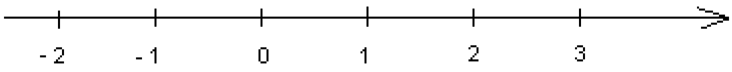
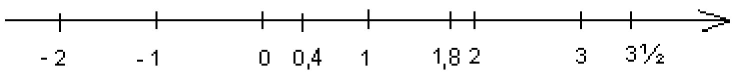
1. kafli Nokkur algeng talnamengi

N = $\{1,2,3,4,...\}$ er mengi náttúrlegra talna. Náttúrlegu tölurnar skiptast í frumtölur og samsettar tölur að tölunni 1 undanskilinni sem er hvorki frumtala né samsett tala. Frumtölurnar eru þær tölur sem bara 1 og talan sjálf gengur upp í. Tíu fyrstu frumtölurnar eru $\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$. Ef tala er hins vegar samsett þá er hægt að finna a.m.k. þrjár tölur sem ganga upp í henni. T.d. ganga 1, 2, 3 og 6 upp í tölunni 6 sem er samsett tala.
Z = $\{... -3\ ,\ -2\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,...\}$ er mengi heilla talna. Hægt er að gera sér mynd af tölunum með því að merkja þær inn á talnalínu.
Talan 0 er merkt einhvers staðar á línuna og talan 1 hægra megin við 0. Þá er búið að ákvarða hver lengdareiningin er. Aðrar tölur er síðan hægt að merkja inn í stækkandi röð frá vinstri til hægri sem er stefna talnalínunnar.



Q er mengi ræðra talna en ræðar tölur eru allar þær tölur sem hægt er að rita sem almenn brot. Hér eru nokkur dæmi um ræðar tölur: $\frac{9}{17}$, $\frac{-42}{7}$, $\frac{19}{1}$, $\frac{9842}{-571}$. Allar heilu tölurnar eru ræðar tölur því hægt er að rita þær sem brot.
Til dæmis er $9 = \frac{36}{4}$ og $-12 = \frac{-36}{3}$. Öll endanleg tugabrot eru líka ræðar tölur. Til dæmis er $2{,}3 = \frac{23}{10}$ og $-5{,}283 = \frac{-5283}{1000}$.
Þegar almennu broti eru breytt í tugabrot (með því að deila nefnaranum upp í teljarann) fæst annað hvort út endanlegt tugabrot eða óendanlegt tugabrot sem kallast lotubundið tugabrot. T.d. er $\frac{1}{4} = 0{,}25$ en $\frac{1}{3} = 0{,}333...$ og $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857...$
Sagt er að tugabrotið 0,333... séu lotubundið með lotuna 3 og tugabrotið 0,142857142857... sé lotubundið með lotuna 142857. Til að tákna að tugabrot sé endalaust og lotubundið er notað strik yfir lotuna þ.e. 0,333... er ritað $0{,}\overline{3}$ og 0,142857142857...er ritað $0{,}\overline{142857}$
Á milli heilu talnanna eru óendanlega margar ræðar tölur og virðist lítið pláss fyrir fleiri tölur.



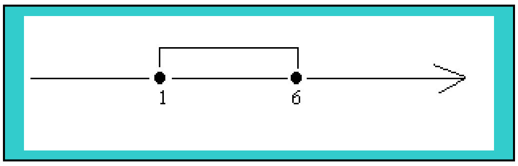
Sú er þó ekki raunin því að ræðu tölurnar eru aðeins lítill hluti allra talnanna á talnalínunni. Flestar tölurnar á talnalínunni eru óræðar. Í þeim flokki eru tölur eins og $\sqrt{2}, \sqrt{3}$,π , 2π,... Séu þær ritaðar sem tugabrot eru þær óendanlega löng tugabrot sem eru ekki lotubundin. Óræðu tölurnar fylla upp það pláss sem eftir er á talnalínunni. Ræðu og óræðu tölurnar til samans kallast rauntölur og eru táknaðar með R.
R = mengi rauntalna = mengi ræðra og óræðra talna (öll tugabrot endanleg og óendanleg.)
Í daglegu lífi notum við bara ræðar tölur.
Um þessi talnamengi gildir að $N \subset Z \subset Q \subset R$.

2. kafli Talnabil

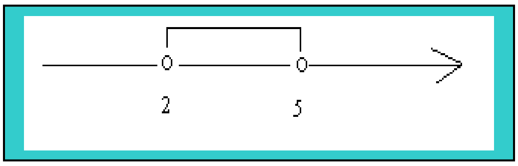
Talnabil eru algeng talnamengi. Talnabil (bil) er mengi allra talna milli tveggja talna á talnalínunni ásamt eða án endatalnanna. Bil er lokað ef endatölurnar eru með í bilinu, en bil er opið ef endatölurnar eru ekki með í bilinu. Bil er hálfopið ef önnur endatalan er með í bilinu en ekki hin. Bil getur líka verið endalaust í annan endann.
Ef bil er lokað er það gefið til kynna með því að nota hornklofa sem snýr að endatölunum. $[1,6]$ er semsagt mengi talnanna frá og með 1 til og með 6. Ef bil er opið eru hornklofarnir látnir snúa út. $]1\,,\,6[$ er semsagt mengi talnanna frá 1 til 6 en hvorki 1 né 6 er í bilinu.Við getum líka sýnt þessi bil á talnalínu. Við notum auðan hring ef bil er opið en dökkan hring ef það er lokað.

Dæmi. Sýndu bilin i) $[1,6]$, ii) $]2\,,5[$ og iii) $[-2,3[$ á talnalínu.

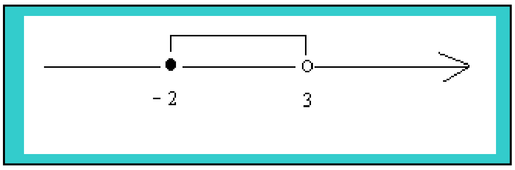
Lausn: i)



ii)

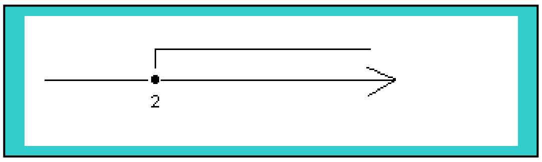


iii)



Í dæmunum hér á undan voru öll bilin endanleg það er að segja billengdin var endanleg. Hins vegar eru óendanlega margar tölur í hverju talnabili því í bilinu eru ekki bara heilar tölur heldur öll brot á milli talnanna og þau eru mörg. Talnabil geta líka verið óendanleg. Ekki er til nein óendanlega stór tala svo táknið ∞(lesið óendanlegt) er notað til að gefa til kynna að bilið haldi áfram endalaust. Þannig er bilið $[2\,,\,\infty[$ mengi allra talna sem eru stærri eða sama sem 2. Athugaðu að táknið ∞ er ekki tákn fyrir tölu.

Svona lítur bilið $[2\,,\,\infty[$ út á talnalínu:

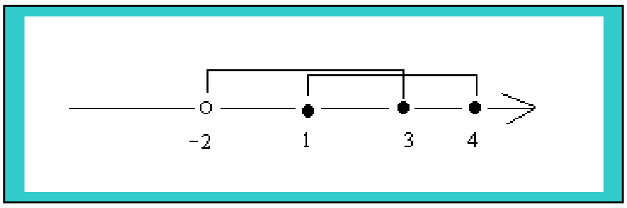


Það er einnig hægt að nota mengjaframsetningu til að rita talnabil. Bilið $[1,6]$ er hægt að rita $\{x \in R \,|\, 1 \leq x \leq 6\}$ (lesið x er rauntala og $1 \leq x \leq 6$), $]2\,,5[\; = \{x \in R \,|\, 2 < x < 5\}$ og $[2\,,\,\infty[\; = \{x \in R \,|\, x \geq 2\}$.

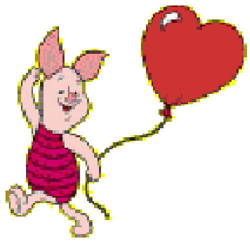
Þar sem bilin eru mengi er hægt að finna sniðmengi, sammengi, mismengi og fyllimengi þeirra. Niðurstöðurnar eru þá líka bil, sammengi bila eða tómamengi. Það getur verið þægilegt að leysa slík dæmi með því að merkja bilin inn á eina talnalínu og liggur þá svarið oftast ljóst fyrir.

Dæmi. $A = [1,4]$ og $B =]-2,3]$. Finndu $A \cap B$, $A \cup B$, A' og $A \setminus B$

Lausn: Merkjum bilin A og B inn á talnalínu.



Nú sést að mengi þeirra talna sem eru bæði í A og B, þ.e. $A \cap B$ er bilið $[1,3]$.
Bilin A og B til samans, það er $A \cup B =]-2,4]$.
Stökin sem eru ekki í A eru í tveimur talnabilum: $A' =]-\infty,1[\cup]4,\infty[$
og $A \setminus B =]3,4]$ er mengi talna sem eru í A en ekki B.



Skyldi þessi Talnalína
vera skyld Línu langsokki?

3. kafli Fyrsta stigs ójöfnur

Ójöfnur af fyrsta stigi má leysa á sama hátt og fyrsta stigs jöfnur, með því að einangra x-ið. Öll skref nema eitt eru eins: Ef ójafna er margfölduð með mínustölu eða ef deilt er í báðar hliðar hennar með mínustölu snýst ójöfnumerkið við.

Hér er skýringin á snúningi ójöfnumerkisins:
Ef b > a þá er talan b – a > 0 þ.e. b – a er plústala. Þá er talan – b + a (sem er gagnstæða talan) mínustala m.ö.o. – b + a < 0 en þá er – b < – a og hér sést að ójöfnumerkið hefur snúist við. Þar sem líta má á deilingu sem margföldun (deiling með tölu a er sama og margföldun með tölunni $\frac{1}{a}$) gildir það sama um deilingu með mínustölu, það er að ójöfnumerkið snýst við.

Lausnin á fyrsta stigs ójöfnu er talnabil en ekki ein ákveðin tala eins og á fyrsta stigs jöfnu.

Dæmi. Leystu ójöfnuna 5x – 4 > 8x – 16.

Lausn: Færum x-in í aðra hlið og aðra liði í hina hliðina:

5x – 8x > 4 – 16

Einföldum báðar hliðar:

– 3 x > – 12

Deilum með x-stuðli sem er – 3 og þá snýst ójöfnumerkið við:

x < 4

Lausnin er bilið $]-\infty, 4[$, það er $x \in]-\infty, 4[$.

4. kafli Frumtölur og þáttun

Þegar tölunni 3 er deilt upp í töluna 12 er útkoman 4 og afgangurinn 0. Sagt er að 3 gangi upp í 12 eða að 3 sé þáttur í 12. Þar sem talan 3 er þáttur í 12 er hægt að þátta töluna 12, þ.e. rita hana sem margfeldi af 3: $12 = 3 \cdot 4$. Tölurnar 1, 2, 3, 4, 6, 12 ganga allar upp í 12 og eru því allar þættir í tölunni 12.

Talan 1 gengur upp í allar náttúrlegar tölur og er því þáttur í öllum náttúrlegum tölum. Náttúrleg tala gengur augljóslega líka upp í sjálfa sig. Því hafa allar náttúrlegar tölur nema talan 1 a.m.k. tvo þætti og flestar hafa fleiri þætti. Talan 1 hefur aðeins einn þátt sem er hún sjálf.

Skilgreining: Náttúrleg tala sem hefur nákvæmlega tvo þætti kallast frumtala (eða prímtala).

Einu þættir frumtölu eru sem sé talan 1 og talan sjálf. Lægsta frumtalan er talan 2 næst kemur 3 og síðan 5. Hér eru 20 fyrstu frumtölurnar:
2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 , 29 , 31 , 37 , 41 , 43 , 47 , 53 , 59 , 61 , 67 , 73.

Eini möguleikinn á að þátta frumtölu er að nota þættina 1 og töluna sjálfa, til dæmis er $7 = 1 \cdot 7$.

Aðrar náttúrlegar tölur (nema talan 1 sem er sér á báti) hafa fleiri þætti og kallast samsettar. Þegar samsett tala er þáttuð og þættirnir eru ekki frumtölur er hægt að halda áfram og þátta þættina þar til aðeins verða eftir þættir sem eru frumtölur (frumtöluþættir). Þetta er kallað frumþáttun. Ef frumtöluþættirnir eru ritaðir í stækkandi röð er bara eitt mögulegt svar.

$$12 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$

Regla: Sérhverja náttúrlega tölu er hægt að frumþátta á nákvæmlega einn hátt ef frumþættirnir eru ritaðir í stækkandi röð.

Ef frumþátta á tölu er hægt að ganga skipulega til verks og athuga hvaða frumtölur ganga upp í tölunni en það er líka hægt að þátta töluna einhvern veginn og þátta svo þættina áfram niður í frumtölur.

Dæmi. Frumþáttaðu töluna 72.

Lausn: $72 = 2 \cdot 36 = 2 \cdot 2 \cdot 18 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$.
Þessa niðurstöðu má að sjálfsögðu fá í færri skrefum.

En svona hefði líka mátt leysa dæmið:
$72 = 8 \cdot 9 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$

Talan 4 gengur upp í 24 og 40 og kallast samdeilir talnanna 24 og 40. Talan 8 er stærri en 4 og gengur líka upp í bæði 24 og 40. Ekki er hægt að finna stærri náttúrlega tölu sem gengur upp í bæði 24 og 40. Talan 8 kallast stærsti samdeilir talanna 24 og 40.

Skilgreining: Talan d kallast stærsti samdeilir náttúrlegu talnanna a og b ef d er stærsta náttúrlega talan sem gengur upp í bæði a og b.

Oft er hægt að finna stærsta samdeili tveggja talna í huganum.

Dæmi. Finndu stærsta samdeili talnanna 10 og 15.

Lausn: Stærsta talan sem gengur bæði upp í 10 og 15 er 5.

Hér er hins vegar aðferð til að finna stærsta samdeili tveggja talna:

1. skref. Frumþáttaðu báðar tölurnar og ritaðu mengi frumþátta hvorrar tölu.

2. skref. Finndu sniðmengi frumþáttamengjanna.

3. skref. Margfaldaðu saman frumþættina í sniðmenginu og settu þann veldisvísi á hvern frumþátt sem er lægri veldisvísir hans í frumþáttun upphaflegu talnanna.

Dæmi. Finndu stærsta samdeili talnanna 120 og 84.

Lausn:
1. skref. $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Frumþáttamengi = $\{2,3,5\}$.
$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$. Frumþáttamengi = $\{2,3,7\}$.

2. skref. Sniðmengi frumþáttamengjanna er $\{2,3\}$.

3. skref. Stærsti samdeilirinn er $2^2 \cdot 3 = 12$ (Lægri veldisvísirinn á frumþættinum 2 var 2).

Ef tvær náttúrlegar tölur eru margfaldaðar saman þá ganga báðar tölurnar upp í margfeldið. Þannig ganga tölurnar 8 og 10 báðar upp í 80 vegna þess að $80 = 8 \cdot 10$. En þær ganga líka báðar upp í töluna 40 sem er lægri tala en 80. Ekki er hægt að finna lægri náttúrlega tölu sem bæði 8 og 10 ganga upp í. Talan 40 kallast minnsta samfeldi eða minnsti samnefnari talnanna 8 og 10.

Skilgreining: Talan c kallast minnsta samfeldi náttúrlegu talnanna a og b ef c er minnsta náttúrlega tala sem bæði a og b ganga upp í.

Oft er auðvelt að finna minnsta samfeldi tveggja talna í huganum.

Dæmi. Finndu minnsta samfeldi talnanna 6 og 9.

Lausn: Svarið er 18 því að minnsta tala sem 6 og 9 ganga upp í er 18.

Hér er aðferð til að finna minnsta samfeldi tveggja talna.

1. skref. Frumþáttaðu báðar tölurnar og ritaðu mengi frumþátta hvorrar tölu.

2. skref. Finndu sammengi frumþáttamengjanna.

3. skref. Margfaldaðu saman frumþættina í sammenginu og settu þann veldisvísi á hvern frumþátt sem er hærri veldisvísir hans í frumþáttun upphaflegu talnanna.

Dæmi. Finndu minnsta samfeldi talnanna 120 og 84.

Lausn:
1. skref. $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ Frumþáttamengi = $\{2,3,5\}$
$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$. Frumþáttamengi = $\{2,3,7\}$.

2. skref. Sammengi frumþáttamengjanna er $\{2,3,5,7\}$.

3. skref. Minnsta samfeldi talnanna er þá $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$ (Hærri veldisvísirinn á frumþættinum 2 var 3).

5. kafli Almenn brot og tugabrot

Almennu broti er hægt að breyta í tugabrot. Það er gert með því að deila nefnaranum í teljarann. Annað hvort gengur deilingin upp og útkoman er endanlegt tugabrot eða eftir ákveðinn fjölda skrefa fæst sami afgangur og áður er kominn (aðeins eru endanlega margir möguleikar og því hlýtur að koma fram endurtekning ef deilingin gengur ekki upp) og þá verður tugabrotið endalaus endurtekning og er þá sagt að það sé lotubundið.

Dæmi. Breyttu $\frac{3}{8}$ og $\frac{5}{6}$ í tugabrot.

Lausn: Við deilum $3:8=\frac{3}{8}=0{,}375$ og $5:6=\frac{5}{6}=0{,}833\ldots$ sem er endalaust lotutugabrot þar sem lotan er talan 3. Einnig er ritað $\frac{5}{6}=0{,}8\overline{3}$ þar sem strikið yfir tölunni 3 merkir að tugabrotið er lotutugabrot þar sem lotan er talan 3.

Dæmi. Breyttu almenna brotinu $\frac{2}{7}$ í tugabrot.

Lausn: 2 : 7 = 0,285714285714 . . . sem einnig mætti rita $0{,}\overline{285714}$. Lotan er 285714 alls 6 tölustafir. (Hún gat verið í mesta lagi sex stafir fyrst nefnarinn er talan 7 því að það eru bara 6 mögulegir afgangar þegar deilt er með 7).

Endanlegu tugabrotin (og þar með taldar heilu tölurnar) og lotutugabrotin til samans kallast ræðar tölur. Mengi þeirra er táknað með Q og er það dregið af latneska orðinu quotiens. Reyndar er hægt að líta á endanlegu tugabrotin sem lotutugabrot með lotuna 0 (t.d. er $\frac{2}{5}=0{,}4=0{,}40000\ldots=0{,}4\overline{0}$) og má því segja að Q sem er mengi ræðra talna sé jafnt og mengi allra lotutugabrota.

Ef breyta á endanlegu tugabroti í almennt brot er það lengt svo að komman færist út í enda:

Dæmi. Breyttu 0,125 í almennt brot.

Lausn: Færa þarf kommuna um þrjú sæti og því þarf að lengja með 1000:
$0{,}125=\frac{0{,}125\cdot 1000}{1000}=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}$. Í síðasta skrefinu var brotið stytt (hægt að gera í vasareikni).

Eins og hér hefur komið fram þá er mengi almennra brota (þ.e. ræðra talna) það sama og mengi lotutugabrota. Tugabrot sem eru endalaus og ekki lotutugabrot kallast **óræðar tölur.** Þeim er ekki hægt að breyta í almenn brot. Dæmi um slíkar tölur eru π, $\sqrt{2}$ og $\sqrt{3}$. Séu öll tugabrot (endanleg, lotubundin og endalaus án lotu) sett saman í eitt mengi fæst mengi **rauntalna** sem er táknað með **R**. Það fyllir alla talnalínuna.

Vasareiknirinn

Á vasareikninum þínum er takki með heitinu $a^b/_c$ sem er ætlaður til brotareiknings. Hér eru nokkur dæmi um notkun.

i) **Hægt er að stytta brot** en það eru takmörk á því að hvað teljari og nefnari geta verið háar tölur. Ef stytta á brotið $\frac{72}{123}$ sláum við inn 72 $a^b/_c$ 123 og styðjum á hnappinn EXE. Þá styttist brotið og út kemur $\frac{24}{41}$.

ii) **Hægt er að breyta blönduðu broti í almennt brot**. Ef breyta á blandaða brotinu $5\,^3/_7$ í almennt brot er slegið inn 5 $a^b/_c$ 3 $a^b/_c$ 7 , stutt á EXE og síðan á SHIFT $a^b/_c$. Þá breytist blandaða brotið í almenna brotið $\frac{38}{7}$. Ef síðan er stutt aftur á SHIFT $a^b/_c$ breytist brotið aftur í blandað brot.

Ef breyta á almennu broti í tugabrot er brotastrikið einfaldlega slegið inn sem deilingarmerki. Ef breyta á $\frac{38}{6}$ í tugabrot sláum við sem sagt inn 38 ÷ 6 og styðjum síðan á EXE og fáum lotutugabrotið 6,333 . . .

Þegar reikna á talnadæmi með brotum er sjálfsagt að nota $a^b/_c$ hnappinn og spara sér handavinnu nema beðið sé sérstaklega um útreikninga. Nota þarf sviga ef útreikningar eru í teljara og nefnara brots. Ef svarið á að vera almennt brot þurfa allar tölurnar sem slegnar eru inn að vera heilar tölur eða almenn brot. Ef ein talan er tugabrot verður svarið líka tugabrot.

Dæmi. Reiknaðu $2+\dfrac{2\,{}^2\!/\!_3+3\cdot\frac{4}{7}}{2-3\cdot\frac{2}{8}}$.

Lausn: Reiknum dæmið á vasareikninn og sláum inn:

$2+\left(2\,\text{a}\,{}^b\!/\!_c\,2\text{a}\,{}^b\!/\!_c\,3+3\cdot4\,\text{a}\,{}^b\!/\!_c\;7\right)\div\left(2-3\cdot2\,\text{a}\,{}^b\!/\!_c\,8\right)$ EXE. Svarið verður $5\,{}^{53}\!/\!_{105}=\dfrac{578}{105}$.

Dæmi. Reiknaðu $1{,}6+\dfrac{2-5\cdot\frac{3}{4}}{5\,{}^2\!/\!_3}$ og svaraðu með almennu broti.

Lausn: Breytum tugabrotinu 1,6 í almennt brot 1,6 = $\dfrac{1{,}6\cdot10}{10}=\dfrac{16}{10}$ og sláum dæmið inn í vasareikninn: $16\,\text{a}\,{}^b\!/\!_c\,10+\left(2-5\cdot3\,\text{a}\,{}^b\!/\!_c\,4\right)\div5\,\text{a}\,{}^b\!/\!_c\,2\,\text{a}\,{}^b\!/\!_c\,3$ EXE og svarið er

$1\,{}^{99}\!/\!_{340}=\dfrac{439}{340}$.

6. kafli Þáttun

Stærðin og a + b – c kallast liðastærð og a, b og c kallast liðir. Stærðin $a \cdot b \cdot c$ kallast þáttastærð og a, b og c þættir. Sagt er að plús og mínus skipti í liði en margföldun í þætti.

Dæmi. Reiknaðu $x(a+b)$ og $(x+2)(x+5)$.

Lausn: $x(a+b) = xa + xb$ og $(x+2)(x+3) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6$

Í dæminu hér á undan var þáttastærð breytt í liðastærð sem er ekki erfitt. Það er hins vegar erfiðara að breyta liðastærð í þáttastærð en það kallast þáttun. Það er mjög mikilvægt að hafa gott vald á einfaldri þáttun í reikningi með algebrubrot. Í þáttuninni sem hér fer á eftir er miðað við að allir stuðlar séu heilar tölur.

Í þáttun skaltu byrja á því að reyna að taka út fyrir sviga. Það er hægt ef liðirnir hafa sameiginlegan þátt. Sameiginlegi þátturinn getur verið:

tala,
bókstafur,
bókstafur í veldi,
margfeldi af tölu og bókstaf í veldi,
svigi.

Dæmi. Þáttaðu i) $3x - 6$, ii) $x^2 - 5x$, iii) $x^3 + x^2$, iv) $7x^3 - 14x$

Lausn:
i) Talan 3 er þáttur í báðum liðum: $3x - 6 = 3(x-2)$

ii) bókstafurinn x er þáttur í báðum liðum: $x^2 - 5x = x(x-5)$

iii) x^2 er þáttur í báðum liðum: $x^3 + x^2 = x^2(x+1)$

iv) Stærðin 7x er þáttur í báðum liðum: $7x^3 - 14x = 7x(x^2 - 2)$

Ef ekki er hægt að taka út fyrir sviga skaltu reyna að þátta í tvo sviga. Ef liðirnir eru tveir skaltu fyrsta athuga hvort hægt er að nota samoka regluna, sem gengur líka undir nafninu mismunur ferningsstærða.

Samoka reglan: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Hægt er að þátta í tvo sviga með samoka reglunni ef eftirfarandi þrjú skilyrði eru uppfyllt:

i) liðirnir eru tveir,
ii) annar liðurinn er plús liður en hinn mínus liður,
iii) hvor liður fyrir sig er ferningsstærð (sjá skýringu hér á eftir).

Svarið er þá margfeldi tveggja sviga sem eru nákvæmlega eins nema í öðrum sviganum er plús á milli liðanna en í hinum sviganum er mínus á milli liðanna.

Ferningstærð getur verið:
i) Ferningstala, en ferningstölur eru tölurnar 1, 4 , 9 , 16 , 25 , . . . Ferningstala er sem sagt náttúrleg tala í öðru veldi.
ii) Bókstafur í sléttu veldi.
iii) Margfeldi af ferningstölu og bókstaf í sléttu veldi.
iv) Svigi í sléttu veldi.

Dæmi. Þáttaðu i) x^2-9 , ii) $4a^2-25b^2$, iii) $9x^2-1$, iv) $(x+y)^2-z^2$

Lausn: Skilyrðin þrjú eru greinilega uppfyllt í öllum dæmunum fjórum og því er ávallt hægt að beita samoka reglunni.

i) $x^2-9=(x+3)(x-3)$
ii) $4a^2-25b^2=(2a+5b)(2a-5b)$
iii) $9x^2-1=(3x+1)(3x-1)$
iv) $(x+y)^2-z^2=\big((x+y)+z\big)\big((x+y)-z\big)=(x+y+z)(x+y-z)$

Ekki er hægt að nota samoka regluna til að þátta $4x^2-5$ og x^2+9 því að í fyrra dæminu er seinni liðurinn (talan 5) ekki ferningsstærð en í seinna dæminu eru báðir liðirnir plús liðir.

Ef liðirnir eru tveir og ekki er hægt að þátta með samokareglunni skaltu reyna að þátta með teningareglunum. Þær eru heldur flóknari en samokareglan.

Teningareglurnar: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ og $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

Ef margfaldað er upp úr svigunum í hægri hliðinni fæst útkoman í vinstri hliðinni.

Hægt er að þátta í tvo sviga með teningareglunum ef eftirfarandi tvö skilyrði eru uppfyllt:

i) liðirnir eru tveir,
ii) báðir liðirnir eru teningsstærðir.

Teningstærð getur verið:
i) Teningstala, en teningstölur eru tölurnar 1 , 8 , 27 , 64, . . . Teningstala er sem sagt náttúrleg tala í þriðja veldi.
ii) Bókstafur í veldi þar sem talan 3 gengur upp í veldisvísinn.
iii) Margfeldi af teningstölu og bókstaf í veldi þar sem þrír gengur upp í veldisvísinn.
iv) Svigi í veldi þar sem 3 gengur upp í veldisvísinn.

Dæmi. Þáttaðu i) $x^3 - 27$, ii) $8a^9 + 1$.

Lausn: Það er hægt að nota teningsreglurnar í báðum dæmunum því að 3 gengur upp í veldisvísana og tölurnar 27, 8 og 1 eru allt teningstölur.

i) $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2 + 3x + 3^2) = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$

ii) $8a^9 + 1 = (2a^3)^3 + 1^3 = (2a^3 + 1)\left((2a^3)^2 - 2a^3 \cdot 1 + 1^2\right) = (2a^3 + 1)(4a^6 - 2a^3 + 1)$

Ef liðirnir eru þrír er stundum hægt að nota ferningsreglurnar en meginaðferðin er að þátta í tvo sviga með ágiskunarreglunni.

Ferningsreglurnar: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ og $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Dæmi. Þáttaðu $x^2 + 12x + 36$.

Lausn: $x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 = (x+6)^2$.

Þegar ágiskunaraðferðinni er beitt er best að liðirnir séu ritaðir í ákveðinni röð þannig að fyrsti liðurinn sé sá sem hefur hæsta stigið og miðliðurinn sá sem hefur næsthæsta stigið. Þáttun stærðarinnar $x^2 + bx + c$ með ágiskunarreglunni er best lýst með nokkrum dæmum.

Dæmi. Þáttaðu $x^2 + 7x + 12$.

Lausn: Finna þarf tvær tölur r og s þannig að $(x+r)(x+s) = x^2 + 7x + 12$.
(Þar eð allir liðir eru jákvæðir verður plús í báðum svigunum.) Tölurnar r og s eru þættir tölunnar 12 því að $r \cdot s = 12$.
Möguleikarnir á að þátta töluna 12 í margfeldi tveggja talna eru eru

$$1 \cdot 12$$
$$2 \cdot 6$$
$$3 \cdot 4$$

Nú sést að 3 og 4 er rétta svarið því að summa talnanna 3 og 4 er 7 sem passar við miðliðinn. Því er $x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$.

Dæmi. Þáttaðu $x^2 - 12x + 32$.

Lausn: Síðasti liðurinn er plús liður svo að sama merki verður að vera í báðum svigunum en af því að miðliðurinn er mínusliður verður merkið að vera mínusmerki. Tölurnar í svigunum eru tveir þættir tölunnar 32 og möguleikarnir eru :

$$1 \cdot 32$$
$$2 \cdot 16$$
$$4 \cdot 8$$

og rétta svarið er 4 og 8 því að summan er 12 sem passar við miðliðinn. Því er $x^2 - 12x + 32 = (x-4)(x-8)$.

Dæmi. Þáttaðu $x^2 - 7x - 18$.

Lausn: Síðasti liðurinn er mínusliður og þá verður mínusmerki í öðrum sviganum en plúsmerki í hinum. Möguleikarnir á að þátta töluna 18 í tvo þætti eru

$$1 \cdot 18$$
$$2 \cdot 9$$
$$3 \cdot 6$$

og nú er rétta svarið 2 og 9 því að **mismunur** talnanna er 7 sem passar við miðliðinn. Mínusmerkið er á hærri tölunni því að miðliðurinn er mínusliður.
Því er $x^2 - 7x - 9 = (x-9)(x+2)$.

Ef stuðullinn við x^2 – liðinn er ekki 1 verður dæmið aðeins flóknara og möguleikunum fjölgar. Lausnin felst í því að skrá alla möguleika og prófa þá þar til hinn rétti finnst.

Dæmi. Þáttaðu $2x^2 + 5x + 3$.

Lausn: Nú er x í öðrum sviganum og 2x í hinum. Það er plúsmerki í báðum svigunum og eina mögulega þáttunin á 3 er $1 \cdot 3$. En það eru tveir möguleikar á að setja tölurnar í svigana: $(x+3)(2x+1)$ og $(x+1)(2x+3)$. Í fyrra tilvikinu verður miðliðurinn 7x sem passar ekki en í því seinna 5x sem passar. Aðeins þarf að athuga hvort svigarnir gefi réttan miðlið. Því er $2x^2 + 5x + 3 = (x+1)(2x+3)$.

Dæmi. Þáttaðu $6x^2 - x - 5$.

Lausn: Fyrri liðirnir verða að vera x og 6x eða 2x og 3x og tölurnar 1 og 5. Það er plúsmerki í öðrum sviganum og mínusmerki í hinum því að fastastuðullinn er mínustala. Möguleikarnir eru því
$(x+1)(6x-5)$, $(x-1)(6x+5)$, $(x+5)(6x-1)$, $(x-5)(6x+1)$, $(2x+1)(3x-5)$,
$(2x-1)(3x+5)$, $(2x+5)(3x-1)$ og $(2x-5)(3x+1)$.
Annar möguleikinn gefur réttan miðlið. Því er $6x^2 - x - 5 = (x-1)(6x+5)$.

Þegar rétta lausnin er fundin er að sjálfsögðu óþarfi að skrifa hina möguleikana upp. Færni í þáttun öðlast enginn nema með þjálfun og sannast hér máltækið að “enginn verður óbarinn biskup.”

Ef liðirnir eru fjórir eða fleiri vandast málið. Stundum er hægt að beita ágiskunarreglunni. Einnig er til aðferð sem er í því fólgin að skipta dæminu í tvö (eða fleiri) þáttunardæmi og athuga hvort fram kemur sameiginlegur svigi. Þessi aðferð kallast þáttun með flokkun.

Dæmi. Þáttaðu $ab + ax + by + xy$ **.**

1. lausn: Notum ágiskunarreglu. Fyrri liðirnir verða að vera a og b og seinni liðirnir x og y. Það er plúsmerki í báðum svigunum fyrst allir liðirnir eru plúsliðir.
ab+ax+by+xy=(a+y)(b+x)

2. lausn: Notum flokkun og skiptum dæminu í tvö dæmi með því að setja sviga utan um hvort dæmi og reynum að þátta í tvennu lagi:
$ab + ax + by + xy = (ab + ax) + (by + xy) = a(b + x) + y(b + x)$.
Nú tökum við sameiginlega svigann út fyrir sviga. Hann er settur fremst og svigi settur utan um það sem eftir stendur og þá fæst svarið:
$a(b + x) + y(b + x) = (b + x)(a + y)$.

Dæmi. Þáttaðu $a^2 - b^2 + 2a - 2b$.

Lausn: Hér virðist ekki árennilegt að beita ágiskun og því verður flokkun beitt:

$$a^2 - b^2 + 2a - 2b = (a^2 - b^2) + (2a - 2b) = (a + b)(a - b) + 2(a - b) = (a - b)((a + b) + 2)$$

Hér var samoka reglan notuð til að þátta fyrri hluta dæmisins.
Niðurstaðan er: $a^2 - b^2 + 2a - 2b = (a - b)(a + b + 2)$.

Ég átti engan
þátt í þessu!

7. kafli Algebrubrot

Stytting

Brotið $\frac{x}{x}$ er ávallt jafnt 1 ef $x \neq 0$. Af þessu leiðir að margföldun með tölu og síðan deiling með sömu tölu (sem er ekki 0) breytir ekki gildi útkomu. Það kallast stytting að spara sér slíka vinnu. Stytting brots er í því fólgin að stytta í burtu sameiginlegan þátt og því verður að breyta teljara og nefnara í þáttastærð (þátta teljara og nefnara) áður en brotið er stytt. Ef þú fylgir eftirfarandi leiðbeiningum ertu á grænni grein í styttingu!

1. skref. Settu sviga utan um þá teljara og nefnara sem innihalda fleiri en einn lið.
2. skref. Þáttaðu teljara ef hægt er
3. skref. Þáttaðu nefnara ef hægt er.
4. skref. Styttu út þá þætti sem eru eins í teljara og nefnara.

Athugaðu að $(a-b) = -(b-a)$ og því má einnig stytta sviga á móti gagnstæðum sviga en út úr þeirri styttingu fæst útkoman -1 eða bara mínusmerki sem best er setja fyrir framan brotið.

Dæmi. Styttu brotið $\frac{5x^3yz^2}{10xy^2z^3}$.

Lausn: Hér eru engar liðastærðir og hægt að stytta beint:

$$\frac{5x^3yz^2}{10xy^2z^3} = \frac{5\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot z\cdot z}{2\cdot 5\cdot x\cdot y\cdot y\cdot z\cdot z\cdot z} = \frac{x\cdot x}{2\cdot y\cdot z} = \frac{x^2}{2yz}.$$

Auðvitað þarf ekki að leysa dæmið í svona mörgum skrefum heldur er hægt að rita svarið beint.

Dæmi. Styttu $\frac{x^2-3x}{x^2-9}$.

Lausn:

1. skref. Teljari og nefnari eru liðastærðir og því er settur svigi utan um teljara og nefnara: $\frac{(x^2-3x)}{(x^2-9)}$

2. og 3. skref. Teljari og nefnari eru þáttaðir: $\frac{(x^2-3x)}{(x^2-9)} = \frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)}$

4. skref. Sviginn $(x-3)$ er þáttur bæði í teljara og nefnara og hann er styttur burt:

$$\frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x}{(x+3)}$$

Dæmi. Styttu $\frac{2x^2-10x+12}{4x-8}$.

Lausn: $\frac{(2x^2-10x+12)}{(4x-8)} = \frac{2(x^2-5x+6)}{4(x-2)} = \frac{2\cdot(x-2)(x-3)}{2\cdot 2\cdot(x-2)} = \frac{(x-3)}{2}$

Margföldun
Þegar tvö brot eru margfölduð saman eru teljarnir margfaldaðir saman og nefnararnir margfaldaðir saman:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Þegar algebrubrot eru margfölduð saman er mjög mikilvægt að stytta fyrst og margfalda svo.

1. skref. Settu sviga utan um alla teljara og nefnara sem innihalda fleiri en einn lið.
2. skref. Þáttaðu alla teljara og nefnara sem hægt er að þátta.
3. skref. Styttu.
4. skref. Margfaldaðu brotin saman.

Dæmi. Margfaldaðu $\frac{3x}{a}\cdot\frac{x^2}{5a}$.

Lausn: Hér eru engar liðastærðir og ekkert hægt að stytta svo að við höldum beint yfir í skref 4 og margföldum brotin saman:

$$\frac{3x}{a}\cdot\frac{x^2}{5a} = \frac{3x^3}{5a^2}$$

Dæmi. Margfaldaðu $\frac{3x^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{5x-5y}{6x^3}$.

Lausn:

1. skref. $\frac{3x^2}{\left(x^2-y^2\right)}\cdot\frac{\left(5x-5y\right)}{6x^3}$ (Svigar settir utan um liðastærðir)

2 skref. $\frac{3x^2}{(x+y)(x-y)}\cdot\frac{5(x-y)}{2\cdot 3\cdot x^3}$ (Þáttun)

3. skref. $\frac{1}{(x+y)}\cdot\frac{5}{2x}$ (Stytting)

4. skref. $\frac{5}{2x^2+2xy}$ (Margföldun)

Ef byrjað hefði verið á margföldun, síðan þáttað og svo stytt, hefðu reikningarnir orðið mun lengri og erfiðari.

Deiling

Þegar deilt er með broti er hægt að reikna út úr deilingunni með því að snúa brotinu sem deilt er með við og breyta deilingarmerkinu í margföldunarmerki:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

og síðan er fylgt leiðbeiningum um margföldun. Hér er ástæðan fyrir því að hægt er að breyta deilingardæmi í margföldunardæmi:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{1} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Dæmi. Deildu $\frac{a}{a-2} : \frac{a^2}{a^2-4}$.

Lausn: Breytum í margföldunardæmi $\frac{a}{a-2} \cdot \frac{a^2-4}{a^2}$ og fylgjum síðan leiðbeiningum um margföldun:

$$\frac{a}{(a-2)} \cdot \frac{(a^2-4)}{a^2} = \frac{a}{(a-2)} \cdot \frac{(a+2)(a-2)}{a^2} = \frac{(a+2)}{a}.$$

Samlagning og frádráttur

Ef finna á summu eða mismun brota verða brotin að hafa sama nefnara. Ef brot með sama nefnara eru lögð saman skal leggja teljarana saman en nefnarinn helst óbreyttur:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Sama gildir í frádrætti, teljari dregst frá teljara en nefnari helst óbreyttur:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Dæmi. Reiknaðu $\frac{5x}{y} + \frac{2x}{y} - \frac{3x}{y}$.

Lausn: $\frac{5x}{y} + \frac{2x}{y} - \frac{3x}{y} = \frac{5x+2x-3x}{y} = \frac{4x}{y}$.

Ef brot hafa ekki sama nefnara þarf að finna samnefnara og lengja brotin, síðan má leggja þau saman (eða finna mismun þeirra.) Mikilvægt er að hafa samnefnarann sem minnstan. Minnsti samnefnari er fundinn á eftirfarandi hátt:

1. skref. Þáttaðu alla nefnarana sem hægt er að þátta

2. skref. Margfaldaðu saman alla ólíka þætti nefnaranna þannig að hver þáttur sé í hæsta veldi sem fram kom við þáttun nefnaranna.

Minnsti samnefnari er sem sagt minnsta samfeldi nefnaranna.

Dæmi. Finndu minnsta samnefnara fyrir brot sem hafa nefnarana $3x^3$ og xy.

Lausn: $3x^3 = 3 \cdot x \cdot x \cdot x$ og $xy = x \cdot y$. Hér eru 3, x og y ólíkir þættir og hæsti veldisvísirinn á x-inu er 3. Minnsti samnefnarinn verður þá $3 \cdot x^3 \cdot y = 3x^3y$.

Dæmi. Finndu minnsta samnefnara brotanna $\frac{x}{x^2-1}$ og $\frac{2}{x^2-3x+2}$

Lausn: Nefnarar eru þáttaðir: $(x+1)(x-1)$ og $(x-1)(x-2)$**.**
Hinir ólíku þættir eru (x+1) , $(x-1)$ og $(x-2)$ og enginn þáttur er í hærra veldi en fyrsta veldi. Minnsti samnefnarinn verður $(x+1)(x-1)(x-2)$.

Þegar búið er að finna samnefnarann þarf að lengja brotin þannig að þau hafi öll þennan sama nefnara. Hvert brot er lengt með því sem upp á vantar til að nefnarinn verði eins og samnefnarinn og síðan er lagt saman (dregið frá).

Dæmi. Leggðu saman $\dfrac{x}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-5x+6}$.

Lausn: $\dfrac{x}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-5x+6} = \dfrac{x}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{2}{(x-2)(x-3)}$

Minnsti samnefnari er $(x+2)(x-2)(x-3)$. Næst kemur lengingin. Í fyrri nefnarann vantar þáttinn $(x-3)$ en í þann síðari þáttinn (x + 2). Fyrra brotið er þá lengt með $(x-3)$ og það síðara með (x + 2) og þá fæst:

$$\frac{x(x-3)}{(x+2)(x-2)(x-3)} + \frac{2(x+2)}{(x-2)(x-3)(x+2)}.$$

Brotin hafa sama nefnara sem við skulum til styttingar kalla S og því má leggja þau saman:

$$\frac{x(x-3)}{S} + \frac{2(x+2)}{S} = \frac{x(x-3)+2(x+2)}{S} = \frac{x^2-3x+2x+4}{S} = \frac{x^2-x+4}{(x-2)(x+2)(x-3)}$$

Hér er ekki hægt að þátta teljarann og stytta svarið.

Athugasemd: Ef gagnstæðir svigar $(a-b)$ og $(b-a)$ koma fram þegar nefnarnir eru þáttaðir þá þarf ekki að telja þá báða upp í samnefnaranum heldur skal nota þá staðreynd að $\dfrac{1}{(b-a)} = -\dfrac{1}{(a-b)}$. Sviganum $(b-a)$ er þá breytt í svigann $(a-b)$ og merkinu fyrir framan brotið jafnframt breytt (plús í mínus eða mínus í plús).

Dæmi. Reiknaðu $\dfrac{x}{x^2-y^2} + \dfrac{2}{3y-3x}$.

Lausn: $\dfrac{x}{(x^2-y^2)} + \dfrac{2}{(3y-3x)} = \dfrac{x}{(x+y)(x-y)} + \dfrac{2}{3(y-x)} = \dfrac{x}{(x+y)(x-y)} - \dfrac{2}{3(x-y)}$

Minnsti samnefnari S = $3(x+y)(x-y)$. Lengja þarf fyrra brotið með 3 og seinna brotið með (x+y). Þá fæst

$$\frac{3x-2(x+y)}{S} = \frac{3x-2x-2y}{S} = \frac{x-2y}{3(x+y)(x-y)}.$$

Hér er svo aðferðin:

1. skref. Settu sviga utan um alla teljara og nefnara sem innihalda fleiri en einn lið.
2. skref. Þáttaðu alla nefnara sem hægt er að þátta.
3. skref. Búðu til S = minnsta samnefnara. Hann er margfeldi allra ólíkra þátta nefnaranna þannig að veldi hvers þáttar sé hæsta veldi sem fram kom í þáttun nefnaranna.
4. skref. Lengdu brotin þannig að öll verði með nefnarann S.
5. skref. Leggðu saman (dragðu frá) teljarana. Nefnarinn er S.
6. skref. Reyndu að þátta teljarann í útkomubrotinu og stytta svarið.

Dæmi. Reiknaðu $\dfrac{x}{x^2+4x+4}-\dfrac{x+3}{x^2+x-2}$

Lausn: $\dfrac{x}{(x^2+4x+4)}-\dfrac{(x+3)}{(x^2+x-2)}=\dfrac{x}{(x+2)^2}-\dfrac{(x+3)}{(x+2)(x-1)}$

Minnsti samnefnari er $S=(x+2)^2(x-1)$ og því þarf að lengja fyrra brotið með (x – 1) og seinna brotið með (x + 2):

$$\frac{x(x-1)-(x+3)(x+2)}{S}=\frac{x^2-x-x^2-3x-2x-6}{S}=\frac{-6x-6}{(x+2)^2(x-1)}$$

Blönduð dæmi

Ef dæmi er sambland af margföldun (deilingu) og samlagningu (frádrætti) þarf að gæta þess að framkvæma aðgerðir í réttri röð. Röð aðgerða er þessi:

1) Svigar hafa forgang og því skal byrjað á að reikna svigana.
2) Næst skal margfalda og deila.
3) Loks skal leggja saman og draga frá.

Dæmi. Reiknaðu $\left(2a-\dfrac{1}{2a}\right):\dfrac{4a^2-2a}{3}$.

Lausn: Fyrst skal einfalda stæðuna í sviganum:

$$2a-\frac{1}{2a}=\frac{2a}{1}-\frac{1}{2a}=\frac{4a^2}{2a}-\frac{1}{2a}=\frac{4a^2-1}{2a}$$

Síðan kemur deilingardæmið sem breytt er í margföldunardæmi en í margföldunardæmi skal þátta, stytta og margfalda:

$$\frac{(4a^2-1)}{2a}\cdot\frac{3}{(4a^2-2a)}=\frac{(2a+1)(2a-1)}{2a}\cdot\frac{3}{2a(2a-1)}=\frac{(2a+1)}{2a}\cdot\frac{3}{2a}=\frac{6a+3}{4a^2}.$$

Dæmi. Reiknaðu $\frac{x}{x+2} + \frac{2x}{x^2-4} \cdot \frac{3x-6}{5x}$.

Lausn: Margföldunin hefur forgang og því skal byrja á seinni hluta dæmisins:

$$\frac{x}{x+2} + \frac{2x}{(x^2-4)} \cdot \frac{(3x-6)}{5x} = \frac{x}{x+2} + \frac{2x}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{3(x-2)}{5x} = \frac{x}{x+2} + \frac{6}{5(x+2)}$$

Þá kemur samlagning og samnefnarinn er S = 5(x+2) og því þarf aðeins að lengja fyrra brotið:

$$\frac{5x+6}{S} = \frac{5x+6}{5(x+2)}.$$

Ef ég reikna mörg algebrubrot er þá ekki hætt við að ég gerist brotlegur?

8. kafli Veldi og veldareglur

Við byrjum á að rifja upp skilgreiningu á veldi og veldareglurnar. Ef tala er margfölduð við sjálfa sig aftur og aftur er notaður veldaritaháttur. Þannig er til dæmis $8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8$ ritað 8^5.Talan 8 kallast veldisstofn en talan 5 veldisvísir.

Skilgreining: Ef n er náttúrleg tala þá er $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{\text{n þættir}}$.

Talan a kallast veldisstofn og talan n veldisvísir. Það má einnig hugsa sér að verið sé að margfalda töluna 1 með tölunni a og skilgreina $a^n = 1\cdot a\cdot a\cdot a\cdots a$ (n þættir af a). Ef þessi skilgreining er notuð er eðlilegt að skilgreina $a^0 = 1$ sem hér með er gert.

Skilgreining: $a^0 = 1$.

Ef við lækkum veldisvísinn á a^n um 1 þá deilist með a í útkomuna. Þannig er $a^4 = a^5 : a$. Þegar veldisvísirinn er heil mínustala er því eðlilegt að líta svo á að um endurtekna deilingu sé að ræða.

Skilgreining: Ef n er náttúrleg tala þá er $a^{-n} = 1 : a^n = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$.

Veldunum tengjast veldareglur. Þær verða ekki sannaðar hér.

Dæmi. Reiknaðu $a^3 \cdot a^5$.

Lausn: a^3 táknar þrjá þætti af tölunni a og a^5 táknar fimm þætti af tölunni a svo alls eru 3 + 5 = 8 þættir af tölunni a svo svarið er a^8. Svarið fæst með því að leggja veldisvísana saman en veldisstofninn er óbreyttur.

Regla 1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Dæmi. Reiknaðu $\frac{a^7}{a^4}$.

Lausn: Í teljaranum er 7 þættir af tölunni a og í nefnaranum eru 4 þættir . Ef brotið er stytt styttast allir fjórir þættir nefnarans út á móti jafnmörgum þáttum teljarans og eftir verða 7 – 4 = 3 þættir af tölunni a svo svarið er a^3. Svarið fæst með því að draga veldisvísinn í nefnaranum frá veldisvísinum í teljaranum en veldisstofninn er óbreyttur.

Regla 2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, ef $a \neq 0$.

Dæmi. Reiknaðu $(a^2)^3$.

Lausn: Hér eru þrír þættir af stærðinni a^2 en stærðin a^2 táknar tvo þætti af tölunni a svo alls eru $2 \cdot 3 = 6$ þættir af tölunni a svo svarið er a^6. Svarið fæst með því að margfalda saman veldisvísana en veldisstofninn er óbreyttur.

Regla 3. $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$.

Dæmi. Reiknaðu $(a \cdot b)^3$.

Lausn: Hér eru þrír þættir af tölunni ab svo það eru bæði þrír þættir af tölunni a og þrír þættir af tölunni b svo svarið er $a^3 \cdot b^3$. Svarið fæst með því að hefja báðar tölurnar í veldið.

Regla 4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Dæmi. Reiknaðu $\left(\frac{a}{b}\right)^3$.

Lausn: Brotið margfaldast þrisvar sinnum við sjálft sig svo að teljarinn margfaldast þrisvar sinnum við sjálfan sig og nefnarinn þrisvar sinnum við sjálfan sig svo svarið er $\frac{a^3}{b^3}$. Svarið fæst með því að hefja bæði teljara og nefnara í veldið.

Regla 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Gættu þess vel að rugla ekki saman reglu 1 og reglu 3. Í reglu 1 eru tvö veldi með sama stofn margfölduð saman en í reglu 3 er ein tala sett tvisvar í veldi. Auk þessara fimm reglna er hægt að búa til fleiri reglur sem auðvelda lausn á veldadæmum. Hægt er að losna við neikvæða veldisvísa í veldadæmum og einnig er hægt að færa veldi úr nefnara upp í teljara og öfugt. Hér eru tvær viðbótarreglur:

Regla 6. $\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{-m}$, ef $a \neq 0.$.

Samkvæmt 6. veldareglunni er hægt að færa veldi úr nefnara upp í teljara en þá skiptir veldisvísirinn sem var í nefnaranum um formerki.

Regla 7. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, ef $a \neq 0$ og $b \neq 0.$.

Samkvæmt 7. veldareglunni er hægt að losna við neikvæðan veldisvísi á broti með því að snúa brotinu við. Hér eru að lokum tvö dæmi þar sem beita þarf veldareglunum. Það borgar sig að fara sér hægt.

Dæmi. Einfaldaðu $\frac{(a^2)^{-3} \cdot b^2}{(a^2 \cdot b^{-3})^2}$.

Lausn:
i) Byrjum á að reikna svigana:
$\frac{a^{-6} \cdot b^2}{a^4 \cdot b^{-6}}$
ii) Færum svo veldin úr í nefnaranum upp í teljaranum og breytum um leið formerki á veldisvísum sem voru í nefnara : $a^{-6} \cdot b^2 \cdot a^{-4} \cdot b^6$
iii) Notum 1. veldaregluna og fáum $a^{-10} \cdot b^8$.
iv) Ef beðið er um svar með jákvæðum veldisvísum þá færum við þættina með neikvæðu veldisvísunum niður í nefnarann og breytum um leið formerkjum veldisvísanna. Þá verður svarið $\frac{b^8}{a^{10}}$. Auðvitað má fara aðra leið og reikna dæmið í færri skrefum.

Dæmi. Reiknaðu $\left(\dfrac{2a^3b^{-1}c^2}{6a^{-2}b^{-3}c}\right)^{-2}$.

Lausn:

i) Snúum brotinu við og breytum formerki veldisvísisins á sviganum: $\left(\dfrac{6a^{-2}b^{-3}c}{2a^3b^{-1}c^2}\right)^2$

ii) Nú eiga allir þættir bæði í teljara og nefnara að fara í annað veldi: $\dfrac{6^2a^{-4}b^{-6}c^2}{2^2a^6b^{-2}c^4}$

iii) Færum bókstafaveldin úr nefnaranum upp í teljarann og reiknum með fyrstu veldareglunni en talnadæmið reiknum við beint (deilum 2^2 í 6^2):
$9a^{-4}b^{-6}c^2a^{-6}b^2c^{-4} = 9a^{-10}b^{-4}c^{-2}$.

iv) Ef svara á með jákvæðum veldisvísum verður svarið $\dfrac{9}{a^{10}b^4c^2}$.

Hér hefði líka verið hægt að einfalda brotið áður en það var sett í veldi. Það er mikilvægt að vera leikin(n) í veldareglunum og það verður enginn nema með æfingu.

456^{27}, 10^{50}, 32^{520}
Hmm... Þetta hljóta að vera stórveldi...

9. kafli Rætur og brotaveldisvísar

Dæmi. Ef talan 2 er sett í fimmta veldi fæst útkoman 32, þ.e. $2^5 = 32$. Talan 2 er eina rauntalan sem hefur þennan eiginleika og er kölluð fimmta rótin af 32 sem er ritað $\sqrt[5]{32}$. Talan 5 kallast rótarvísir en talan 32 rótarstofn.

Ef við notum veldaregluna $(a^n)^m = a^{nm}$ fæst að $\left(32^{\frac{1}{5}}\right)^5 = 32^{\frac{1}{5}\cdot 5} = 32$ svo að talan $32^{\frac{1}{5}}$ í fimmta veldi er einnig 32. Þar með hlýtur $32^{\frac{1}{5}}$ að vera sama tala og $\sqrt[5]{32}$.

Dæmi. Ef talan 3 er sett í sjöunda veldi fæst útkoman 2187. Talan 3 er kölluð sjöunda rót tölunnar 2187 (ritað $\sqrt[7]{2187}$). Talan $2187^{\frac{1}{7}}$ verður líka 2187 ef hún er sett í sjöunda veldi samkvæmt veldareglunni $(a^n)^m = a^{nm}$ svo að $2187^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{2187}$.

Þessi tvö dæmi leiða okkur til eftirfarandi skilgreiningar.

Skilgreining: Ef um jákvæðu tölurnar a og q gildir að $q^n = a$ (þar sem n er náttúrleg tala) þá kallast talan q n - ta rót tölunnar a, ritað $q = \sqrt[n]{a}$. Talan n kallast rótarvísir en talan a rótarstofn.

Sé veldareglunni $(a^n)^m = a^{nm}$ beitt fæst að $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$. Þar með hlýtur $a^{\frac{1}{n}}$ að vera sama tala og $\sqrt[n]{a}$. Því er

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = \text{n - ta rótin af a.}}$$

Athugasemd. Ath. Talan $\sqrt[1]{a}\ \left(= a^{\frac{1}{1}}\right)$ sem er fyrsta rótin af a er einfaldalega talan a sjálf, þ.e. $\sqrt[1]{a} = a$.

Talan $\sqrt[2]{a}\ \left(= a^{\frac{1}{2}}\right)$ sem er önnur rótin af a er ferningsrót (eða kvaðratrót) a og er venja að sleppa rótarvísinum og rita einungis $\sqrt{a}$.

Talan $\sqrt[3]{a}\ \left(= a^{\frac{1}{3}}\right)$ sem er þriðja rótin af a kallast einnig teningsrótin af a.

Hugtakið rót er mikilvægt hugtak og við skulum því líta á nokkur fleiri dæmi áður en lengra er haldið.

Dæmi. Þriðja rótin af 50 er 3,68403… því að $(3{,}68403\ldots)^3 = 50$.

Dæmi. Fimmta rótin af 40 er 2,09127… því að $(2{,}09127\ldots)^5 = 40$.

Búðu sjálf(ur) til fleiri dæmi.

Við getum nú áttað okkur almennt á merkingu veldis þegar veldisvísir er almennt brot. Með því að nota veldaregluna $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$ og sambandið $\sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}$ fæst að $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ svo að teljari veldisvísisins setur í venjulegt heiltöluveldi en nefnari veldisvísisins dregur rót af útkomunni.

Þegar til dæmis talan 8 er sett í veldið 2/3 er hægt að reikna dæmið með því að setja töluna 8 fyrst í annað veldi (þá fæst 64) og draga svo þriðju rótina af 64 (hún er 4).

Þar sem almennt gildir að $\left(a^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ þá má eins gera þetta í öfugri röð: Draga fyrst þriðju rótina af 8 (hún er 2) og setja þá tölu síðan í annað veldi (þá fæst útkoman 4).

Með því að breyta rótum í veldi er oft hægt að beita veldareglum til að leysa rótardæmi.

Hér eru nokkur sýnidæmi:

Dæmi. Breytum eftirfarandi rótum í veldi:

a) $\sqrt[3]{81}$ b) $\sqrt{36}$ c) $\sqrt[5]{6^2}$ d) $\sqrt[3]{a^6b^2}$

Lausn: a) $\sqrt[3]{81} = 81^{\frac{1}{3}}\ (\approx 4{,}3267)$ b) $\sqrt{36} = \sqrt[2]{36} = 36^{\frac{1}{2}}$ (= 6)

c) $\sqrt[5]{6^2} = \left(6^2\right)^{\frac{1}{5}} = 6^{\frac{2}{5}}\ (\approx 2{,}0477)$ d) $\sqrt[3]{a^6b^2} = \left(a^6b^2\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{6}{3}}b^{\frac{2}{3}} = a^2b^{\frac{2}{3}}$

Dæmi. Breytum eftirfarandi veldum í rætur:

a) $5^{\frac{1}{4}}$ b) $5^{\frac{3}{4}}$ c) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{7}}$ d) $6^{\frac{1}{2}}$

Lausn: a) $\sqrt[4]{5}\ (\approx 1{,}4953)$ b) $\sqrt[4]{5^3}\ (\approx 3{,}3437)$ c) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[7]{b^3}$ d) $\sqrt{6}\ (\approx 2{,}4495)$

Dæmi. Breytum í veldi og reiknum með veldareglum:

a) $\sqrt[3]{a^2b^5} \cdot \sqrt[5]{a^{10}b^2} \cdot \sqrt[3]{4^9}$

Lausn: a) $\sqrt[3]{a^2b^5} \cdot \sqrt[5]{a^{10}b^2} \cdot \sqrt[3]{4^9} = a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{10}{5}}b^{\frac{2}{5}} \cdot 4^{\frac{9}{3}} = 4^3 \cdot a^{2\frac{2}{3}} \cdot b^{2\frac{1}{15}} = 64\,a^{\frac{8}{3}}b^{\frac{31}{15}}$. Hér hefur veldareglan $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ verið notuð til að reikna saman veldisvísana fyrir a og b.

Það má líka svara svona: $64a^2 \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot b^2 \cdot b^{\frac{1}{15}} = 64a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot b^2 \cdot \sqrt[15]{b}$ eða $64 \cdot \sqrt[3]{a^8} \cdot \sqrt[15]{b^{31}}$.

Einföldun talnaróta

Það er kallað að einfalda rót ef hún er rituð sem margfeldi af heilli tölu og (sams konar) rót með lægri rótarstofni.Til dæmis er $\sqrt{50} = 5 \cdot \sqrt{2}$ og $\sqrt[3]{128} = 4 \cdot \sqrt[3]{2}$.

Hér verður sýnt hvernig hægt er að einfalda ferningsrót (aðra rót) og teningsrót (þriðju rót). Þó að hægt sé að beita veldareglum við einföldun róta er þægilegra að beita samsvarandi rótarreglum. Með því að nota sambandið á milli velda og róta og veldaregluna $(ab)^n = a^nb^n$ fæst

Regla: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Sönnun: $\sqrt[n]{ab} = (ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Ferningsrætur

Lykillinn að einföldun ferningsróta eru ferningstölur en það eru tölurnar
1 , 4 , 9, 16 , 25 , 36 , …. Þessar tölur eru fengnar með því að setja náttúrlegu tölurnar í annað veldi.
Ef dregin er ferningsrót af ferningstölu er útkoman heil tala. Engar aðrar tölur hafa ferningsrót sem er heil tala.

Dæmi. $\sqrt{64} = 8$. Talan 64 er ferningstala og við drögum rótina beint.

Dæmi. Einfaldaðu $\sqrt{75}$.

Lausn: $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{3}$.

Talan 75 er ekki ferningstala en talan 25 sem er ferningstala er þáttur í 75. Við þáttum þá töluna 75 í margfeldið $25 \cdot 3$, drögum ferningsrótina af 25 sem er 5 en ekki af þristinum (því að þá fæst flókið tugabrot). Við getum sparað okkur skriftir og ritað beint $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5 \cdot \sqrt{3}$

Aðferðin er þá sem hér segir: Ef einfalda á ferningsrót, drögum við hana beint ef talan er ferningstala en annars finnum við stærstu ferningstölu sem er þáttur í rótarstofni, drögum ferningsrót af ferningsþættinum en ekki af hinum þættinum sem situr þá eftir inni í rótinni.

Hér er annað dæmi.

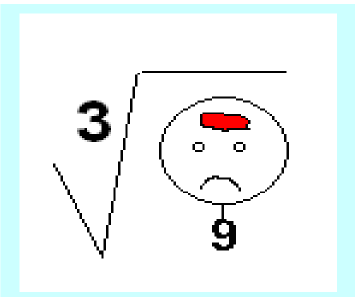
Dæmi. $\sqrt{90} = \sqrt{9 \cdot 10} = 3 \cdot \sqrt{10}$

Teningsrætur

Teningsrætur eru einfaldaðar á hliðstæðan hátt. Lykillinn að einfölduninni eru teningstölur, en það eru tölurnar 1 , 8 , 27 , 64 , 125 , … Þessar tölur eru fengnar með því að setja náttúrlegu tölurnar í þriðja veldi. Taktu eftir að tala getur bæði verið ferningstala og teningstala. Talan 64 er 8^2 og einnig 4^3. Það er vegna þess að talan 64 er jöfn tölunni 2^6 og bæði 2 og 3 ganga upp í veldisvísinn 6. Næsta tala sem er bæði fernings- og teningstala er talan $3^6 = 729$.

Dæmi. $\sqrt[3]{125} = 5$. Talan 125 er teningstala og við reiknum rótina beint.

Dæmi. $\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{9} = 2 \cdot \sqrt[3]{9}$. Talan 72 er ekki teningstala en teningstalan 8 er þáttur í 72. Við þáttum þá töluna 72 í margfeldið $8 \cdot 9$, drögum teningsrótina af 8 en nían situr eftir inni í rótinni með sárt ennið.



Dæmi. Einfaldaðu $\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt{75}$.

Lausn: Hér þarf að finna teningsþátt í tölunni 54 og ferningsþátt í tölunni 75. Þar með fæst: $\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt{75}=\sqrt[3]{27\cdot 2}\cdot\sqrt{25\cdot 3}=3\cdot\sqrt[3]{2}\cdot 5\sqrt{3}=15\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}$.

Til að einfalda fjórðu rót notum við svo fjórðuveldistölur (1 , 16, 81 , 256 , . . .) o.s.frv..

Að eyða ferningsrót úr nefnara

Ef ferningsrót er í nefnara brots er hægt að lengja brotið þannig að rótin flytjist í teljarann og nefnarinn verði heil tala.

Dæmi. Lengdu brotið $\frac{2}{\sqrt{3}}$ þannig að nefnarinn verði heil tala.

Lausn: Í nefnaranum er aðeins einn liður og það nægir að lengja brotið með rótinni sem er í nefnaranum þ.e. með $\sqrt{3}$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Dæmi. Lengdu brotið $\frac{2}{5-\sqrt{3}}$ þannig að nefnarinn verði heil tala.

Lausn: Nefnarinn er liðastærð og það dugar ekki að lengja með $\sqrt{3}$. Hér felst lausnin í að lengja með stærð sem er samoka stæðunni í nefnaranum þ.e. með $5+\sqrt{3}$:

$$\frac{2}{5-\sqrt{3}}=\frac{2\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(5+\sqrt{3}\right)}{25-3}=\frac{2\left(5+\sqrt{3}\right)}{22}=\frac{5+\sqrt{3}}{11}.$$

Í síðasta skrefinu var brotið stytt með 2.

10. kafli Annars stigs jöfnur

Jöfnurnar $x^2 - 4x + 7 = 0$, $x^2 = 16$, $9x^2 - 36 = 0$ og $7x^2 - 15x = -2$ eru allar dæmi um jöfnur sem kallast annars stigs jöfnur. Almenn annars stigs jafna er jafna sem hægt er að rita á forminu

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

þar sem a, b og c eru rauntölur sem kallast stuðlar og $a \neq 0$.

Jöfnurnar fjórar hér að ofan er allar hægt að rita á þessu formi.

Í almennri annars stigs jöfnu er óþekkta stærðin (venjulega x) bæði í fyrsta veldi og öðru veldi. Það eru því tvær gerðir af óþekktum liðum, x-liður og x^2-liður, og því er ekki hægt að einangra x-ið á sama hátt og í fyrsta stigs jöfnu. Hvernig eru annars stigs jöfnur leystar? Aðalaðferðin (og sú sem alltaf er hægt að nota) er formúla sem verður leidd út, en fyrst skulum við ahuga tvær einfaldari aðferðir sem duga á sumar annars stigs jöfnur.

Tilviki 1: Ef b = 0 (það er enginn x-liður í jöfnunni, bara x^2-liður) er hægt að rita jöfnuna á forminu $x^2 = p$ og leysa hana með því að draga ferningsrót (talan p má ekki vera neikvæð). Ef p > 0 eru lausnirnar tvær: $\sqrt{p}$ og $-\sqrt{p}$. Ef talan p er neikvæð hefur jafnan ekki lausn, réttara er reyndar að segja að hún hafi ekki rauntölulausn. Ef p = 0 hefur jafnan eina lausn sem er x = 0.

Dæmi. Leystu jöfnuna $x^2 = 16$.

Lausn: Dragðu ferningsrót báðum megin jafnaðarmerkisins. Þá fæst $x = \sqrt{16} = 4$ en $x = -\sqrt{16} = -4$ er líka lausn. Lausnirnar eru tvær og við getum skrifað þær í einu lagi: $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$.

Dæmi. Leystu jöfnuna $x^2 = -9$.

Lausn: Þessi jafna hefur ekki rauntölulausn því að engin rauntala getur verið ferningsrót af mínustölu.

Dæmi. Leystu jöfnuna $x^2 = 14$.

Lausn: Dragðu ferningsrót af báðum hliðum og mundu eftir mínuslausninni:
$x = \pm\sqrt{14} \approx \pm 3{,}742$.

Dæmi: Leystu jöfnuna $9x^2 - 36 = 0$.

Lausn: Hér þarf fyrst að umrita jöfnuna og koma henni á formið $x^2 = p$.
Fyrst færum við 36 yfir jafnaðarmerkið og síðan deilum við með 9:

$$9x^2 = 36$$
$$x^2 = 4$$

Nú leysum við jöfnuna með því að draga rót og munum eftir mínuslausninni:
$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

Þessa aðferð má einnig nota á jöfnur sem eru á forminu $(x+a)^2 = p$ og líka $(x-a)^2 = p$.

Dæmi. Leystu jöfnuna $(x+2)^2 = 25$.

Lausn: Fyrst er dregin ferningsrót og þá fæst

$x + 2 = \pm 5$.

Þetta gefur okkur tvær fyrsta stigs jöfnur $x + 2 = 5$ og $x + 2 = -5$,
sem við leysum á venjulegan hátt; þ.e. með því að einangra x-ið.
Fyrri jafnan hefur lausnina x = $5 - 2 = 3$ en seinni jafnan hefur lausnina $x = -5 - 2 = -7$.

Tilvik 2. Hægt er að þátta annars stigs jöfnuna.

Þessi aðferð byggist á eftirfarandi eiginleika rauntalnanna:
Ef margfeldi tveggja talna er 0 þá hlýtur a.m.k. önnur talan að vera 0.

Það er mjög mikilvægt að taka eftir að til að hægt sé að beita aðferðinni sem nú verður lýst þá þurfa **allir liðir jöfnunnar að vera í sömu hlið jöfnunnar**.

Dæmi. Leystu jöfnuna $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Lausn: Þáttaðu vinstri hlið jöfnunnar:
$(x-2)\cdot(x-3) = 0$
Nú verður annar hvor þátturinn að vera 0 fyrst margfeldið er 0 og það gefur tvær jöfnur
$x - 2 = 0$ og $x - 3 = 0$
Við leysum hvora jöfnu fyrir sig (einangrum x-ið) og svarið verður
x = 2 eða x = 3

Dæmi. Leystu jöfnuna $x^2 = -6x$.

Lausn: Höfum liðina sömu megin: $x^2 + 6x = 0$.
Þáttum vinstri hliðina: $x \cdot (x + 6) = 0$.
Þá fást tvær jöfnur: $x = 0$ og $x + 6 = 0$.
Þetta gefur okkur lausnirnar $x = 0$ eða $x = -6$.

Þessari aðferð er alltaf hægt að beita ef c = 0 í annars stigs jöfnunni því þá er hægt að þátta hana með því að taka x-ið út fyrir sviga. Það er ágæt regla að nota þessa aðferð á jöfnur sem þú sérð á svipstundu að hægt er að þátta. Hún dugar samt ekki á jöfnu eins og til dæmis $x^2 + 7x - 9 = 0$.

Nú verður fjallað um meginaðferðina til að leysa annars stigs jöfnur. Miðað er við að jafnan sé á forminu $ax^2 + bx + c = 0$, það er að **allir liðirnir séu sömu megin.**

Lausn jöfnunnar er falin í stuðlum jöfnunnar þ.e. tölunum a, b og c og er gefin með eftirfarandi formúlu:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Stærðin $b^2 - 4ac$ kallast aðgreinir jöfnunnar og verður framvegis táknuð með D.

Þá eru lausnirnar: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ og $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ sem við getum skrifað í einu lagi sem

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.}$$

Það ræðst af formerki stærðarinnar D hvort jafnan hefur tvær, eina eða enga rauntölulausn.

i) Ef D > 0 (þ.e. ef D er plústala) þá eru tvær rauntölulausnir á jöfnunni (tvær lausnir).

ii) Ef D = 0 er ein rauntölulausn.

iii) Ef D < 0 (þ.e. ef D er mínustala) þá er engin rauntölulausn (engin lausn).

Taktu eftir að talan $-b$ í lausnarformúlunni er gagnstæð við töluna b í jöfnunni. Taktu líka eftir að talan b^2 sem er fyrri liðurinn í kvaðratrótinni er alltaf plústala.

Dæmi. Leystu jöfnuna $7x^2 - 15x = -2$.

Lausn: Höfum alla liðina sömu megin: $7x^2 - 15x + 2 = 0$
Þá sést að a = 7 , b = –15 og c = 2.
Reiknum nú $D = b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = 169$.
Þar sem D er plústala verða tvær lausnir á dæminu og við reiknum þær í tvennu lagi:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{15 + \sqrt{169}}{2 \cdot 7} = \frac{15 + 13}{14} = \frac{28}{14} = 2$$

$$x_2 = \frac{15 - \sqrt{169}}{2 \cdot 7} = \frac{15 - 13}{14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}.$$

Taktu eftir að fyrst b er mínustala þá er talan – b í formúlunni plústala.

Dæmi. Leystu jöfnuna $x^2 + 18x + 81 = 0$.

Lausn: Hér er a = 1 , b = 18 og c = 81 og þá er $D = 18^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81 = 0$. Jafnan hefur þá bara eina lausn og hún er
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-18 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-18}{2} = -9$ (ferningsrótin af 0 er 0).

Þessa jöfnu hefði líka verið hægt að leysa með þáttunaraðferðinni, sem hefði gefið tvær eins jöfnur.

Dæmi. Leystu jöfnuna $x^2 - 4x + 7 = 0$.

Lausn: Hér er a = 1 , b $= -4$, c = 7 og $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -12$. Talan D er mínustala svo jafnan hefur enga lausn (enga rauntölulausn) því að ferningsrót af mínustölu er ekki rauntala.

Lausnir annars stigs jöfnunnar eru sjaldnast heilar tölur. Þær eru þá gefnar upp sem tugabrot með tveimur til þremur aukastöfum eða rótarstærðir sem ekki er reiknað út úr.

Dæmi. Leystu jöfnuna $2x^2 + 3x - 4 = 0$.
Lausn: a = 2 , b = 3 , c = – 4 og $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 41$.
Lausnirnar eru þá $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}$

eða ef ferningsrótin er námunduð með vasareikni
$x_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{41}}{4} \approx 0{,}851$ og $x_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{41}}{4} \approx -2{,}351$.

Athugasemd: Þegar þú reiknar svarið á vasareikninn þarftu að setja sviga utan um teljarann!

Dæmi. Finndu stuðulinn b ef gefið er að jafnan $4x^2 + bx + 25 = 0$ hefur eina lausn.

Lausn: Annars stigs jafna hefur eina lausn ef D = $b^2 - 4ac = 0$. Þetta gefur okkur jöfnuna $b^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 0$
svo $b^2 - 400 = 0$
svo $b^2 = 400$
svo $b = \pm 20$

Orðadæmi

Annars stigs jöfnur leynast víða og oft felst lausn dæmis í því að setja upp annars stigs jöfnu og leysa hana. Lítum á nokkur dæmi.

Dæmi. Í rétthyrningi er ein hlið 7 cm lengri en önnur. Flatarmál rétthyrningsins er 471,75 cm^2. Finndu lengdir hliða rétthyrninginsins.

Lausn: Látum styttri hliðina vera x. Þá er lengri hliðin x + 7. Flatarmál rétthyrnings er $F = a \cdot b$ þar sem a og b eru hliðarnar. Þar með fæst jafnan:
$x(x+7) = 471{,}75$
svo $x^2 + 7x - 471{,}75 = 0$.
Þetta er annars stigs jafna sem við leysum með annars stigs formúlunni
($a = 1$, $b = 7$, $c = -471{,}75$).
Lausnir jöfnunnar eru: x = 18,5 eða x = – 25,5 en þar sem x var hlið í rétthyrningi verður x að vera plústala svo dæmið hefur aðeins eina lausn: x = 18,5 cm. Lengri hliðin er þá 25,5 cm.

Dæmi. Finndu tvær tölur sem hafa summuna 102 og margfeldið 1817.

Lausn: Köllum aðra töluna x og hina y. Við höfum þá jöfnuhneppi:

I) x + y = 102 og II) $x \cdot y = 1817$. Við leysum það með innsetningaraðferðinni:
y = (102 – x)
$x \cdot (102 - x) = 1817$ (y-ið er einangrað úr fyrri jöfnunni og sett inn í seinni jöfnuna) :
svo $-x^2 + 102x - 1817 = 0$
svo $x^2 - 102x + 1817 = 0$.
Þetta er annars stigs jafna með a = 1 , b = – 102 og c = 1817 og annars stigs formúlan gefur x = 79 eða x = 23. Lausnin x = 79 gefur y = 23 og lausnin
x = 23 gefur y = 79 svo tölurnar eru 23 og 79.

Dæmi. Flestir vita að hemlunarveglengd bifreiðar eykst ef hraði bifreiðarinnar er aukinn. Eftirfarandi formúla lýsir sambandinu á milli hemlunarvegalengdarinnar s í metrum og hraðans x í km/klst: $s = 0{,}006x^2 + 0{,}3x$. Finndu
i) hemlunarvegalengdina ef hraðinn x = 90 km/klst;
ii) hraðann x ef hemlunarvegalengdin er 50 m.

Lausn: Í þessu dæmi er jafnan gefin.
i) Við reiknum hemlunarvegalengina með formúlunni: $s = 0{,}006 \cdot 90^2 + 0{,}3 \cdot 90 = 75{,}6\,\mathrm{m}$.
ii) Við setjum s = 50 inn í formúluna og fáum annars stigs jöfnuna: $50 = 0{,}006x^2 + 0{,}3x$ sem við leysum á viðeigandi hátt (færum alla liði í aðra hlið og notum annars stigs formúluna). Lausnin verður x = 69,6 km/klst. (x = – 119,6 er ekki lausn á dæminu því hraðinn er plústala.)

Rótarjöfnur

Rótarjöfnur eru jöfnur þar sem óþekkta stærðin (x-ið) er inni í rót. Rótarjöfnur eru leystar með því að einangra rótarliðinn og hefja jöfnuna í veldi sem eyðir rótinni. (Annað veldi ef x-ið er inni í ferningsrót.) Prófa verður lausnirnar með því að setja þær inn í rótarjöfnuna því að fram geta komið ógildar lausnir.

Dæmi. Leystu jöfnuna $\sqrt{2x+5} + 5 = x$.
Lausn:

1. skref. Einangra þarf rótarliðinn frá öðrum liðum og því þarf að færa liðinn 5 yfir í hægri hlið.

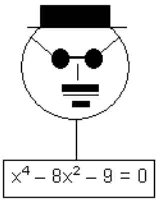
$\sqrt{2x+5} = x - 5$

2. skref. Nú eru báðar hliðar settar í annað veldi. Taktu eftir að settur er svigi utan um hvora hlið og annað veldi á svigann!

$\left(\sqrt{2x+5}\right)^2 = (x-5)^2$. Nú er hvor hlið reiknuð. Annað veldið og rótin eyða hvort öðru.

$2x + 5 = x^2 - 10x + 25$
Nú er komin venjuleg annars stigs jafna og hún er leyst með því að færa alla liðina í aðra hlið og þátta hana:
$x^2 - 12x + 20 = 0$,
svo
$(x-10)\cdot(x-2) = 0$,
svo $x - 2 = 0$ eða $x - 10 = 0$,
svo x = 2 eða x = 10 .

3. skref. Prófun: $\sqrt{2 \cdot 10 + 5} + 5 = 10$. x = 10 passar.
$\sqrt{2 \cdot 2 + 5} + 5 = 8 \neq 2$. Talan x = 2 passar ekki. Jafnan hefur því bara eina lausn x = 10.



Dulbúnar annars stigs jöfnur

Hægt er að breyta sumum jöfnum í annars stigs jöfnur og leysa þær með formúlunni með því að gefa stærðum annað heiti. Lítum á dæmi til skýringar.

Dæmi. Leystu jöfnuna $2x^4 - 5x^2 + 3 = 0$.

Lausn: Þessi jafna er af fjórða stigi en ekki er allt sem sýnist. Gefum stærðinni x^2 heitið t þ.e. $t = x^2$. Þá verður $t^2 = x^4$. Sé þetta sett inn í jöfnuna breytist hún í annars stigs jöfnuna $2t^2 - 5t + 3 = 0$. Hana má leysa t.d. með þáttun:

$$(t-1)(2t-3) = 0$$
$$t - 1 = 0 \text{ eða } 2t - 3 = 0$$
$$t = 1 \text{ eða } t = 1{,}5$$

Nú setjum við x^2 inn í staðinn fyrir t-ið og fáum þá tvær annars stigs jöfnur. Það sem hefur í rauninni gerst er að fjórða stigs jafnan hefur þáttast í tvær annars stigs jöfnur sem eru:
$x^2 = 1$ og $x^2 = 1{,}5$
Þær er hægt að leysa beint með því að draga rót og þá fæst:
$x = \pm 1$, $x = \pm\sqrt{1{,}5} \approx \pm 1{,}22$.

Í stað þess að breyta x^2 í t er líka hægt að þátta jöfnuna beint í tvo sviga og setja þá x^2 sem fyrri lið í báðum svigunum.

Í annars stigs formúlunni kemur fram samband á milli róta (lausna) annars stigs jöfnu og stuðlanna a, b og c. Þetta er ekki eina sambandið á milli rótanna og stuðlanna. Hér er regla sem er sönnuð á næstu síðu:

Regla. Ef tölurnar x_1 og x_2 eru rætur annars stigs jöfnunnar $ax^2 + bx + c = 0$ þá er

i) $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ og

ii) $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

Þessa reglu er til dæmis hægt að nota til að athuga hvort rætur séu réttar og einnig til að búa til annars stigs jöfnu sem hefur tilteknar rætur.

Dæmi. Búðu til annars stigs jöfnu sem hefur ræturnar 6 og 8.

Lausn: Búum til annars stigs jöfnu sem hefur a = 1. Notum (i) til að finna b.
$6+8=\frac{-b}{1}$ þá er $14=-b$ svo $b=-14$. Notum svo (ii) til að finna c.
$6\cdot 8=\frac{c}{1}$ þá er $c=48$ og jafnan er $x^2-14x+48=0$.

Hægt er að finna fleiri slíkar jöfnur með því að margfalda þessa tilteknu jöfnu með einhverri tölu. Þannig hefur jafnan $2x^2-28x+96=0$ einnig ræturnar 6 og 8.

Dæmi. Búðu til annars stigs jöfnu sem hefur rætur -4 og 5 og a = 2.

Lausn: Fáum fyrst $-4+5=\frac{-b}{2}$ sem gefur $b=-2$ og síðan $-4\cdot 5=\frac{c}{2}$ eða $c=-40$ og jafnan verður $2x^2-2x-40=0$.

Sönnun á reglu:

Látum x_1 og x_2 vera rætur jöfnunnar $ax^2+bx+c=0$. Þá er

i) $x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$

ii) $x_1\cdot x_2=\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}\cdot\frac{\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$

Ég held ég skilji þetta næstum. Einhver sem kann þrjá fyrstu stafina í stafrófinu er búinn að búa til jafning úr tveimur gulrótum og svo . . .

Að fylla í ferninginn

Til að leiða út lausnaformúluna fyrir annars stigs jöfnur þarf að beita aðferð sem kallast að “fylla í ferninginn”. Henni verður nú lýst.

Stærðin $(x+p)^2 = x^2 + 2px + p^2$ kallast fullkominn ferningur. Taktu eftir að seinni liðurinn í sviganum (p-ið) er helmingurinn af x-stuðlinum í hægri hliðinni og síðasti liðurinn í hægri hliðinni (p^2 -liðurinn) er annað veldi af seinni liðnum í sviganum. Þetta er hægt að nota til að umrita annars stigs jöfnu yfir á formið $(x+p)^2 = q$ og leysa síðan með því að draga ferningsrót.

Dæmi. Leystu $x^2 + 6x - 5 = 0$.

Lausn:

1. skref. Umritaðu jöfnuna. Hafðu x^2-liðinn og x-liðinn vinstra megin og fasta liðinn hægra megin. Þá fæst:
$x^2 + 6x = 5$.

2. skref. Breyttu nú vinstri hliðinni í fullkominn ferning með því að bæta tölunni 9 við báðar hliðar. Talan 9 fæst á eftifarandi hátt: x-stuðullinn er 6, helmingurinn af 6 er 3 og $3^2 = 9$.

$$x^2 + 6x + 9 = 5 + 9.$$

3. skref. Ritaðu nú vinstri hliðina sem fullkominn ferning:

$$(x+3)^2 = 14.$$

Leystu nú jöfnuna með því að draga ferningsrót og einangra x-ið. Mundu að jafnan hefur tvær lausnir. Þegar dregin er ferningsrót fæst bæði plúslausn og mínuslausn:

$x + 3 = \sqrt{14}$ eða $x + 3 = -\sqrt{14}$ sem gefur $x = -3 + \sqrt{14}$ eða $x = -3 - \sqrt{14}$
Lokasvar er þá $x = -3 \pm \sqrt{14}$.

Í þessu dæmi var a = 1 en ef a-stuðulinn er ekki 1 má byrja á deila í jöfnuna með a-stuðlinum og fylla síðan í ferninginn. Ekki er ráðlegt að nota þessa aðferð ef stuðlarnir eru brot eða tugabrot.

Annars stigs formúlan leidd út

$ax^2 + bx + c = 0$	Til að forðast brot er byrjað á að margfalda jöfnuna með stærðinni 4a. Þá fæst jafnan
$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$	Næst er liðurinn 4ac færður í hægri hlið.
$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$	Nú er liðnum b^2 bætt við báðum megin til að vinstri hliðin breytist í fullkominn ferning.
$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$	
	Næst er vinstri hliðin skrifuð sem ferningsstærð.
$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$	Nú er jafnan leyst með því að draga ferningsrót.
$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$	Þá er bara eftir að einangra x-liðinn. Fyrst er b-liðurinn færður til hægri:
$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$	að síðustu er deilt með 2a:
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$	

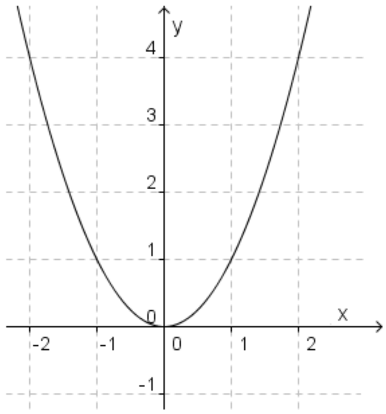
Vasareiknirinn

Þú getur leyst annars stigs (og þriðja stigs jöfnur) jöfnur í vasareikninum. Veldu EQUA (stytting úr equation sem þýðir jafna) í aðalvalmyndinni og síðan F2 eða POLY (stytting úr polynomial sem þýðir margliða) og síðan F1 fyrir annars stigs jöfnu (en F2 fyrir þriðja stigs jöfnu). Þá birtist tafla og þú þarft að slá inn stuðlana a, b og c. Gert er ráð fyrir að að jafnan sé á forminu $ax^2 + bx + c = 0$. Síðan velur þú F1 (SOLV) og þá birtast lausnir jöfnunnar á skjánum. Þú skalt varast að ofnota vasareikninn því þú þarft sjálf(ur) að kunna að leysa annars stigs jöfnur og geta rökstutt niðurstöðu með útreikningum.

11. kafli Fleygbogar

Graf annars stigs jöfnunnar $y = ax^2 + bx + c$ kallast fleygbogi. Einfaldasti fleygboginn er graf annars stigs jöfnunnar $y = x^2$. Í töflunni hér fyrir neðan eru reiknaðir nokkrir punktar á grafinu. Nokkur x-gildi eru valin og y-gildin reiknuð með jöfnunni.

x	y
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9



Punktarnir eru síðan merktir inn í hnitakerfi og tengdir með ferli (sjá mynd).

Fleygboginn hefur nokkur mikilvæg einkenni.

1. skref. Grafið opnast upp (hefur botnpunkt) ef a-stuðullinn er plústala (a > 0) en grafið opnast niður (hefur topppunkt) ef a-stuðullinn er mínustala (a < 0).

2. skref. c-stuðullinn segir til um hvar fleygboginn sker y-ásinn. Punkturinn (0 , c) er skurðpunktur fleygbogans og y-ássins.

3. skref. Samhverfa. Grafið hefur samhverfuás. Samhverfuásinn er lóðrétt lína sem skiptir grafinu í tvo hluta sem eru spegilmyndir hvors annars. y-ásinn er samhverfuás annars stigs jöfnunnar $y = x^2$.
Það ræðst af stuðlunum a og b hver samhverfuásinn er. Jafna hans er gefin með formúlunni: $x = -\dfrac{b}{2a}$.

4. skref. Skurðpunktur fleygbogans og samhverfuássins kallast **topppunktur**. Topppunkturinn er ýmist á toppnum eða botninum eftir því hvernig fleygboginn snýr.
x-hnit (fyrra hnit) topppunkstins er líka gefið með reglunni $x = -\dfrac{b}{2a}$
y-hnit topppunksins er best að finna út frá jöfnu grafsins, en líka má nota formúluna:
$y = -\dfrac{D}{4a} = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

5. skref. Lausnir annars stigs jöfnunnar $ax^2 + bx + c = 0$ segja til um hvar fleygboginn sker x-ásinn (punktar á y-ási hafa x-hnitið 0). Skurðpunktar við x-ás eru $\left(\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}, 0\right)$ og $\left(\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}, 0\right)$ ef D er jákvæð tala. Ef D = 0 renna þessir tveir punktar saman í einn punkt og ef D er neikvæð tala eru engir skurðpunktar við x-ás. Þá er fleygboginn annað hvort yfir x-ásnum (ef a er jákvæð tala) eða undir x-ásnum (ef a er neikvæð tala).

Punktarnir sem fram koma í skrefum 2, 4 og 5 hér á undan eru oftast nógu margir til að rissa megi fleygbogann upp. En það má einnig reikna út viðbótarpunkta með því að gera gildistöflu.

Dæmi. Teiknaðu fleygbogann $y = x^2 + 4x + 3$.

Lausn: Stuðlarnir eru a = 1, b = 4 og c = 3

1. skref. a = 1 er jákvæð tala. Því opnast fleygboginn upp og topppunkturinn er á botninum.

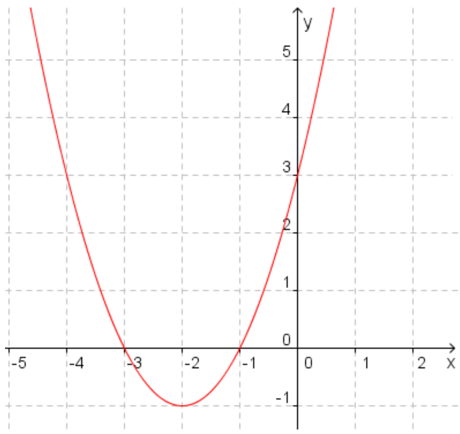
2. skref. c = 3 svo fleygboginn sker y-ás í punktinum (0 , 3).

3. skref. Jafna samhverfuáss = x-hnit topppunkts er $x = -\dfrac{4}{2 \cdot 1} = -2$

4. skref. y-hnit topppunkts finnst með því að setja x-hnit hans inn í jöfnu fleygbogans:
$y = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 3 = -1$. Topppunkturinn er T = (– 2 , – 1).

5. skref. Annars stigs jafnan $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1) = 0$ hefur lausnirnar x = – 1 og x = – 3 svo skurðpunktar fleygbogans og x-ássins eru (– 3 , 0) og (–1 , 0).

Séu punktarnir sem fram koma í skrefum 2, 4 og 5 merktir inn í hnitakerfi og tengdir með ferli fæst svona mynd.



Jafna samhverfuásssins

Hægt er að leiða út jöfnu samhverfuássins með því að nota að samhverfuásinn er mitt á milli skurðpunkta fleygbogans við x-ásinn. Meðaltalið af lausnum annars stigs jöfnunnar $ax^2 + bx + c = 0$ gefur:

$$x = \frac{\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} + \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}}{2} = \frac{\dfrac{-2b}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Hm. Hýtur að vera sama og skurðgrafa . . .
Loksins eitthvað skemmtilegt.

Skurðpunktar grafa

En spennandi!
Skyldu þeir finna fjársjóð?

Ef þú teiknar tvo fleygboga eða fleygboga og línu (eða tvær línur) inn í hnitakerfi geta komið fram skurðpunktar. Hægt er að reikna hnit skurðpunktanna ef jöfnur fleygboganna (línanna) eru gefnar.

Dæmi. Finndu með reikningi skurðpunkt(a) fleygbogans $y = 2x^2 - 3x + 1$ og línunnar $y = x + 1$.

Lausn: Við erum að leita að punkti sem passar inní báðar jöfnurnar. Því þarf y-ið í jöfnu fleygbogans að vera jafnt og y-ið í jöfnu línunnar. Þar með fæst annars stigs jafnan:

$2x^2 - 3x + 1 = x + 1$
svo $2x^2 - 4x = 0$
Við þáttum jöfnuna, fáum tvær jöfnur og leysum:
$x(2x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$.

Lausnirnar eru tvær svo skurðpunktarnir eru tveir og við höfum fundið x-hnit beggja skurðpunktanna. Eftir er að finna y-hnit skurðpunktanna. Það er gert með því að setja viðeigandi x-hnit inn í jöfnu línunnar eða jöfnu fleygbogans. Það gefur sömu niðurstöðu enda eru y-in jöfn í skurðpunkti. Jafna línunnar er einfaldari svo við notum hana. Þá fæst:

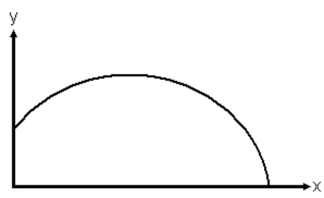
$x = 0 \Rightarrow y = 0 + 1 = 1$ sem gefur skurðpunktinn $(0,1)$
$x = 2 \Rightarrow y = 2 + 1 = 3$ sem gefur skurðpunktinn $(2,3)$.

Dæmi. Reiknaðu skurðpunkta fleygboganna $y = 2x^2 - 5x + 3$ og $y = -x^2 - 4x + 2$.

Lausn: Leysa þarf jöfnuna: $2x^2 - 5x + 3 = -x^2 - 4x + 2$.
Færum alla liði í aðra hlið, þá fæst: $3x^2 - x + 1 = 0$.
Jafnan hefur enga lausn því að $D = b^2 - 4ac = 1 - 12 = -11 < 0$ svo fleygbogarnir skerast ekki.

Lítum á eitt dæmi um hagnýta notkun fleygboga.

Dæmi: Braut kúlu er gefin með formúlunni $y = 1{,}8 + x - 0{,}05x^2$ þar sem y er hæð kúlunnar í metrum yfir jörð og x er lárétt kastlengd í metrum meðfram jörðu.
Hver er mesta hæð kúlunnar og hversu langt frá kaststað lendir kúlan?



Lausn: Til að finna mestu hæð kúlunnar þurfum við að reikna y-hnit topppunktsins.:

Stuðlarnir eru a = – 0,05 , b = 1 og c = 1,8.

x- hnitið í topppunktinum er $x = \frac{-1}{2\cdot(-0{,}05)} = 10$ og þá er $y = 1{,}8 + 10 - 0{,}05\cdot 10^2 = 6{,}8\,\text{m}$.

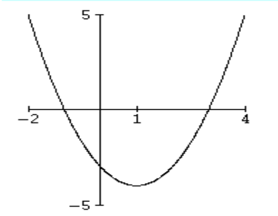
Til að finna hversu langt frá kaststað kúlan lendir setjum við y = 0 og leysum jöfnuna

$0 = 1{,}8 + x - 0{,}05x^2$ með annars stigs formúlunni. Lausnirnar eru
$x_1 \approx -1{,}7\,\text{m}$ og $x_2 \approx 21{,}7$ m svo kastlengdin er 21,7 m.

Graf fleygbogans og formerki stuðla

Hægt er að finna formerki stuðlanna a, b og c og aðgreinisins $D = b^2 - 4ac$ út frá grafi fleygbogans $y = ax^2 + bx + c$ eins og fram kemur í næsta sýnidæmi.

Dæmi. Á myndinni sést graf fleyboga $y = ax^2 + bx + c$.
Finndu formerki stuðlanna a, b og c og formerki aðgreinisins D.



Lausn: Fleygboginn opnast upp svo a > 0.

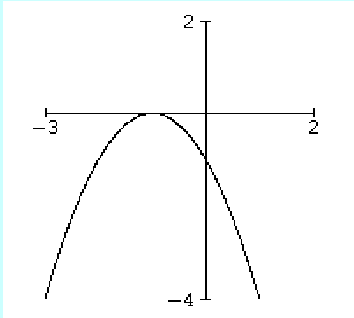
Þar sem samhverfuásinn er hægra megin við y-ásinn er talan $x = -\frac{b}{2a}$ plústala. Fyrst a er plústala og brotið $-\frac{b}{2a}$ er einnig plústala hlýtur b að vera mínustala svo. b < 0.

Fleygboginn sker y-ásinn fyrir neðan x-ásinn svo c < 0.

Þar sem skurðpunktar við x-ás eru tveir hefur jafnan $ax^2 + bx + c = 0$ tvær rætur þannig að D > 0.

Dæmi. Teiknaðu fleygboga með a < 0, b < 0, c < 0 og D = 0.

Lausn: Fleygboginn opnast niður fyrst a < 0. Samhverfuásinn er vinstra megin við y-ásinn því að talan $x = -\dfrac{b}{2a}$ er neikvæð fyrst a og b hafa sama formerki (báðar neikvæðar).
Fleygboginn sker y-ásinn fyrir neðan x-ásinn fyrst c < 0.
D = 0 svo jafnan $ax^2 + bx + c = 0$ hefur bara eina rót. Þetta þýðir að fleygboginn sker x-ásinn nákvæmlega einu sinni.



Formið $y = a(x-h)^2 + k$

Dæmi. Reiknaðu hnit topppunkts fleygbogans $y = (x-2)^2 + 3$.

Lausn: Ef reiknað er upp úr sviganum fæst jafnan $y = x^2 - 4x + 7$ svo að a = 1 og b = – 4.
Jafna samhverfuássins = x-hnit topppunkts er:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2 \text{ og y-hnitið verður } y = (2-2)^2 + 3 = 3.$$

Topppunkturinn í dæminu hér á undan er T = (2 , 3) en það eru einmitt tölurnar tvær sem koma fram í stæðunni $(x-2)^2 + 3$. Þetta er engin tilviljun, hér á ferðinni almenn regla:

Regla: Fleygboginn sem gefinn er með jöfnunni $y = a(x-h)^2 + k$ hefur topppunktinn T = (h , k).

Taktu eftir að formerkið á x–hniti topppunktsins er gagnstætt merkinu í sviganum. Þannig verður x-hnit topppunkts plústala ef það er mínusmerki í sviganum og mínustala ef það er plúsmerki í sviganum. Y-hnit topppunkts hefur hins vegar sama formerki og talan k.
Hér kemur annað dæmi og síðan verður reglan sönnuð.

Dæmi. Finndu topppunkt fleygbogans $y = -3(x+1)^2 - 3$.

Lausn: h = – 1 og k = – 3 svo að samkvæmt reglunni hér á undan er T = (– 1 , – 3).

Snúum okkur nú að sönnun reglunnar hér á undan.

Sönnun: Ef reiknað er upp úr sviganum fæst $y = ax^2 - 2ahx + ah^2 + k$.
Jafna samhverfuássins = x –hnit topppunkts er:

$x = \dfrac{-(-2ah)}{2a} = h$ og y–hnit topppunkts verður $y = a(h - h)^2 + k = k$.

Topppunkurinn er því T = (h , k).

Regluna er til dæmis hægt að nota til að finna jöfnu fleygboga sem hefur tiltekinn topppunkt.

Dæmi. Finndu jöfnu fleygboga sem hefur topppunktinn (4 , – 2).

Lausn: Ein lausn er fleygboginn $y = (x-4)^2 - 2 = x^2 - 8x + 14$. Þessi fleygbogi hefur a = 1 en hnit topppunktsins helst óbreytt þótt settur sé einhver annar a-stuðull fyrir framan svigann. Allar lausnir á dæminu eru gefnar með jöfnunni $y = a(x-4)^2 - 2$.

Dæmi. Finndu jöfnu fleygboga sem hefur topppunktinn (4 , – 2) ef einnig er gefið að punkturinn (2 , – 6) er á fleygboganum.

Lausn: Fleygbogi með topppunktinn (4 , – 2) hefur jöfnuna $y = a(x-4)^2 - 2$.
Punkturinn (2 , – 6) þarf að passa inní jöfnuna því hann er á fleygboganum. Ef talan 2 er sett í staðinn fyrir x og – 6 fyrir y fæst jafnan:

$-6 = a(2-4)^2 - 2$ sem við leysum fyrir a:
$-6 = a(-2)^2 - 2$ svo
$-6 = 4a - 2$ svo
$-4 = 4a$ svo
$-1 = a$
Niðurstaðan er: $y = -(x-4)^2 - 2 = -x^2 + 8x - 18$.

Vasareiknirinn

Þú getur teiknað fleygboga (og önnur gröf) í vasareikninum. Veldu GRAPH í aðalvalmyndinni og sláðu inn formúluna fyrir fleygboganum. Veldu síðan F6 (DRAW). Þá birtist hnitakerfi og mynd af fleygboganum. Hægt er að breyta kvörðunum á ásunum. Það er gert með SHIFT F3 (SHIFT V-Window). Þú getur þá breytt einingum á ásunum að vild eða valið stillinguna F1 (INIT) sem er sjálfgefin eða F4 (STD) en þá verða einingarnar á ásunum minni. Þegar þú hefur fleygboga (eða eitthvert annað graf) á skjánum og styður á SHIFT F5 (SHIFT G-Solv) gefst þér kostur á að finna rætur, topppunkt, skurðpunkt við y-ás og skurðpunkt við annað graf. Þessu er betur lýst í kaflanum um föll. Annar möguleiki á að teikna fleygboga er að velja CONICS í aðalvalmyndinni. Þá getur þú valið á milli formanna $y = ax^2 + bx + c$ og $y = a(x-h)^2 + k$. Í CONICS gefst kostur á að láta x og y skipta um hlutverk og fleygboginn opnast til hægri eða vinstri (“er á hliðinni”).

12. kafli Föll

Það er algengt að ákveðið samband sé á milli tveggja stærða þannig að önnur stærðin ákvarðist af hinni stærðinni. Hér eru nokkur dæmi um slíkt samband.

i) Þegar upphæð er lögð inn á bankareikning sem ber 6% ársvexti þá fer vaxtagreiðslan sem bankinn greiðir ári síðar eftir því hver upphæðin var.

ii) Ef ekið er í bíl á jöfnum hraða í ákveðinn tíma þá fer vegalengdin sem ekin hefur verið eftir því hve langur tími er liðinn.

iii) $y = 3x + 2$. Hér er samband milli tveggja stærða x og y sem gefið er með jöfnu og y-stærðin ákvarðast ef x-stærðin er gefin.

iv) Flatarmál hrings fer eftir því hversu stór radíus hringsins er.

Öll þessi dæmi lýsa fyrirbæri sem kallast fall.

Skilgreining: Ef milli tveggja stærða x og y er samband þannig að hvert leyfilegt gildi á stærðinni x ákvarðar nákvæmlega eitt gildi á stærðinni y er sagt að y sé fall af x.
y-gildin kallast fallgildi.

Oftast er sambandið gefið upp með jöfnu eins og í dæmi iii) en það er einnig hægt að gefa upp með gildistöflu eða lýsa því með orðum.

Algengt er að nota ritháttinn f(x) (eða g(x), h(x),....) sem lesið er: “ f af x ”. Jafnan í dæmi iii) liti þá svona út: f(x) = 3x + 2.

Skilgreining: Mengi allra leyfilegra x-gilda kallast formengi eða skilgreiningarmengi fallsins f og er táknað með D_f.
Mengi allra y-gilda (fallgilda) kallast varpmengi eða myndmengi fallsins f og er táknað með V_f.

Ef y-gildin eru pöruð við tilsvarandi x-gildi og punktarnir (x , y) merktir inn í hnitakerfi fæst graf fallsins.

Það er mikilvægt að geta lesið, fallgildi, skilgreiningarmengi og myndmengi af grafi. Fallgildin eru á y-ásnum, x-gildin á x-ásnum. Skilgreiningarmengið er það mengi á x-ási sem er beint undir (eða yfir) grafinu og myndmengið er það mengi á y-ásnum sem er beint til hægri eða vinstri miðað við grafið.

Strangt til tekið á ávallt að gefa upp skilgreiningarmengi með hverju falli en oft er því sleppt. Er þá gert ráð fyrir að það sé eins stórt og mögulegt er og þá gjarnan allt rauntalnamengið R.

Dæmi. Gefið er fallið $f(x) = x^2 - 5x$, $D_f = R$.
i) Reiknaðu f(1) , f(5) og f(–3).
ii) Finndu x ef f(x) = -6.
iii) Finndu myndmengi fallsins f.

Lausn:
i) $f(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 = 1 - 5 = -4$

$f(5) = 5^2 - 5 \cdot 5 = 25 - 25 = 0$

$f(-3) = (-3)^2 - 5 \cdot (-3) = 9 + 15 = 24$

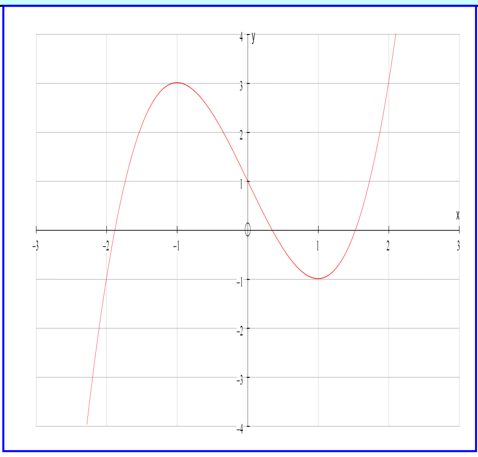
ii) Leysa þarf jöfnuna $x^2 - 5x = -6$ sem er annars stigs jafna. Við færum alla liði í aðra hlið og þáttum (eða notum annars stigs formúluna).

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \;\Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \;\vee x - 3 = 0 \Rightarrow x = 2 \vee x = 3$$

iii) Graf fallsins er fleygbogi sem opnast upp og hefur botnpunkt sem er jafnframt lægsti punkturinn á grafinu því að a = 1 > 0. x-hnit botnpunkts er $x = -\dfrac{b}{2 \cdot a} = -\dfrac{-5}{2 \cdot 1} = 2{,}5$ og y-hnitið fæst með því að setja x-hnitið inn í fallstæðuna:
$y = f(2{,}5) = 2{,}5^2 - 5 \cdot 2{,}5 = -6{,}25$.
y-hnit í botnpunktsins er lægsta y-hnitið á öllu grafinu sem heldur síðan áfram endalaust upp. (Skoðaðu grafið í grafíska vasareikninum). Í myndmenginu eru þá allar tölur frá og með –6,25 og uppúr. Ritað með biltáknum: $V_f = [-6{,}25\,,\ \infty[$.

Dæmi: Á myndinni er graf falls f(x).
Notaðu myndina til að finna:

i) Skilgreiningarmengið.
ii) Myndmengið.
iii) f(-2) , f(0) og f(2).
iv) x ef f(x) = 3.
v) x ef f(x) = 1.



Lausn: i) Við gerum ráð fyrir að grafið haldi áfram endalaust og skilgreiningarmengið er því R (allar rauntölur).
ii) Myndmengið er R.
iii) $f(-2) = -1$, $f(0) = 1$, $f(2) = 3$. (Þegar x = – 2 þá er y = – 1, þegar x = 0 þá er y = 1 og þegar x = 2 þá er y = 3).
iv) Finna á x ef y = 3. Hér eru tvö svör; x = – 1 og x = 2.
v) Finna á x ef y = 1. Svörin eru þrjú; $x \approx -1{,}7$, $x = 0$, $x \approx 1{,}7$.

Á vasareikninum þínum eru mörg algeng föll. Sum eru gefin upp með reiknireglu eins og föllin $x^2, x^{-1}, 10^x$ og e^x en önnur með heitum eins og log, ln, sin, cos og tan. Þú munt kynnast þeim í næstu áföngum.

13. kafli Margliður

Liðastærðir eins og $2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 4$, $2x^2 - 5x + 3$, $5x + 6$, $x^5 - 1$ og 5 eru allt dæmi um margliður. Hvern lið má rita á forminu $a \cdot x^n$ þar sem n er náttúrleg tala eða núll og a er rauntala. Liðinn 5 má rita sem $5 \cdot x^0$ og liðinn x má rita $1 \cdot x^1$.
Hæsti veldisvísirinn kallast stig margliðunnar og tölurnar sem standa með x-unum kallast stuðlar.
Margliðan $2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 4$ er af fjórða stigi og hefur stuðla 2 , – 5 , 3 , 1 , – 4.
Margliðan $x^5 - 1$ er af fimmta stigi og hefur stuðla $1 , 0 , 0 , 0 , 0 , -1$.

Það kallast staðalform margliðu ef liðirnir eru ritaðir í lækkandi röð eftir veldisvísum og bætt er við þeim liðum sem vantar, stuðlar við þá hafðir 0 og plúsmerki haft á milli allra liða. Þannig verður margliðan

$$x^5 - 1 = 1 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + (-1) \cdot x^0$$

á staðalformi. Þegar margliða er rituð á staðalformi er fyrsti stuðullinn kallaður forystustuðull en sá síðasti fastastuðull. Taktu eftir að stuðlarnir eru alltaf einum fleiri en stigið.

Almenn fyrsta stigs margliða hefur formið p(x) = ax + b , almenn annars stigs stigs margliða hefur formið $p(x) = ax^2 + bx + c$, almenn þriðja stigs margliða $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ og svo framvegis. Almenn margliða af núllta stigi hefur formið p(x) = c þar sem c er fasti og $c \neq 0$. Margliðan p(x) = 0 kallast núllmargliða. Hún er dálítið sér á báti og hefur ekki stig.

Margliður eru föll og þeim er gjarnan gefið heitið p(x), q(x) eða r(x). Hægt er að breyta x-inu í hvaða tölu sem er og reikna gildi tiltekinnar margliðu. Þetta þýðir að í skilgreiningarmengi (formengi) margliðunnar eru allar rauntölur þ.e. D_p= R.

Dæmi. Reiknaðu gildi margliðunnar $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 7x + 5$ fyrir x = 2.

Lausn: $p(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 5 = -5$.

Graf margliðu af núllta stigi p(x) = c (c er fasti og $c \neq 0$) er lárétt lína.
Graf margliðu af fyrsta stigi p(x) = ax + b er skálína.
Graf margliðu af öðru stigi $p(x) = ax^2 + bx + c$ er fleygbogi.
Graf margliðu af þriðja stigi er slöngulaga (skoðaðu t.d. graf margliðunnar $p(x) = x^3$ í reiknivél).
Gröf margliða af hærra stigi líkjast grafi þriðja stigs margliðu ef stigið er oddatala en fleygboga ef stigið er slétt tala.
Rót margliðu er mikilvægt hugtak sem þú þarft að kunna skil á.

Skilgreining: Talan a kallast rót (eða núllstöð) margliðunnar P(x) ef P(a) = 0. Rótin er sem sé sú tala sem gefur margliðunni gildið núll.

Núllstöð hlýtur að
vera stoppustöð
þar sem enginn fer út.

Dæmi. Sýndu að talan 2 er rót í margliðunni $p(x) = 5x^3 - 7x^2 - 5x - 2$.

Lausn: $p(2) = 5 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 2 = 40 - 28 - 10 - 2 = 0$.

Rót margliðu p(x) finnst með því að leysa jöfnuna p(x) = 0.

Dæmi. Finndu rót margliðunnar p(x) = 3x – 12 .

Lausn: Leysa þarf jöfnuna 3x – 12 = 0 sem við gerum með því að einangra x-ið.
3x – 12 = 0 (færum liðinn 12 í hægri hlið) og fáum
3x = 12 (deilum með 3) svo
x = 4.

Dæmi. Finndu rót margliðunnar p(x) = $x^2 - 2x - 24$.

Lausn: Leysa þarf jöfnuna $x^2 - 2x - 24 = 0$. Þetta er annars stigs jafna sem hægt er að leysa með þáttun:

$x^2 - 2x - 24 = 0$

$(x+4)(x-6) = 0$

x + 4 = 0 eða x – 6 = 0
x = – 4 eða x = 6.

Í dæminu hér á undan hafði margliðan tvær rætur. Margliða af þriðja stigi getur haft þrjár rætur og almennt gildir að margliða getur haft jafnmargar rætur og stig hennar er.

Reikningur með margliðum er á margan hátt svipaður reikningi með tölum. Hægt er að reikna summu og mismun tveggja (eða fleiri) margliða. Það er einfaldlega gert með því að finna summu eða mismun liða sem hafa sama stig. Hægt er að margfalda saman tvær margliður (eða fleiri) með því að setja sviga utan um þær og margfalda saman svigana eins og í venjulegum algebrudæmum.

Dæmi. Margfaldaðu saman margliðurnar $p(x) = 2x^2 + 3x - 1$ og $q(x) = x + 2$**.**

Lausn: $(2x^2 + 3x - 1)(x + 2) = 2x^3 + 4x^2 + 3x^2 + 6x - x - 2 = 2x^3 + 7x^2 + 5x - 2$

Loks er hægt að deila einni margliðu í aðra margliðu ef margliðan sem deilt er með hefur lægra eða sama stig og margliðan sem deilt er í. Þessi deiling er á margan hátt lík venjulegri talnadeilingu. Hún samanstendur af þremur skrefum sem eru deiling, margföldun og frádráttur sem eru endurtekin þar til deilingu er lokið. Margliðan sem deilt er með kallast deilir en margliðan sem deilt er í kallast deilistofn. Margliðan sem kemur út úr deilingunni kallast kvóti.

Margliðudeiling

Hér verður sýnt dæmi um margliðudeilingu. Rita þarf báðar margliðurnar eftir lækkandi stigum. Liðurinn með hæsta stigið er skrifaður upp fyrstur og síðan liðurinn með næst hæsta stigið o.s. frv. og dæmið er sett upp eins og venjuleg talnadeiling:

Dæmi. Deildu $D(x) = x - 1$ í $P(x) = 3x^2 - 6x + 4$.

Lausn:
Svona er dæmið sett upp

$$x - 1\,\overline{)\,3x^2 - 6x + 4}$$

1. skref. Byrjað er á að deila fyrsta lið í fyrsta lið þ.e. x er deilt í $3x^2$ og útkoman úr þeirri deilingu sem er 3x (hægt að reikna í huganum) er rituð ofan á deilingarhúsinu

$$\begin{array}{r l} & 3x \\ x - 1 & \overline{)\,3x^2 - 6x + 4} \end{array}$$

2. skref. Nú er útkoman úr deilingunni 3x margfölduð saman við deilinn $x - 1$.
$3x(x - 1) = 3x^2 - 3x$ og þetta margfeldi er dregið frá deilistofninum:

$$\begin{array}{r l} & 3x \\ x - 1 & \overline{)\,3x^2 - 6x + 4} \\ & -(3x^2 - 3x) \end{array}$$

3. skref. Næst er sviginn felldur og þá breytast merkin á liðunum sem eru inni í sviganum og útkoman úr frádrættinum færð niður:

$$\begin{array}{r l} & 3x \\ x - 1 & \overline{)\,3x^2 - 6x + 4} \\ & \underline{-3x^2 + 3x \qquad} \\ & \qquad -3x + 4 \end{array}$$

Síðan er þetta endurtekið þar til margliðan sem kemur niður eftir frádráttinn hefur lægra stig en margliðan sem deilt er með (deilirinn) eða afgangurinn er 0. Dæmið heldur þá svona áfram: Fyrsta lið er deilt í fyrsta lið þ.e. x er deilt í $-3x$ og út úr þeirri deilingu kemur -3 sem er skrifað upp á deilingarhúsið:

$$\begin{array}{r l} & 3x - 3 \\ x - 1 & \overline{)\,3x^2 - 6x + 4} \\ & \underline{-3x^2 + 3x \qquad} \\ & \qquad -3x + 4 \end{array}$$

Útkoman úr deilingunni er margfölduð saman við deilinn: $-3(x-1) = -3x + 3$ og dregið frá:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x - 3 \\ \cline{2-2}
x - 1 & 3x^2 - 6x + 4 \\
 & -3x^2 + 3x \\ \cline{2-2}
 & \quad - 3x + 4 \\
 & \quad -(-3x + 3)
\end{array}
$$

Sviginn er felldur, merkjum breytt og útkoman úr frádrættinum færð niður. Hún er talan 1.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x - 3 \\ \cline{2-2}
x - 1 & 3x^2 - 6x + 4 \\
 & -3x^2 + 3x \\ \cline{2-2}
 & \quad - 3x + 4 \\
 & \quad\ \ 3x - 3 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad 1
\end{array}
$$

Nú er deilingunni lokið því að margliðan sem kom niður hefur lægra stig (stig 0) en margliðan sem deilt er með (stig 1). Kvótinn sem fæst úr deilingunni er margliðan 3x – 3 en afgangurinn er margliðan 1. Niðurstöðuna má líka setja fram á eftirfarandi hátt:

$$3x^2 - 6x + 4 = (x-1)(3x-3) + 1$$

eða

$$\frac{3x^2 - 6x + 4}{x - 1} = 3x - 3 + \frac{1}{x-1}$$

Ég ætla að selja kvótann.

Skemmri deiling

Þegar deilt er með fyrsta stigs margliðu af gerðinni x – a er hægt að stytta útreikninga og nota skemmri deilingu sem líka kallast stuðladeiling. Þá eru eingöngu ritaðir stuðlar margliðunnar P(x) sem deilt er í og reiknaðir stuðlar margliðunnar sem kemur út úr deilingunni ásamt afganginum. Taktu eftir að þegar deilt er með margliðu af fyrsta stigi þá er stig kvótans (margliðunnar sem kemur út úr deilingunni) einum lægra en stig P(x) og forystustuðull kvótans er sá sami og forystustuðull P(x). Lítum nú á dæmi með stuðladeilingu.

Dæmi. Deildu margliðunni D(x) = x – 2 í margliðuna $P(x) = 5x^3 - 7x^2 - 4x + 4$.

Lausn: Rót margliðunnar D(x) er 2.

1. skref. Rót margliðunnar D(x) er rituð í vinstra hornið og þar á eftir stuðlar margliðunnar P(x). Þar undir er dregið lárétt strik .

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 5 & -7 & -4 & 4 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

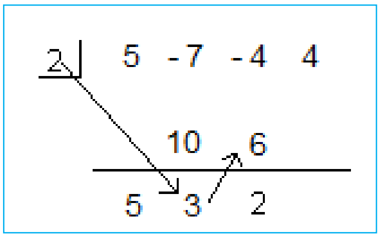
2. skref. Fyrsti stuðullinn í P(x) (talan 5) er fluttur beint niður í svarlínuna fyrir neðan lárétta strikið. Hann er síðan margfaldaður með rótinni í D(x) ($2 \cdot 5 = 10$) og margfeldið er ritað í annan dálk fyrir ofan lárétta strikið.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 5 & -7 & -4 & 4 \\ & & 10 & & \\ \hline & 5 & & & \end{array}$$

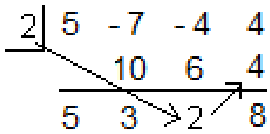
3. skref. Næst er reiknuð summa talnanna í öðrum dálki (3) og hún rituð í svarlínuna fyrir neðan lárétta strikið.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 5 & -7 & -4 & 4 \\ & & 10 & & \\ \hline & 5 & 3 & & \end{array}$$

4. skref. Næst er summan úr öðrum dálki (3) margfölduð við rótina (2) og útkoman (6) rituð í þriðja dálk á lárétta strikinu og síðan reiknuð summa talnanna í þriðja dálki (2) og rituð í svarlínuna.



5. skref. Loks er summan úr þriðja dálki (2) margfölduð með rótinni (2) og útkoman (4) rituð í fjórða dálk á láréttu línunni og summan úr fjórða dálki (8) reiknuð og rituð í svarlínuna.



Við viljum að allir séu vinir og séu ekki að deila.

Nú er deilingunni lokið. Síðasta talan í svarlínunni er afgangurinn en hinar þrjár tölurnar eru stuðlar kvótans sem kemur út úr deilingunni. Þar eð P(x) er þriðja stigs margliða verður útkoman úr deilingunni annars stigs margliða. Niðurstaðan er þá þessi: Kvótinn sem kemur út úr deilingunni er $5x^2+3x+2$ og afgangurinn er 8. Hægt er að rita niðurstöðuna:

$$\frac{5x^3-7x^2-4x+4}{x-2}=5x^2+3x+2+\frac{8}{x-2}$$

eða

$$5x^3-7x^2-4x+4=(x-2)(5x^2+3x+2)+8$$

Leifareglan

Þegar deilt er með fyrsta stigs margliðu af gerðinni D(x) = x – a í margliðu P(x) er afgangurinn (eða leifin) tala. Hana er hægt að reikna út frá reglu án þess að deila.

Samkvæmt reglunni finnst afgangurinn þegar D(x) = x – 3 er deilt í P(x) = $2x^2+7x-9$ með því að reikna $P(3)=2\cdot 3^2+7\cdot 3-9=30$. Talan 3 sem sett var inn í P(x) er rót margliðunnar D(x). Reglan kallast leifaregla eða afgangsregla.

Leifareglan: Þegar deilt er með margliðu D(x) = x – a í margliðu P(x) er afgangurinn talan **P(a)**.

Sönnun: Þegar x – a er deilt í P(x) kemur út úr deilingunni margliða sem við skulum kalla Q(x) og afgangur sem er tala (margliða af núllta stigi eða talan 0). Köllum þessa afgangstölu r.

$$\begin{array}{r|l} & Q(x) \\ \hline x - a & P(x) \\ & \quad \vdots \\ \hline & \quad r \end{array}$$

Niðurstöðuna úr deilingunni má þá setja fram svona: P(x) = (x – a)Q(x) + r.
Gefum nú x-inu gildið a, þ.e. látum x = a. Þá fæst P(a) = (a – a)Q(a) + r $= 0 \cdot Q(a) + r = r$.

Dæmi. Notaðu afgangsregluna til að reikna afganginn þegar D(x) = x – 3 er deilt í $P(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x - 4$.

Lausn: Afgangurinn er talan $P(3) = 2 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 4 = 47$.

Dæmi. Hver er afgangurinn þegar deilt er með D(x) = x + 2 í $P(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x - 4$?

Lausn: Afgangurinn er $P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) - 4 = -38$.

Dæmi. Finndu stuðulinn k ef gefið er að D(x) = x – 2 gengur upp í $P(x) = x^3 + kx^2 - 4$.

Lausn: Ef deilingin gengur upp þá er afgangurinn 0. Samkvæmt leifareglunni er afgangurinn $P(2) = 2^3 + k \cdot 2^2 - 4 = 8 + 4k - 4 = 4 + 4k$ sem gefur okkur jöfnuna:
4 + 4k = 0 svo 4k = – 4 svo k = – 1.

Margliðujöfnur

Í kaflanum um annars stigs jöfnuna var ein leið til að leysa jöfnuna sú að þátta hana í tvo fyrsta stigs sviga og fá fram tvær fyrsta stigs jöfnur. Þær voru síðan voru leystar hvor fyrir sig og ræturnar fundnar. Til dæmis er hægt að þátta $x^2 - 5x + 6$ í $(x-2)(x-3)$ svo ræturnar eru 2 og 3. En það má snúa þessu við og nota ræturnar til að finna þættina. Þessi niðurstaða er sett fram í eftirfarandi reglu og er hún aðalreglan í þessum kafla:

Regla: Talan a er rót í margliðunni P(x) ef og aðeins ef (x – a) er þáttur í P(x).

Samkvæmt reglunni (hér er reyndar tveim reglum skeytt saman í eina) fylgir hverri rót margliðu einn þáttur og í hverjum þætti af gerðinni x – a leynist ein rót.

Til að sanna regluna skiptum við henni upp í tvær reglur:

i) Ef (x – a) er þáttur í margliðu P(x) þá er talan a rót í P(x) þ.e. P(a) = 0.
ii) Ef talan a er rót í P(x) þá er (x – a) þáttur í P(x).

Sönnun: i) Ef (x – a) er þáttur í P(x) þá er hægt að rita P(x) = (x – a)Q(x) þar sem Q(x) er kvótinn sem kemur út þegar (x – a) er deilt í P(x).
Ef x = a fæst P(a) = (a – a)Q(a) = $0 \cdot Q(a) = 0$. Þar með hefur verið sýnt að talan a er rót í P(x).

Sönnun: ii) Samkvæmt leifareglunni er P(a) afgangurinn þegar deilt er með (x – a) í P(x). Nú er P(a) = 0 því að a var rót svo deilingin gengur upp og þar með verður (x – a) þáttur í P(x).

Taktu eftir að merkið í þættinum er gagnstætt við formerki rótarinnar. Ef rótin er 2 verður þátturinn (x – 2) en ef rótin er – 2 verður þátturinn (x + 2).

Þessar tvær reglur eru notaðar til að þátta margliður og finna rætur. Fyrst skulum við líta á dæmi þar sem annars stigs margliða er þáttuð.

Dæmi. Þáttaðu margliðuna P(x) = $x^2 - 14x - 72$.

Lausn: Finnum rætur margliðunnar með annars stigs formúlunni: a = 1, b = –14 , c = – 72 svo $x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 1 \cdot -72}}{2 \cdot 1} = \frac{14 \pm 22}{2}$. Lausnirnar verða 18 og – 4.

Rótinni 18 fylgir þátturinn (x – 18) og rótinni – 4 fylgir þátturinn (x + 4). Ekki geta verið fleiri þættir með x-um því þá verður stig margliðunnar of hátt. Niðurstaðan er $x^2 - 14x - 72 = (x-18)(x+4)$.

Auðvitað hefði verið hægt að finna svarið með því að nota ágiskunaraðferðina. Ekki er mælt með að beita þessari þáttunaraðferð til að þátta þegar dæmið er einfalt.

Dæmi. Þáttaðu margliðuna $P(x)=3x^3+bx^2+cx+d$ ef vitað er að rætur hennar eru 1, 2 og – 2 og finndu síðan stuðlana b, c og d.

Lausn: Þættirnir sem fylgja rótunum eru (x – 1) , (x – 2) og (x + 2). Ekki geta verið fleiri þættir með x-um því þá verður stig margliðunnar of hátt. Ef þessir svigar eru hins vegar margfaldaðir saman fæst margliða sem hefur forystustuðul 1 en ekki 3. Til að fá fyrsta stuðulinn 3 verður að margfalda margliðuna með 3 og svarið er þá
$P(x)=3(x-1)(x-2)(x+2)=3(x-1)(x^2-4)=3x^3-3x^2-12x+12$. Þar með er ljóst að $b=-3$, $c=-12$ og $d=12$.

Dæmi. Leystu jöfnuna $x^3-7x^2+10x+6=0$ ef gefið er að x = 3 er ein lausnin.

Lausn: Við leysum dæmið með því að þátta jöfnuna. Fyrst x = 3 er rót er x – 3 þáttur í margliðunni $x^3-7x^2+10x+6$. Hinn þátturinn finnst með deilingu. Skemmri deiling gefur:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -7 & 10 & 6 \\ & & 3 & -12 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & -2 & 0 \end{array}$$

Hinn þátturinn er þá margliðan x^2-4x-2
Í stað upphaflegu jöfnunnar höfum við nú fengið tvær aðrar jöfnur sem eru:
fyrsta stigs stigs jafnan x – 3 = 0 með lausn x = 3 og annars stigs jafnan $x^2-4x-2=0$ sem við leysum með annars stigs stigs formúlunni. Lausnir hennar eru

$\dfrac{4\pm\sqrt{24}}{2}\approx\begin{cases}4{,}449\\-0{,}449\end{cases}$. Lausnirnar þrjár eru þá x = 3 , $x\approx 4{,}449$ og $x\approx -0{,}449$.

Í síðustu tveimur dæmum var hægt að þátta jöfnurnar vegna þess að ein rót eða fleiri rætur voru gefnar upp. Einnig er hægt að þátta jöfnuna ef fastastuðullinn er 0 með því að taka x út fyrir sviga. Hvað er til ráða ef svo er ekki? Í rauninni er fátt til ráða en stundum er hægt að finna eina rót með ágiskun ef allir stuðlar eru heilar tölur. Ef forystustuðullinn er 1 eða – 1 er til einföld reglu um hvernig giska skal á heiltölurót.

Regla: Ef stuðlar margliðunnar P(x) eru heilar tölur, forystustuðullinn er 1 eða –1, fastastuðullinn er ekki 0 og talan t er heiltölurót í P(x) þá gengur talan t upp í fastastuðli P(x).

Samkvæmt þessari reglu eru einu heilu tölurnar sem geta verið rætur margliðunnar $P(x) = x^3 + 8x^2 - 5x + 6$ tölurnar $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, því að þetta eru einu heilu tölurnar sem ganga upp í tölunni 6. Reyndar er engin þessara talna rót í P(x) svo að engin rótanna er heil tala.

Regla þessi verður sönnuð fyrir fjórða stigs margliðu en almenna sönnunin er hliðstæð:

Sönnun: Látum $P(x) = x^4 + bx^3 + dx^2 + cx + d$.
Þar sem talan t er rót fæst $t^4 + b \cdot t^3 + d \cdot t^2 + c \cdot t + d = 0$

svo $t^4 + b \cdot t^3 + d \cdot t^2 + c \cdot t = -d$.

Nú sést að rótin t er þáttur í vinstri hlið því að það er hægt að taka t út fyrir sviga:

$t(t^3 + b \cdot t^2 + d \cdot t + c) = -d$

Þar sem hægri hliðin er jöfn vinstri hliðinni er rótin t líka þáttur í hægri hliðinni en þá gengur rótin t upp í tölunni d. (Sönnun er hliðstæð ef forystustuðullinn a = – 1.)

Dæmi.
a) Hvaða heilu tölur geta verið rætur margliðunnar $P(x) = -x^5 + 3x^4 - 3x - 10$?
b) Er einhver talnanna í a)-lið rót?

Lausn: a) $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$ eru mögulegar heiltölurætur.
b) Með því að prófa tölurnar kemur í ljós að eina heiltölurótin er talan 2, þ.e. P(2) = 0

Hér er að lokum eitt sýnidæmi þar sem finna á rætur fjórða stigs margliðu.

Dæmi. Finndu allar rætur margliðunnar $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 3$.

Lausn: Þær heilu tölur sem geta verið rætur margliðunnar P(x) eru ± 1 og ± 3.
Prófun sýnir að talan 1 er rót í P(x). Rótinni fylgir þátturinn x – 1. Nú deilum við honum í P(x) og notum skemmri deilingu:

1	1	–2	–2	6	–3
		1	–1	–3	3
	1	–1	–3	3	0

Út úr deilingunni fæst margliðan $Q(x) = x^3 - x^2 - 3x + 3$. Við giskum aftur á heiltölurót og til greina koma tölurnar ± 1 og ± 3. Talan 1 reynist aftur vera rót og henni fylgir aftur þátturinn x – 1 sem við deilum í Q(x) með skemmri deilingu:

1	1	–1	–3	3
		1	0	–3
	1	0	–3	0

Út úr deilingunni fæst annars stigs margliðan $S(x) = x^2 - 3$. Við finnum rætur hennar með því að leysa annars stigs jöfnuna $x^2 - 3 = 0$ og fáum $x = \pm\sqrt{3}$.
Rætur P(x) eru þá tölurnar 1 og $\pm\sqrt{3}$.

14. kafli Formerki margliðu – formerkjamyndir – ójöfnur

Hvað er átt við með formerki margliðu? Skoðum til dæmis margliðuna $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 8x - 4$. Þegar x-inu er gefið ákveðið gildi og reiknað samkvæmt reglu margliðunnar fást mismunandi útkomur, sumar eru plústölur en aðrar eru mínustölur: P(2) = 16 , P(–3) = –154 , P(4) = 140 o.s.frv. P(x) = 0 ef x er rót en hvaða x-gildi gefa jákvæðar útkomur og hvaða x-gildi gefa neikvæðar útkomur? Svar við þeirri spurningu fæst með því að kanna formerki margliðunnar á formerkjalínu.

Ef margliðan hefur stigið núll þá er hún annað hvort alltaf jákvæð eða alltaf neikvæð.

Dæmi. Kannaðu formerki margliðunnar P(x) = 3.

Lausn: P(x) = 3 er alls staðar jákvæð, þ.e. P(x) > 0 fyrir allar tölur x m.ö.o. $\forall x \in R$.
Graf margliðunnar er lárétt lína sem liggur yfir x-ási.

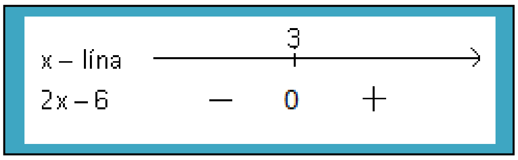
Dæmi. Kannaðu formerki margliðunnar P(x) = – 2.

Lausn: P(x) = – 2 er alls staðar neikvæð. (P(x) < 0 , $\forall x \in R$). Graf margliðunnar er lárétt lína sem liggur undir x-ási.

Margliða af fyrsta stigi hefur eina rót og formerki hennar breytist eftir því hvort x-gildið er hærra eða lægra en rótin.

Dæmi. Kannaðu formerki margliðunnar P(x) = 2x – 6.

Lausn: Við leysum dæmið með hjálp formerkjamyndar sem hér verður lýst. Við finnum fyrst rót margliðunnar sem er talan x = 3. Við teiknum talnalínu (x-línu) og merkjum rótina 3 inn á hana og þar fyrir neðan setjum við 0. Ef valið er x-gildi sem er hærra en 3, t.d. x = 5, verður margliðan jákvæð, P(5) = 4 > 0. Við sýnum þetta með plúsmerki undir tilsvarandi hluta talnalínunnar. Ef valið er x-gildi sem er lægra en 3, t.d. x = 1, verður margliðan neikvæð, P(1) = – 4 < 0. Við sýnum þetta með mínusmerki undir tilsvarandi hluta talnalínunnar.
Myndin hér fyrir neðan kallast formerkjamynd (formerkjalína) margliðunnar.

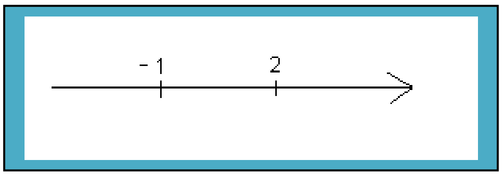


Í rauninni má segja að þetta sé eins konar mynd af grafi margliðunnar. Línan með örinni er venjuleg talnalína og rót margliðunnar er merkt inn á hana. Mínusmerkið undir talnalínunni merkir að margliðan er neikvæð (grafið er undir x-ási) á bilinu $]-\infty, 3[$ og plúsmerkið undir talnalínunni merkir að margliðan er jákvæð (grafið yfir x-ási) á bilinu $]3, \infty[$. Margliðan er núll ef x = 3.

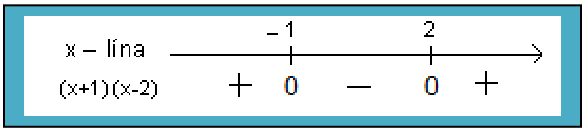
Í stuttu máli: Rót(rætur) margliðunnar er merkt inn á talnalínuna og þar fyrir neðan eru formerki margliðunnar sýnd.

Dæmi. Kannaðu formerki margliðunnar $P(x) = x^2 - x - 2$.

Lausn: Við þáttum margliðuna í tvo sviga (x + 1)(x – 2). Þá sést að ræturnar eru –1 og 2. Ef margliðan hefði verið illþáttanleg þá hefði verið hægt að finna ræturnar með annars stigs formúlunni.
Næst eru ræturnar merktar inn á talnalínu í stærðarröð. Þá skiptist talnalínan í þrjú bil: $]-\infty,-1[$, $]-1,2[$ og $]2,\infty[$ og finna þarf formerki margliðunnar á hverju bili.

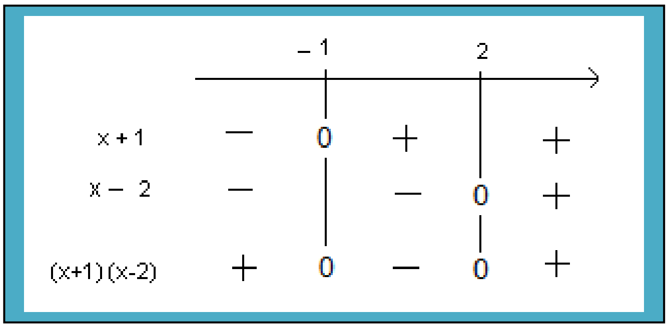


Ef valin er ein tala í hverju bili og gildi margliðunnar reiknað (t.d. er P(–2) = 4 , P(0) = –2 og P(3) = 4) kemur í ljós að margliðan er jákvæð á fyrsta bilinu, neikvæð á öðru bilinu og aftur jákvæð á þriðja bilinu og þar með fæst eftirfarandi formerkjamynd:



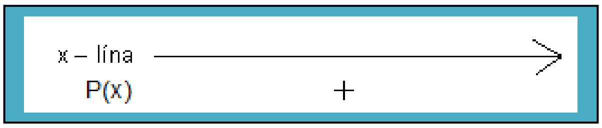
Eins og fram kom í dæminu hér á undan er þetta eins konar mynd af grafi margliðunnar en það er fleygbogi sem opnast upp. Plúsinn merkir að grafið er yfir x-ási og mínusinn að grafið er undir x-ási en ræturnar eru þar sem grafið fer í gegnum x-ásinn. Því væri hægt að gera þessa formerkjamynd út frá grafinu.
Niðurstaðan er þá þessi. Margliðan er jákvæð ef $x \in \,]-\infty,-1[\, \cup \,]2,\infty[$, margliðan er neikvæð ef $x \in \,]-1,2[$ og margliðan er 0 ef $x \in \{-1,2\}$.

Annar möguleiki á að gera formerkjamynd er að gera eina formerkjalínu fyrir hvern þátt og margfalda formerkin síðan saman til að fá formerkið á margfeldinu. Svona myndi það líta út:



Dæmi. Kannaðu formerki margliðunnar $P(x) = x^2 + 3x + 5$.

Lausn: Margliðan hefur engar rauntölurætur því að $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11$ er neikvæð tala. Formerki hennar geta því ekki breyst. (Formerki útkomanna er ávallt plús eða ávallt mínus.) Nóg er að reikna eitt gildi á margliðunni. P(1) = 9 er plús tala og þar með er margliðan jákvæð (þ.e. > 0) fyrir öll x-gildi. Svona lítur formerkjamyndin út.



Graf margliðunnar liggur alls staðar yfir x-ási.

Hér er almenn lýsing á því hvernig nota má formerkjamynd til að sýna formerki margliðu:

1. skref. Fyrst þarf að finna rætur margliðunnar. Ef margliðan er af þriðja stigi eða enn hærra stigi getur þurft að þátta hana niður til að ræturnar komi í ljós en rætur annars stigs margliðu er alltaf hægt að finna með annars stigs formúlunni.

2. skref. Ræturnar eru merktar inn á talnalínu og talan 0 sett þar fyrir neðan. Ræturnar skipta talnalínunni upp í bil: tvö ef margliðan hefur aðeins eina rót, þrjú bil ef ræturnar eru tvær, fjögur bil ef ræturnar eru þrjár o.s.frv.

3. skref. Finna þarf formerki margliðunnar á hverju talnabili annað hvort með því að reikna gildi margliðunnar á viðkomandi talnabili eða með því að skoða graf margliðunnar.

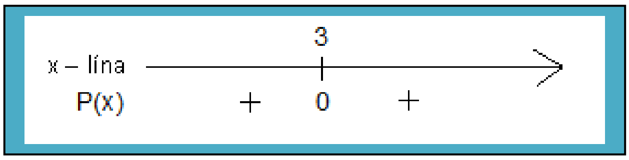
4. skref. Sett er plúsmerki undir talnalínunni þar sem margliðan er jákvæð en mínusmerki þar sem margliðan er neikvæð.

5. skref. Niðurstaðan úr formerkjamyndinni er síðan skráð, það er að segja talnabilin þar sem P(x) > 0 og talnabilin þar sem P(x) < 0.

Dæmi. Kannaðu formerki $P(x) = x^2 - 6x + 9$.

Lausn: Margliðan hefur eina rót sem er talan 3 og rótin skiptir talnalínunni í tvö bil: $]-\infty, 3[$ og $]3, \infty[$. P(x) er jákvæð á báðum bilunum: P(1) = 4 og P(4) = 1. Þetta mætti einnig sjá á því að grafið er fleygbogi sem opnast upp og liggur yfir x-ási báðum megin við rótina.

Formerkjamyndin verður því svona:



Niðurstaðan er að P(x) = 0 ef x = 3 og P(x) > 0 ef $x \in]-\infty, 3[\cup]3, \infty[$ eða m.ö.o.
P(x) = 0 ef x = 3 og P(x) > 0 ef $x \in R \setminus \{3\}$.

Dæmi. Kannaðu formerki margliðunnar $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 10$.

Lausn: Finnum eina heiltölurót með ágiskun. Þær heilu tölur sem til greina koma eru $\{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$. Prófun leiðir í ljós að talan 2 er rót. Rótinni fylgir þátturinn x – 2 sem er deilt í P(x) með skemmri deilingu:

2	1	−2	−5	10
		2	0	−10
	1	0	−5	0

Út úr deilingunni fæst margliðan $x^2 - 5$ og rætur hennar má finna beint (eða með annars stigs formúlunni):

$x^2 - 5 = 0$

$x^2 = 5$

$x = \pm\sqrt{5} \ (\approx \pm 2{,}24)$

Rótunum þremur er raðað á talnalínu sem skiptist upp í fjögur talnabil. Formerki P(x) eru fundin á hverju bili. Formerkjamynd verður svona:

x – lína		$-\sqrt{5}$		2		$\sqrt{5}$	
P(x)	−	0	+	0	−	0	+

Niðurstaðan er að margliðan er neikvæð ef $x \in \left]-\infty, -\sqrt{5}\right[\cup \left]2, \sqrt{5}\right[$ en margliðan er jákvæð ef $x \in \left]-\sqrt{5}, 2\right[\cup \left]\sqrt{5}, \infty\right[$. Margliðan er 0 ef $x \in \{2, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$.

Ójöfnur leystar með formerkjamyndum

Hægt er að nota formerkjamynd til að leysa annars stigs ójöfnur og ójöfnur af hærra stigi. Aðferðin er eins og hér er lýst:

1. skref. Færa þarf alla liði í sömu hlið ójöfnunnar og koma henni þar með á formið $P(x) > 0$ eða $P(x) < 0$ (eða $P(x) \geq 0$, $P(x) \leq 0$).

2. skref. Gerð er fomerkjakönnun á margliðunni P(x) svo að finna þarf rætur margliðunnar og gera formerkjamynd.

3. skref. Talnabilin þar sem margliðan er jákvæð eru skrifað upp ef ójöfnumerkið er " > " en annars þau talnabil þar sem margliðan er neikvæð ef ójöfnumerkið er " < ".

Athugasemd: Ef merkið í ójöfnunni er $\leq$ eða $\geq$ eru ræturnar með í lausnabilunum og þau eru þá lokuð í þann enda.

Dæmi. Leystu ójöfnuna $x^2 - 2x > 3x + 6$.

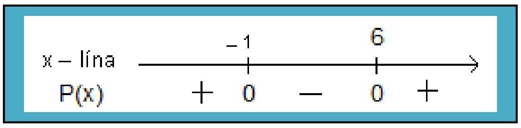
Lausn:

1. skref: Færum alla liði í aðra hlið: $x^2 - 5x - 6 > 0$.

2. skref: Ræturnar eru $x = -1$ og $x = 6$. (Finnst með þáttun eða annars stigs formúlunni.) Merkjum þær inn á talnalínu og finnum formerki margliðunnar $P(x) = x^2 - 5x - 6$. (Sjá mynd).

3. skref: Lausn ójöfnunnar eru talnabilin þar sem margliðan er jákvæð, svo

$$x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]6, \infty\right[$$



Við erum að leita að formerkjum.

15. kafli Ræð föll – ójöfnur með brotum

Föllin $f(x) = \dfrac{x}{3x-6}$, $g(x) = \dfrac{5}{x^2+5}$, $h(x) = \dfrac{x^2-5x+2}{x^2-4}$ eru dæmi um ræð föll. Ræð föll eru brot þar sem teljari og nefnari eru margliður, m.ö.o. föll sem hægt er að rita á forminu $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ þar sem p(x) og q(x) eru margliður. Ekki er hægt að deila með 0 og því getur vantað tölur í skilgreiningarmengi (formengi) þeirra. Það eru þær tölur sem eru rætur margliðunnar í nefnaranum.

Dæmi. Í skilgreiningarmengi fallsins $f(x) = \dfrac{x}{3x-6}$ eru allar rauntölur nema talan 2 sem er rót margliðunnar 3x – 6: $D_f = R \setminus \{2\}$.

Dæmi. Skilgreiningarmengi $g(x) = \dfrac{5}{x^2+5}$ er $D_g = R$ (allar rauntölur) því margliðan í nefnaranum x^2+5 hefur enga rót.

Dæmi. Skilgreiningarmengi fallsins $h(x) = \dfrac{x^2-5x+2}{x^2-4}$ er $D_h = R \setminus \{-2, 2\}$ því margliðan í nefnaranum hefur ræturnar -2 og 2.

Almennt gildir:

Skilgreiningarmengi ræða fallsins $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ er

$$D_f = R \setminus \{\text{rætur margliðunnar } q(x)\}.$$

Hægt er að kanna formerki ræðs falls f(x) á sama hátt og formerki margliðu.

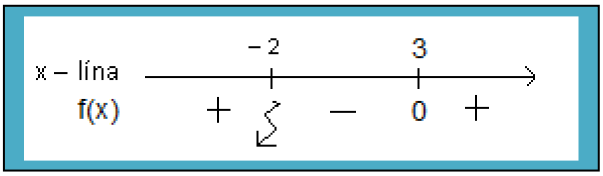
1. skref. Finna þarf allar rætur teljara og nefnara.
2. skref. Ræturnar eru merktar inn á talnalínu sem skiptist upp í talnabil og formerki ræða fallsins eru fundin á hverju talnabili.
3. skref. Þar sem f(x) er jákvætt er gerð plús lína yfir talnalínunni, en mínuslína undir talnalínunni þar sem f(x) er neikvætt.
4. skref. Þar sem rætur nefnarans eru slitnar formerkjalínan í sundur og er það til dæmis gefið til kynna með eldingarmerki (einhvern veginn svona ↯).
5. skref. Talnabilin þar sem f(x) < 0 eru skrifuð upp og talnabilin þar sem f(x) > 0.

Dæmi. Kannaðu formerki fallsins $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+4}$.

Lausn:

1. skref. Rótin í teljaranum er talan 3 en rótin í nefnaranum er talan – 2.

2. skref – 4. skref. Merkjum – 2 og 3 inn á talnalínu sem skiptist þá í þrjú bil, reiknum formerki fallsins á hverju bili og merkjum inn á myndina.



Niðurstaðan er þá: f(x) > 0 ef $x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]3, \infty\right[$
f(x) < 0 ef $x \in \left]-2, 3\right[$ og f(x) = 0 ef x = 3.

Ójöfnur með brotum eru leystar með formerkjakönnun á ræðu falli.

1. skref. Færa þarf alla liði í sömu hlið ójöfnunnar og koma henni þar með á formið $f(x) > 0$ eða $f(x) < 0$ ($f(x) \geq 0, f(x) \leq 0$).
2. skref. Ef ójafnan inniheldur bæði brot og liði eða fleira en eitt brot, þarf að sameina stæðuna í eitt brot þ.e. finna samnefnara, lengja og leggja saman (draga frá).
3. skref. Gerð er formerkjakönnun á brotinu (sjá síðasta kafla.)
4. skref. Talnabilin þar sem ræða fallið er jákvætt eru skrifuð upp ef ójöfnumerkið er " > " en talnabilin þar sem ræða fallið er neikvætt eru skrifuð upp ef ójöfnumerkið er " < " .

Athugasemd: Ef ójöfnumerkið er $\leq$ eða $\geq$ þá eru rætur teljararans með í talnabilunum og þau eru þá lokuð í þann enda. Rætur nefnarans eru hins vegar ekki með því að þær eru ekki í skilgreiningarmengi ræða fallsins. Lítum að lokum á skýringardæmi:

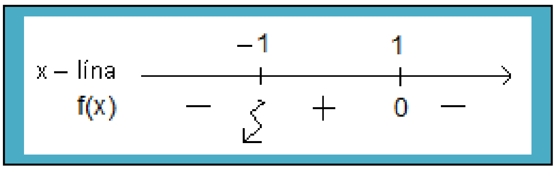
Dæmi. Leystu ójöfnuna $\frac{5-x}{x+1} > 2$.

Lausn:

1. skref. Færum liðina í vinstri hlið: $\frac{(5-x)}{(x+1)} - \frac{2}{1} > 0$

2. skref. Gerum vinstri hliðina að einu broti með því að lengja. Samnefnarinn er (x + 1) og aðeins þarf að lengja seinna brotið. Niðurstaðan verður:
$\frac{(5-x)-2(x+1)}{(x+1)} > 0$ og þegar teljarinn er reiknaður fæst ójafnan $\frac{3-3x}{(x+1)} > 0$.

3. skref. Næst finnum við ræturnar. Talan 1 er rót í teljara og talan –1 í nefnara. Merkjum þær inn á talnalínu sem skiptist þá í þrjú talnabil og finnum formerki ræða fallsins $f(x) = \frac{3-3x}{(x+1)}$ á hverju talnabili. Svona verður formerkjamyndin:



Bilið yfir plúsmerkinu er lausn ójöfnunnar svo lausnin er $x \in \left]-1, 1\right[$.

Dæmi. Leystu ójöfnuna $\frac{x+1}{x-2} < x+1$

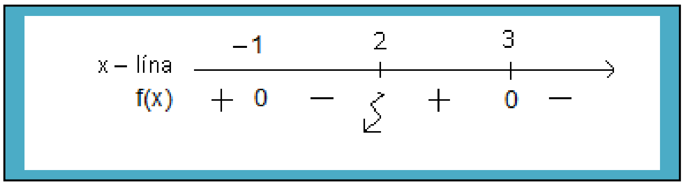
Lausn:

1. skref. $\frac{(x+1)}{(x-2)} - \frac{(x+1)}{1} < 0$.

2. skref. $\frac{(x+1)-(x+1)(x-2)}{(x-2)} < 0$

Reiknum upp úr teljaranum og fáum $\frac{x+1-x^2+2x-x+2}{(x-2)} = \frac{-x^2+2x+3}{(x-2)} < 0$

3. skref. Gerum formerkjamynd fyrir brotið $f(x)=\frac{-x^2+2x+3}{(x-2)}$. Rætur teljarans eru – 1 og 3 og rót nefnarans er 2.



Bilin yfir mínusmerkjunum eru lausn ójöfnunnar svo lausnin er $x \in \left]-1,2\right[\cup \left]3,\infty\right[$.

16. kafli Jöfnur og ójöfnur leystar á grafi

Ef gröf tveggja (eða fleiri) falla eru teiknuð inn í sama hnitakerfi er hægt að lesa af myndinni hvar föllin gefa sömu útkomur eða hvar annað fallið gefur stærri eða minni útkomu en hitt fallið. Svarið getur þó orðið nokkuð ónákvæmt. Föllin f(x) og g(x) eru jöfn þar sem gröf fallanna skerast. Ef annað fallið gefur stærri útkomu en hitt fallið t.d. $f(x) > g(x)$ þá eru y-hnit punktanna á grafi fallsins f(x) stærri en y-hnitin á grafi fallsins g(x) og þá liggur graf fallsins f(x) yfir grafi fallsins g(x). Á tilsvarandi hátt liggur graf fallsins f(x) undir grafi g(x) ef $f(x) < g(x)$.

i) Lausn jöfnunnar $f(x) = g(x)$ er x-hnit skurðpunkta grafanna.

ii) Lausnin á ójöfnunni $f(x) > g(x)$ er það bil á x-ási þar sem graf f(x) liggur yfir grafi g(x). Ef ójafnan er $f(x) \geq g(x)$ er x-ið í skurðpunkti (skurðpunktum) grafanna með í svarinu og bilið er lokað í þann enda.

iii) Lausnin á ójöfnunni $f(x) < g(x)$ er það bil á x-ási þar sem graf f(x) liggur undir grafi g(x). Ef ójafnan er $f(x) \leq (x)$ er x-ið í skurðpunkti grafanna með í svarinu og bilið er lokað í þann enda.

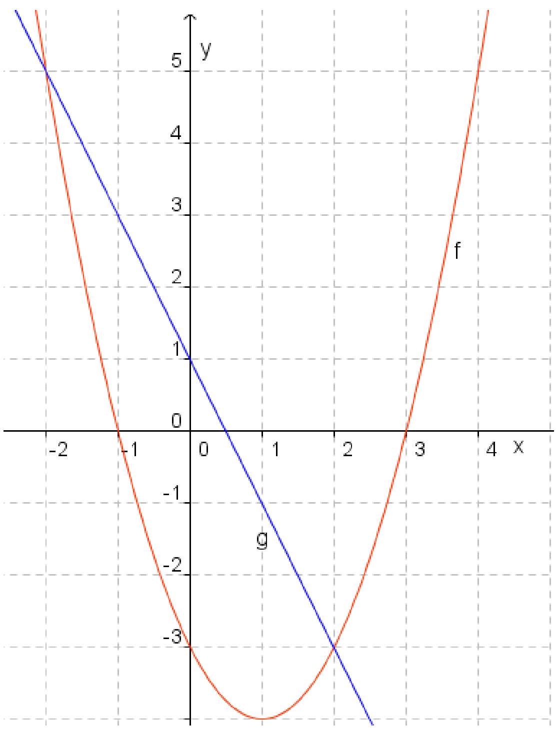
Ekki er ráðlegt að nota þessa aðferð nema búið sé að teikna upp gröf fallanna.

Dæmi. Á myndinni sést fleygboginn $f(x) = x^2 - 2x - 3$ og línan $g(x) = -2x + 1$. Notaðu myndina til að leysa i) jöfnuna $x^2 - 2x - 3 = -2x + 1$ ii) ójöfnuna $x^2 - 2x - 3 < -2x + 1$.

Lausn: Á myndinni sjást fleygboginn og línan.

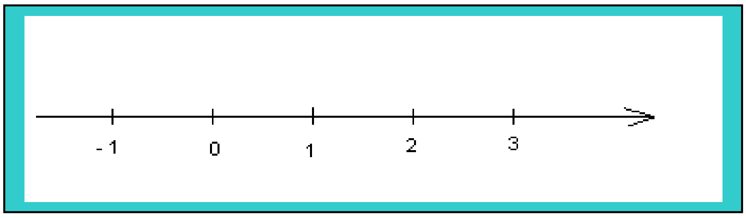
i) x-hnit skurðpunktanna eru $x = -2$ og $x = 2$. svo lausnamengið er $\{-2, 2\}$.

i) Fleygboginn liggur undir línunni á milli skurðpunktanna. Bilið á x-ási sem samsvarar þeim hluta fleygbogans er því $]-2\ ,\ 2[$.



17. kafli Algildi

Hægt er að tengja sérhverja rauntölu við punkt á línu sem við köllum talnalínu. Talan 0 er merkt einhvers staðar á línuna og talan 1 hægra megin við 0. Þá er búið að ákvarða hver lengdareiningin er. Aðrar tölur er síðan hægt að merkja inn í stækkandi röð frá vinstri til hægri sem er stefna talnalínunnar.



Sérhver tala er í ákveðinni fjarlægð frá tölunni 0. Fjarlægð tölu t frá tölunni 0 á talnalínunni kallast algildi eða tölugildi tölunnar t og er táknað með tveimur lóðréttum strikum utan um töluna t, það er að segja með $|t|$.

Dæmi. Hvert er algildi tölunnar i) 3, ii) – 4, iii) 0 ?

Lausn: i) $|3| = 3$, ii) $|-4| = 4$, iii) $|0| = 0$

Skilgreining: Algildi tölu t, táknað $|t|$, er fjarlægðin milli tölunnar t og tölunnar 0 á talnalínunni.

Taktu eftir að algildi tölu getur ekki verið neikvæð tala því að fjarlægð getur ekki verið mínustala.

Talan 0 er eina talan sem hefur algildið 0 og sitthvoru megin við töluna 0 á talnalínunni eru ávallt tvær tölur með sama algildi, til dæmis er $|3| = |-3|$ en almennt gildir um allar rauntölur t að $|t| = |-t|$. Algildi tölu er talan sjálf ef talan er 0 eða jákvæð en algildi neikvæðrar tölu er gagnstætt við töluna sjálfa. ($|3| = 3$ og $|-3| = 3 = -(-3)$) Því er hægt að skilgreina algildi á eftirfarandi hátt:

Skilgreining: Algildi tölunnar x táknað $|x| = \begin{cases} x & \text{ef } x \geq 0 \\ -x & \text{ef } x < 0 \end{cases}$

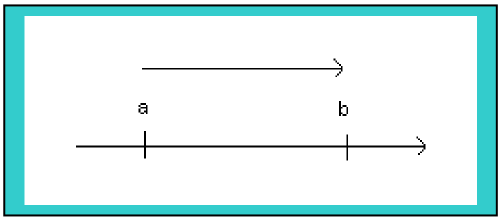
Í ljósi þessarar skilgreiningar má segja sem svo að algildi breyti ekki tölunni 0 eða plústölum en skipti um formerki á mínustölum og geri þær þar með að plústölum.

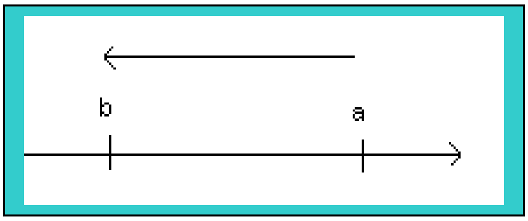
Þó að algildið sjálft geti ekki verið mínustala getur útkoman úr reiknidæmi þar sem algildi kemur við sögu verið mínustala. Algildi á sama forgang og svigi í reiknidæmum með algildi.

Dæmi. Reiknaðu $|2x| - |3y|$ ef $x = -5$ og $y = 4$.

Lausn: Setjum inn gildin á x og y og reiknum gildi stæðanna inni í hvoru algildi, næst reiknum við algildin og síðan mismun algildanna:
$|2 \cdot (-5)| - |3 \cdot 4| = |-10| - |12| = 10 - 12 = -2$

Ef a og b eru tvær tölur á talnalínunni er færslan frá a til b talan b – a.





Færslan er jákvæð ef b > a (færslan er þá til hægri í samræmi við stefnu talnalínunnar) en neikvæð ef b < a (færslan er þá til vinstri). Fjarlægðin á milli talnanna finnst með því að draga lægri töluna frá hærri tölunni en hana má einnig reikna með því að finna algildi færslunnar þ.e. með því að reikna $|b - a|$. Þetta er niðurstaðan:

$|b - a|$ = fjarlægðin á milli talnanna a og b á talnalínunni.

Algildisjöfnur eru jöfnur þar sem x-ið (eða óþekkta stærðin) er inni í algildi. Til að leysa slíka jöfnu þarf að losna við algildið úr jöfnunni og leysa hana síðan á viðeigandi hátt.

Hér verða sýndar tvær leiðir til að leysa einfaldar fyrsta stigs algildisjöfnur.

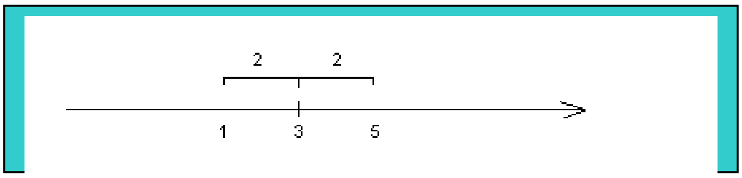
Dæmi. Leystu jöfnuna $|x| = 5$.

Lausn: Finna á hvaða tölur eru í fjarlægðinni 5 frá tölunni 0 á talnalínunni en það eru augljóslega tölurnar 5 og – 5 svo lausnin er $x = \pm 5$.

Í næsta dæmi verða sýndar tvær leiðir til að leysa dæmið.

Dæmi. Leystu jöfnuna $|x-3|=2$.

Lausn:
Leið 1. Stærðin $|x-3|$ = fjarlægð tölunnar x frá tölunni 3 á talnalínunni. Finna á hvaða tala x er ef fjarlægðin á milli x og 3 er 2. En það er auðleyst ef við skoðum dæmið á talnalínunni.
Lausnin er augljóslega x = 1 eða x = 5.



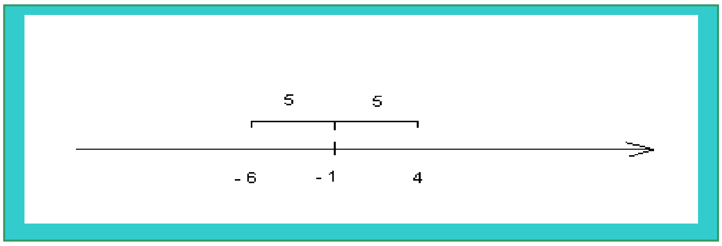
Leið 2. Einu tölurnar sem hafa algildið 2 eru tölurnar 2 og – 2 og þar með hlýtur stærðin x – 3 að vera 2 eða – 2 og í stað algildisjöfnunnar fást tvær venjulegar jöfnur sem eru leystar með því að einangra x-ið:

$$x-3=2 \quad \text{eða} \quad x-3=-2$$
$$\text{svo} \quad x=2+3 \quad \text{eða} \quad x=-2+3$$
$$\text{svo} \quad x=5 \quad \text{eða} \quad x=1$$

Dæmi. Leystu jöfnuna $|x+1|=5$

Lausn: Fyrst algildið er 5 er stærðin inni í algildinu 5 eða – 5 :
x + 1 = 5 eða x + 1 = – 5 svo
x = 4 eða x = – 6

Ef við ætlum að leysa jöfnuna með talnalínuaðferðinni verður að rita stærðina inni í algildinu sem mismun en það er einfaldlega hægt að gera með því að nota að “ + = –(–)” og dæmið verður $|x-(-1)|=5$. Fjarlægðin á milli tölunnar x og tölunnar –1 á að vera 5.



Lausnin er augljóslega x = – 6 eða x = 4.

Þegar algildisjafna er leyst með reikningi eins og í leið 2 hér að framan geta fengist lausnir sem eru ógildar. Því er nauðsynlegt að prófa lausnirnir, þ.e. athuga hvort þær passi inn í upphaflegu jöfnuna.

Dæmi. Leystu jöfnuna $|x+1| = 4-2x$

Lausn: Stærðin inni í algildinu er annað hvort jöfn stærðinni 4 – 2x eða gagnstæðu stærðinni – (4 – 2x) = 2x – 4. Þetta gefur okkur tvær jöfnur:

$$
\begin{array}{rcl}
x+1 = 4-2x & \text{eða} & x+1 = 2x-4 \quad \text{svo} \\
3x = 3 & \text{eða} & 5 = x \quad \text{svo} \\
x = 1 & \text{eða} & x = 5
\end{array}
$$

Prófun á lausnum: $|1+1| = 4-2\cdot 1$ svo $|2| = 2$ sem passar.
$|5+1| = 4-2\cdot 5$ svo $|6| = -6$ sem passar ekki.

Dæmið hefur því aðeins eina lausn sem er x = 1.

Að lokum verður sýnd önnur aðferð til að leysa algildisjöfnur. Hún byggist á þeirri reglu að $|x|^2 = x^2$ gildir fyrir allar rauntölur x. Færum fyrst algildið í aðra hlið jöfnunnar og aðra liði í hina hlið og setjum svo báðar hliðar jöfnunnar í annað veldi og breytum algildismerkinu í sviga. Leysum svo jöfnuna sem þá kemur fram. Prófa þarf lausnirnar með því að setja þær inn í upphaflegu algildisjöfnuna. Leysum að lokum síðasta sýnidæmi með þessari aðferð.

Dæmi. Leystu jöfnuna $|x+1| = 4-2x$.

Lausn: Algildið er í annarri hlið og aðrir liðir í hinni hlið svo við byrjum á að hefja báðar hliðar í annað veldi og breytum algildinu í sviga:

$$(x+1)^2 = (4-2x)^2$$

Reiknum upp úr svigunum og fáum annars stigs jöfnuna: $x^2+2x+1 = 16-16x+4x^2$.
Færum alla liði í aðra hlið og fáum $3x^2-18x+15=0$
Leysum annars stigs jöfnuna með annars stigs formúlunni:
a = 3 , b = − 18 , c = 15 og D = $18^2-4\cdot 3\cdot 15 = 144$ svo lausnirnar eru

$$\frac{18\pm\sqrt{144}}{2\cdot 3} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}.$$

Prófun á lausnum: $|1+1| = 4-2\cdot 1$ svo $|2| = 2$ sem passar.
$|5+1| = 4-2\cdot 5$ svo $|6| = -6$ sem passar ekki.

Dæmið hefur því aðeins eina lausn sem er x = 1.