Diffurjöfnur af fyrsta stigi

Skoðum venulega annars stigs jöfnu:

$$y = x^2 + 2x + 2$$

Ef við diffrum hana einu sinni fáum við diffurjöfnu af fyrsta stigi:

$$y' = 2x + 2$$

Ef við diffrum hana einu sinni enn, þá fáum við diffurjöfnu af öðru stigi:

$$y'' = 2$$

Skilgreining 4.1 (bls 113)

> ***Diffurjafna*** *(afleiðujafna) inniheldur a.m.k. eina afleiðu óþekkts falls*
>
> ***Stig diffurjöfnu*** *er stig hæstu afleiðu óþekkta fallsins*

Eins og við sjáum í dæminu hérna á undan þá eru við með þekkt fall, en hæsta stig afleiðu (diffrunnar) er 2 sem er annars stigs diffurjafna.

Í mjög mörgum tilfellum er hægt að stilla upp diffurjöfnu sem síðan er leyst með heildun – aðferðum sem við ætlum að læra smá um.

Heildum nú fyrsta stigs diffurjöfnuna úr dæminu á undan:

$$y = \int y'\,dx = \int 2x + 2\,dx = x^2 + 2x + k$$

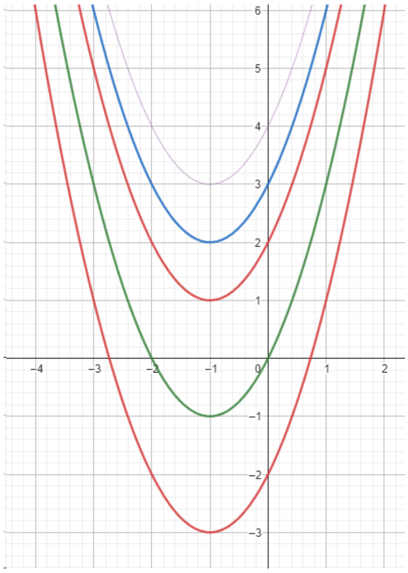
Hérna sjáum við að útkoman inniheldur k sem óþekkta stærð. Jafnan $y = x^2 + 2x + k$ kallast **fullnaðarlausn** diffurjöfnunnar $y' = 2x + 2$

Skilgreining 4.2 (bls 113)

> *Með* ***fullnaðarlausn*** *diffurjöfnu er átt við allar lausnir hennar en einhver ein ákveðin lausn nefnist* ***sérlausn*** *diffurjöfnunnar.*

En hvað þýðir það?

Ef að við teiknum upp fallið $y = x^2 + 2x + k$ inn í hnitakerfi þá fáum við eftirfarandi mynd þar sem að k er mismunandi tala:



Hérna sjáum við að talan k flytur fallið bara upp og niður á y-ásnum.

Ef að við viljum finna **sérlausn** á fallinu þá þarf að gefa upp punkta sem eru á fallinu.

Ef að við lesum t.d. af blá fallinu punktinn (x,y) = (-1,2) þá getum við sett það inn í **fullnaðarlausnina** og fundið **sérlausnina**:

$$y = x^2 + 2x + k$$

$$2 = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + k \Rightarrow 2 = 1 - 2 + k \Rightarrow k = 2 - 1 + 2 = 3$$

Svo að **sérlausnin** fyrir fallið með punktinn (-1,2) er:

$$y = x^2 + 2x + 3$$

Dæmi um diffurjöfnur af fyrsta stigi:

Diffurjafnan:

$$y' = cos(x)$$

Fullnaðarlausn fæst:

$$y = sin(x) + k$$

Hér er k einhver fasti. Ef við setjum tölu inn fyrir k þá fáum við **sérlausn** á **diffurjöfnunni**.

Diffurjafnan:

$$y' = y$$

Lítur skringilega út. Jafnan diffruð er það sama og jafnan ódiffruð.

Miðað við það sem við höfum lært þá er hægt að sjá að ein **sérlausn** er einfaldlega:

$$y = e^x$$

Af því að ef við diffrum það fáum við það sama.

Fullnaðarlausn yrði þá á forminu:

$$y = k \cdot e^x$$

Prófaðu að diffra það

Diffurjafnan:

$$y' = y - x$$

Er kannski ekki eins auðveld en lausn á henni yrði:

$$y = x + 1$$

Dæmi 4.1 (bls 116)

Finnum fullnaðarlausn diffurjöfnunnar:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Fullnaðarlausn: Heilda.

$$y = x^2 + k$$

Sérlausn liggur í gegnum punktinn (1,0)

Sérlausn:

$$0 = 1^2 + k \Rightarrow k = -1$$

$$y = x^2 - 1$$

Dæmi 4.2 (bls 116)

Finnið fullnaðarlausn diffurjöfnunnar:

$$\frac{dy}{dx} = cos(x)$$

Fullnaðarlausn: Heilda.

$$y = sin(x) + k$$

Finnum sérlausn sem liggur í gegnum puntinn $\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$

$$2 = sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + k \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

Sérlausn er þá:

$$y = sin(x) + \frac{3}{2}$$