Æfing 3.1 lausn

1. Diffrið
    a. $y = x \cdot arcsin(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot arcsin(x) + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \boldsymbol{arcsin(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$
    b. $y = x \cdot \arctan(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot \arctan(x) + x \cdot \frac{1}{1+x^2} = \boldsymbol{arc\tan(x) + \frac{x}{1+x^2}}$
    c. $y = x \cdot \arccos(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot \arccos(x) + x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \boldsymbol{\arccos(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$
    d. $y = x \cdot \mathrm{arccot}(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot \mathrm{arccot}(x) + x \cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = \boldsymbol{\mathrm{arccot}(x) - \frac{x}{1+x^2}}$

2. Diffrið (hér er gott að nota keðjuregluna)
    a.

$$y = sin(arcsin(x))$$

Set u = arcsin(x)

$$u = arcsin(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Nota eftirfarandi keðju:

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = sin(n) \Rightarrow \frac{dy}{du} = cos(u) = cos(arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

Keðjureglan:

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \boldsymbol{1}$$

b.

$$y = arcsin(sin(x))$$

Set u = sin(x)

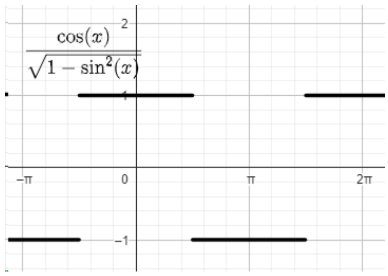
$$u = sin(x) => \frac{du}{dx} = cos(x)$$

Þá er ég komin með eftirfarandi keðju:

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$=> y = arcsin(u) \Rightarrow \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot cos(x) = \boldsymbol{\frac{cos(x)}{\sqrt{1-sin^2(x)}}}$$

Kvaðratrótin í nefnara er raunverulega $|cos(x)|$ sem gerir það að verkum að nefnari verður aldrei mínus tala.
Ef að við skoðum þetta fall í geogebru þá sjáum við að
$y' = 1$ ef $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$y' = -1$ ef $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$



c. $y = cos(arccos(x))$

Hérna erum við með föll sem upphefja hvort annað svo að það er hægt að einfalda þetta í:

$$y = x$$

Sem leiðir af sér að:

$$y' = 1$$

d. $y = arccos(cos(x))$

Hérna nota ég keðjuregluna og set $t = cos(x)$

$$y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

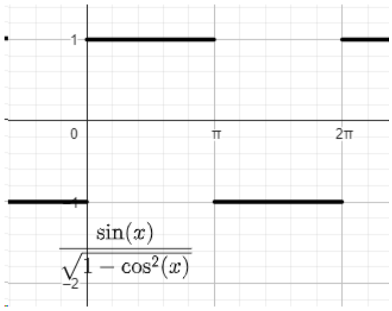
$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot b\, sin(x) \Rightarrow y' = \frac{sin(x)}{\sqrt{1-t^2}}$$

Ṡíðan skipti ég inn fyrir t:

$$y' = \frac{sin(x)}{\sqrt{1-cos^2(x)}}$$

Kvaðratrótin í nefnara er raunverulega $|sin(x)|$ sem gerir það að verkum að nefnari verður aldrei mínus tala.

Ef að við skoðum þetta fall í geogebru þá sjáum við að
$\boldsymbol{y' = 1 \text{ ef } 0 < x < \pi}$
$\boldsymbol{y' = -1 \text{ ef } \pi < x < 2\pi}$
Ath: þetta endurtekur sig ef farið er heilan hring bæði í plús og mínus átt



3. Diffrið:

a. $cos(arcsin(x))$
Umrita:

$$cos(arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Diffra fyrst ytra (veldið) sinnum diffrað innra (sem er í sviganum):

$$\frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot (-2x) = -\frac{2x}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}} = \boldsymbol{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

b. $sin(\mathrm{arccos}(x))$
Umrita:

$$\sin(\arccos(\mathrm{x})) = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Diffrað eins og í dæmi a.

Svar: $\boldsymbol{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

c. $arccos(sin(x))$

Nota reglu 3.5 og diffra ytra sinnum innra diffrað:

$$y = arccos(sin(x)) \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-sin^2(x)}} \cdot cos(x) = -\frac{\boldsymbol{cos(x)}}{\boldsymbol{\sqrt{1-sin^2(x)}}} = -\frac{\mathbf{cos\ (x)}}{\mathbf{|cos\ (x)|}}$$

d. $\arcsin\ (\cos(x))$

Nota reglu 3.2 – diffra ytra sinnum innra diffrað:

$$y = arcsin(cos(x)) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-cos^2(x)}} \cdot (-sin(x)) = -\frac{\boldsymbol{sin(x)}}{\boldsymbol{\sqrt{1-cos^2(x)}}} = -\frac{\boldsymbol{sin(x)}}{\boldsymbol{|sin(x)|}}$$

4. Diffrið:

a. $arcsin(x) + arccos(x)$ sem einfaldast samkvæmt reglu 3.3 í $\frac{\pi}{2}$. Þetta er fasti sem verðu núll ef diffraður: Svar: **0**

b. $\arcsin(x) \cdot \arccos(x)$

Nota reglu 1.2 – 2 á blaðsíðu 14: $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arccos(x) - \arcsin(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\mathbf{arccos}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{\sqrt{1-x^2}}} - \frac{\mathbf{arcsin}\ (\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{\sqrt{1-x^2}}}$$

5. Diffrið:

a. $arctan^2(x)$

Diffra fyrst ytri og svo innri og nota reglu 3.1:

$$y = arctan^2(x) \Rightarrow y' = 2\arctan\ (x) \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{\mathbf{2arctan}\ (\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{1+x^2}}$$

b. $arccot^2(x)$

Diffra fyrst ytri og svo innri og nota reglu 3.4:

$$y = arccot^2(x) => y' = 2\,\mathrm{arccot}(x) \cdot (-\frac{1}{1+x^2}) = -\frac{\mathbf{2arccot}\ (\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{1+x^2}}$$