka út fyrir sviga
- Ágiskunaraðferðin $x^2 + bx + c = (x+r)(x+s)$ þar sem $rs = c$ og $r+s = b$
- Regla 3.6 (sýnidæmi 3.6 – 3.9).
- Þáttun með flokkun (sýnidæmi 3.14 og 3.15).
- Þáttun með hjálp D-reglu (gildir bara um 2.stigs margliður).
- Þáttun með því að finna núllstöðvar (sjá kafla 6.1D bls. 108).

Brotareikningur:

Brot má stytta þar sem eingöngu margföldun er á milli þátta. Því þarf að þátta fyrst, stytta svo.

Samlagning brota fer fram eftir 7 þrepa aðferðinni:

- Þátta nefnarana
- Finna samnefnarann
- Lengja brotin og setja upp á brotastrík (hér má ekki stytta)
- Margfalda upp úr svigum í teljara
- Einfalda teljarann
- Þátta teljarann ef hægt er
- Stytta (hér má það loksins)

Jöfnur

Jafna þýðir jafnvægi: Það sem gert er vinstra megin við jafnaðarmerkið þarf líka að gera hægra megin við það.

Vinnulag við jöfnur:

1. stigs jafna er leyst með því að safna öllum x öðru megin við jafnaðarmerkið og öllum tölum hinum megin við það.

2. stigs jafna er leyst með hjálp D-reglu:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad \text{2. stigs jafna} \quad \text{Túlkun á D}$$

$$D = B^2 - 4AC$$

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A} \quad \text{Fyrst er D reiknað...}$$

... og svo gildin á x .

$$D > 0 \quad \text{Tvær lausnir}$$

$$D = 0 \quad \text{Ein lausn}$$

$$D < 0 \quad \text{Engin lausn}$$

3. stigs jafna er leyst með

- þáttun
- finna heiltölunúllstöð og samsvarandi þátt og svo margliðudeilingu

Algildisjöfnur eru leystar með því að

- hefja upp í annað veldi, einfalda og leysa með D-reglu: $|x - a| = b$ verður $(x - a)^2 = b^2$ eða
- skipta upp í tvær jöfnur: $|x - a| = b$ verður $x - a = b$ (I) og $x - a = -b$ (II)

Línulegar (1. stigs) **ójöfnur** eru leystar með eins og venjulegar jöfnur.

Þegar deilt eða margfaldað er með mínustölu snýst ójöfnumerkið við.

Veldi og rætur:

Veldareglurnar eru fimm: Aðgerðaröð í veldareikningi:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ 1) Laga til grunntölur
- $a^n : a^m = a^{n-m}$ 2) Breyta deilingu í margföldun og breyta formerkinu á veldinu á stærðinni sem deilt er með
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ 3) Fella niður sviga (með veldareglu 3 og/eða 5).
- $a^n : b^n = (a : b)^n$ 4) Sameina grunntölur og leggja saman veldin (veldaregla 1)
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Athugaðu að $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^0 = 1$

Rótarreglur eru tvær:

- $\sqrt[q]{a \cdot b} = \sqrt[q]{a} \cdot \sqrt[q]{b}$
- $\sqrt[q]{a : b} = \sqrt[q]{a} : \sqrt[q]{b}$

Rót má breyta í brotið veldi og nota svo veldareglur til að reikna:

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{p/q}$$

Athugaðu einnig að $\sqrt{a} = a^{1/2}$

Rótardæmi eru tvenns konar:

- Margföldun og deiling. Þá er rötunum breytt í brotin veldi og veldareglur notaðar til að reikna út. Athugaðu að breyta þarf brotna veldinu aftur í rót í lokin.
- Samlagning og frádráttur. Tölum undir rót eru þáttaðar (breytt í “góðar” og “slæmar” tölur) og rótarreglur 1 og 2 notaðar til að einfalda þær.

Margliður

Staðalform margliðu er þegar margliðan er rituð með lækkanði veldum og öll veldi koma fyrir.

$$x^4 - 2x^2 - x = x^4 + 0x^3 - 2x^2 - x + 0$$

Stig margliðu er hæsta veldi hennar.

Stuðlar margliðu eru tölurnar sem standa með breytunni (x) þegar margliðan er á staðalformi.

$$x^4 - 2x^2 - x = x^4 + 0x^3 - 2x^2 - x + 0$$

Stuðlar 1, 0, -2, -1, 0

Allar reikniáðgerðir (samlagning, frádráttur, margföldun og deiling) er hægt að gera á margliðum.

Núllstöðvar margliðu eru þær **tölur** sem settar inn fyrir x gefa útkomuna 0 þ.e.a.s. $P(x_0) = 0$.

Þær eru fundnar með því að

- leysa margliðuna sem jöfnu þ.e.a.s. $P(x) = 0$.
- þátta margliðuna
- finna heiltölunúllstöðvar margliðunnar með prófun

Margliður eru þáttaðar með aðferðunum hér að ofan **eða** með því að nota núllstöðvar.

Dæmi: Núllstöðvar margliðu eru 2, -3 og 1.

$$\text{Þá er margliðan þáttað } (x - 2)(x + 3)(x - 1) = x^3 - 7x + 6$$

Formerki margliða (formerkjadreifing) eru fundin með því að

- þátta margliðuna
- kanna formerki hvers þáttar með hjálp talnalínunnar
- draga alla þættina saman

Gröf margliða

Fyrst þarf að búa til hnitstöflu (gildastöflu) áður en graf er teiknað.

1. stigs margliða er bein lína $y = hx + b$

Hallatala beinnar línu:

Punkthallajafna:

Skurðhallajafna:

Almenn jafna:

$$h = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = h(x - x_1)$$

$$y = hx + b$$

$$ax + by + c = 0$$

2. stigs margliða er fleygbogi $y = Ax^2 + Bx + C$

Toppunktur er lægsti (eða hæsti) punktur á fleygboga. **Samhverfuás** er lóðrétt lína sem gengur í gegnum topppunktinn og skiptir honum í tvo jafna helminga.

a) Samhverfuás $x = \frac{-B}{2A}$ b) Hnit topppunkts $\left(\frac{-B}{2A}, \frac{-D}{4A} \right)$

c) Skurðpunktur við $y - \text{ás}$: $x = 0, y = C$ Hnit $(0, C)$
 $0 = Ax^2 + Bx + C$

d) Skurðpunktur við $y - \text{ás}$: $y = 0$,
(D-reglan notuð til að reikna x)
 $D = B^2 - 4AC$
 $x = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$

Fleygboginn sker $x - \text{ás}$

- a) tvisvar ef $D > 0$,
- b) einu sinni ef $D = 0$ en
- c) aldrei ef $D < 0$.

Fleygboginn opnast upp ef $A > 0$, en niður ef $A < 0$.

Skurðpunktir tveggja grafa finnast með jöfnunni $y_1 = y_2$

Mengjareikningur

Mengi er safn hluta (talna) sem kallast **stök** þess

Talnamengi:

Mengi:	Tákn:	Einfölduð lýsing:
Rauntölur	R	Tugabrot (alla tölur)
Ræðar tölur	Q	Almenn brot
Heilar tölur	Z	
Náttúrulegar tölur	N	Heilar jákvæðar tölur

Grunnmengi (táknað með U) er heildarsafn mengja sem öll önnur mengi eru **hlutmengi** í.

Tómamengi \emptyset er mengi sem inniheldur ekkert stak.

Mengjatákn:	Tákn:	Mengjaáðgerðir:	Tákn:	Lýsing
Er stak í	\in	Sammengi	\cup	Öll stök í báðum mengjum
Er ekki stak í	\notin	Sniðmengi	\cap	Sameiginleg stök í báðum mengjum
Er hlutmengi í	\subseteq	Mismengi	\setminus	Öll stök í fyrra menginu sem eru ekki einnig í því seinna.
Er ekki hlutmengi í	$\not\subseteq$			
Þannig að		Fyllimengi	\bar{A}	Öll stök í U sem eru utan við A

Slaufusvigar eru oft notaðir til að tákna mengi: $\{x \in \mathfrak{R} \mid x < -3\}$

Föll og ferlar

Fall er samband milli tveggja breytistærða, x og y, þannig að fyrir hvert gildi sem valið er fyrir x reiknast eitt gildi á y.

Mengi leyfilegra gilda á x kallast **skilgreiningarmengi** (táknað D eða D_f)

Mengi reiknaðra gilda á y kallast **myndmengi** (táknað V eða V_f)

Skilgreiningarmengi fundið:

Fall:	Dæmi:	Hvernig fundið?	Skilgreiningarmengi:
1. Margliður	$f(x) = x^2 - 4x$		$D = \mathfrak{R}$
2. Ræð föll (brot)	$f(x) = \frac{3-x}{x-2}$	Nefnari $\neq 0$	$D = \{x \in \mathfrak{R} \mid x \neq 2\} = \mathfrak{R} \setminus \{2\}$
3. Kvaðratrótarföll	$f(x) = \sqrt{x+2}$	Undir rót ≥ 0	$D = \{x \in \mathfrak{R} \mid x \geq -2\}$

Myndmengi fundið:

Fall:	Dæmi:	Hvernig fundið?	Skilgreiningarmengi:
1. Margliður	1. stigs margliða		$V = \mathfrak{R}$
	2. stigs margliða opnast upp opnast niður		$V = \{y \in \mathfrak{R} \mid x \geq -D/4A\}$ $V = \{y \in \mathfrak{R} \mid x \leq -D/4A\}$
	3. stigs margliða		$V = \mathfrak{R}$
2. Ræð föll (brot)	$y = \frac{3-x}{x-2}$	a) Fallið leyst fyrir x $y = \frac{3-x}{x-2}$ verður $x = \frac{2y+3}{y+1}$	
		b) Nefnari $\neq 0$	$V = \{y \in \mathfrak{R} \mid y \neq -1\}$
3. Kvaðratrótarföll	$f(x) = \sqrt{x+a} + b$	a) Minnsta (eða stærsta) gildi á x fundið, hér er $x_0 = -a$ b) samsvarandi gildi reiknað fyrir y, hér er $y_0 = b$	$V = \{y \in \mathfrak{R} \mid y \geq b\}$

Ferill falls er graf þess. Fyrst þarf að búa til hnitatöflu (gildatöflu) áður en hann er teiknaður.