B) Diffur

Vegna mikillar notkunar á diffurtáknum í heildunarreikningi og vegna hagnýtingar stærðfræðigreiningar er nytsamlegt að fara nokkrum orðum um hugtakið **diffur** (differential). Í STÆ 403 var umfjöllum um diffur skotið á frest, enda var hennar strangt tekið ekki þörf þar. Við rifjum upp það sem þar var sagt um hugtökin fallauka, mismunakvóta og diffurkvóta.

Gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt fall á bili og að x sé punktur í því bili. Gefum x síðan viðbótina Δx þannig að $x+\Delta x$ lendi einnig í bilinu. Þá nefnist

$$\Delta y = \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

fallauki fyrir f og brotið

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

sá **mismunakvóti** fallsins sem svarar til viðbótarinnar Δx. Markgildið

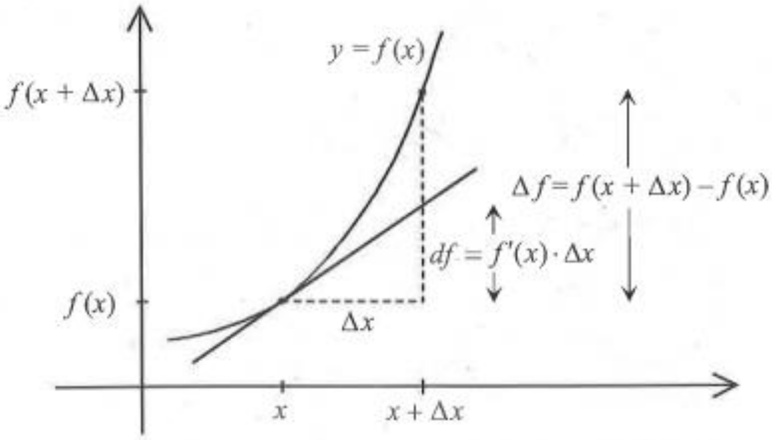
$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

er svo nefnt **diffurkvóti** fallsins.

Skilgr. 1.2 *Ef f er diffranlegt fall á bili, sem inniheldur x og $x+\Delta x$, þá er **diffur** fallsins í x táknað með df eða dy og skilgreint þannig:*

$$df = dy = f'(x)\cdot \Delta x$$

Takið eftir að diffrið er bæði háð punktinum x og viðbótinni Δx. Eftirfarandi mynd sýnir sambandið milli diffurs og fallauka fallsins, f.



Mynd 1.2. Samband milli diffurs og fallauka fallsins $y = f(x)$.

Diffrið af fallinu $f(x)=x$ er samkvæmt skilgreiningu 1.2, $dx = 1\cdot\Delta x$ og því er rökrétt að rita dx í stað Δx, þ.e. setja

$$df = f'(x)\cdot dx$$

eða

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Þetta skýrir nafngiftina diffurkvóti. Oft er diffrið af f ritað $df(x)$ til að leggja áherslu á að það sé háð x, en að sjálfsögðu er það einnig háð viðbótinni dx.

Regla 1.1 *Diffur falls í punkti er jafnt fallauka línulegrar nálgunar þess í punktinum.*

Dæmi 1.3 Finnum diffur fallsins $f(x) = x^2\sin(x)$.

$$df = f'(x)\cdot dx = \left(2x\sin(x) + x^2\cos(x)\right)\cdot dx$$

Dæmi 1.4 Finnum diffur fallsins $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

$$df = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2}dx = \frac{1-\ln(x)}{x^2}dx = \frac{\ln\left(\frac{e}{x}\right)}{x^2}dx$$

Regla 1.2 *Ef f og g eru diffranleg föll gildir*

1. $d(f \pm g) = df \pm dg$
2. $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$
3. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$
4. $d\big(f(g(x))\big) = f'(g(x)) \cdot dg(x)$

Æfing 1.1B 1. Finnið diffur eftirfarandi falla.

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = \tan(x)$ c) $f(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$

d) $f(x) = 3^x$ e) $f(x) = \log(x)$ f) $f(x) = e^{\sin(x)}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ h) $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4$ i) $f(x) = \ln\left(\sin^2(x) + 1\right)$

2. Finnið diffur eftirfarandi falla.

a) $f(x) = \tan(x) \cdot \cot(x)$ b) $f(x) = x \cdot \ln(x)$ c) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ e) $f(x) = x \cdot \log(e^x)$ f) $f(x) = 2^{\sin(3x)}$

Oft er fall af x gefið með óbeinum hætti þannig að ritað er

$$g(y) = j(x)$$

til að skilgreina y sem fall af x. Dæmi um slíkt er $\ln(y) = x^2$ sem jafngildir $y = e^{(x^2)}$. Tökum nú diffrin af báðum hliðum jöfnunnar $\ln(y) = x^2$ og setjum þau jöfn, þ.e.

$$\frac{1}{y}dy = 2xdx$$

sem einnig má rita

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

Er þar kominn diffurkvóti fallsins y ritaður með báðum breytunum x og y. Þetta er nefnd **óbein** (implicit) **diffrun** fallsins y, en þannig ritað er fallið nefnt **fólgið fall**. Þegar fall er gefið með beinum hætti, svo sem gert hefur verið fram til þessa er tilsvarandi alþjóðlegt orð explicit.
Þessi ritmáti hentar vel í hagnýtri notkun diffurreikningsins, en fáar greinar stærðfræðinnar hafa eins mikið hagnýtt gildi og hann.
Um diffur verða ekki settar fram fleiri almennar reglur, en einstök dæmi (hér og í næsta kafla) látin varpa ljósi á efnið almennt og gera lesandanum kleift að skilja hið hagnýta gildi þess.

Dæmi 1.8 Einingarhringurinn hefur jöfnuna $x^2 + y^2 = 1$. Hann samanstendur af ferlum tveggja falla. Finnum afleiður þeirra.

Við getum einangrað y úr jöfnunni og fengið föllin $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Þessi tvö föll mætti svo diffra með beinum hætti skv. reglum í STÆ 403, en við getum einnig fundið diffurkvóta þeirra beggja af jöfnu einingarhringsins með óbeinni diffrun. Við fáum þá diffurjöfnuna

$$2ydy = -2xdx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \text{ (ef } y \neq 0)$$

6. Notið óbeina diffrun til að finna afleiðuna $\frac{dy}{dx}$.

a) $y^3 - x = x \cdot \ln(y)$ b) $y^2 = \frac{x+1}{x-1}$

c) $5xy + y^2 - x + y = 0$ d) $x^3 \tan(y) + xy = 1$

7. Finnið hallatölu grafsins $y^4 - y^2 + x^2 = 0$ í punktinum $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

8. Finnið hallatölu grafsins $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ í punktinum $(4,2)$. Í hvaða punktum hefur grafið lóðrétta snertla?