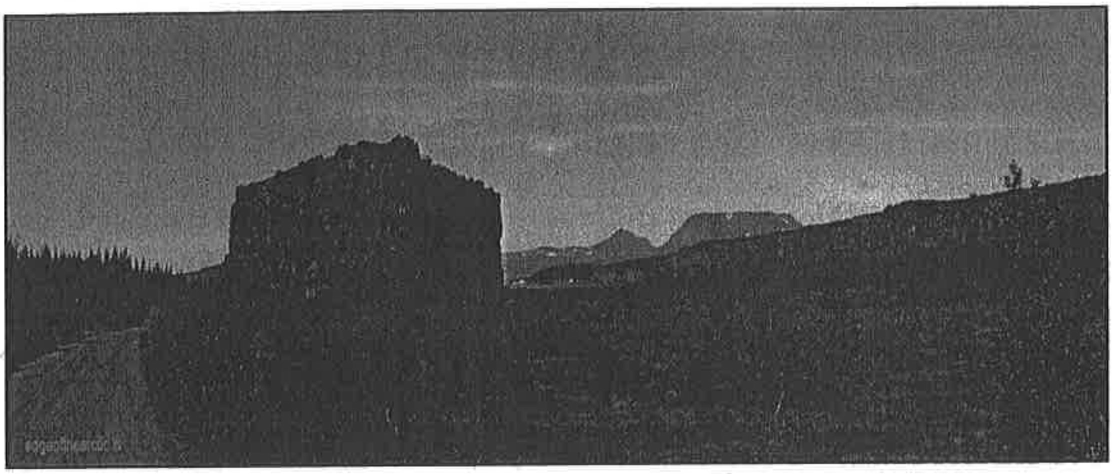
3. KAFLI, SÉRSTAKIR ÞRÍHYRNINGAR

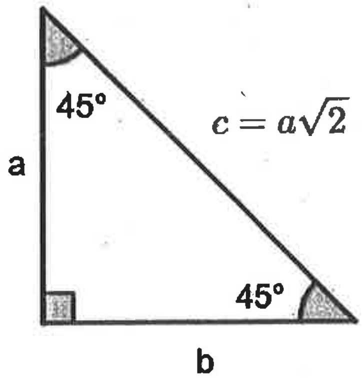


Ásbyrgi

Við skulum skoða tvær gerðir af rétthyrndum þríhyrningum sem lúta afar þægilegum reglum. Þetta eru jafnarma þríhyrningar með hornastærðirnar 45°- 45°- 90° og þríhyrningur með hornastærðirnar 30°- 60°- 90°.

Sérstakur 1.

Jafnarma, rétthyrndur þríhyrningur með hornin: 45°- 45°- 90°.



Regla

„Lengd langhliðar er alltaf jöfn lengd skammhliðar margfaldaðri með kvaðratrótinni af tveim."

Video 25 Sérstakir þríhyrningar 1

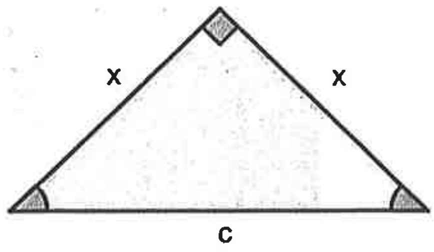
Sönnun

Sönnun sem þarf að kunna.

Þar sem þríhyrningurinn er jafnarma þá eru hornin við grunnlínuna (c) jafn stór (45°) og skammhliðar hans eru jafn langar.

Setjum þetta inn í reglu Pýþagórasar. Skammhliðarnar eru jafn langar, látum þær vera x að lengd:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$x^2 + x^2 = c^2$$
$$2x^2 = c^2$$



Drögum kvaðratrótina í báðum hliðum jöfnunnar:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2} = \sqrt{c^2}$$
$$\sqrt{2} \cdot x = c$$

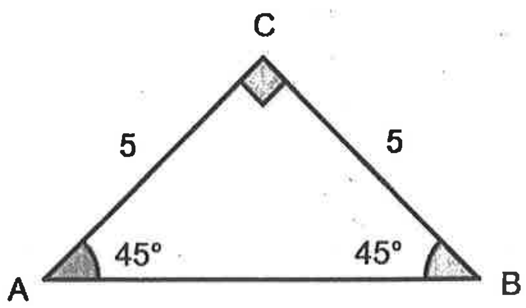
Sem sagt: „*Lengd langhliðar er alltaf jöfn lengd skammhliðar margfaldaðri með kvaðratrótinni af tveim*."

Ef við köllum skammhliðina „a" getum við ritað: $c = a\sqrt{2}$

Sýnidæmi

Finndu lengd langhliðarinnar með bæði stærðfræðilegri nákvæmni og sem tugabrot með 5 aukastöfum ef a = b = 5.

Lausn



Til að sjá lausnina með stærðfræðilegri nákvæmni nægir okkur að margfalda lengd skammhliðar með kvaðratrótinni af tveim.
Svarið, með stærðfræðilegri nákvæmni, er: $c = 5\sqrt{2}$

Í tugabrotum er svarið:
$5 \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot 1,414213562 \ldots$
$5 \cdot \sqrt{2} = 7,071067812 \ldots \approx 7,07107$

Tugabrotið er óræð tala, óendanlegt, sem ekki gefur stærðfræðilega nákvæmt svar.

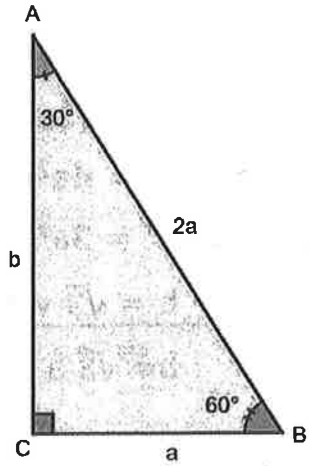
Athugið kröfur um reikninákvæmni.

Ef beðið er um stærðfræðilega nákvæmt svar er átt við fullstytt svar, án tugabrots.
Þá skal halda kvaðratrótum í svörum. Þannig er svarið stærðfræðilega nákvæmt en ekki námundað.

Video 26 Sérstakir þríhyrningar 2

Sérstakur 2.

Rétthyrndur þríhyrningur með hornastærðirnar: 30°- 60°- 90°.



1. REGLA:

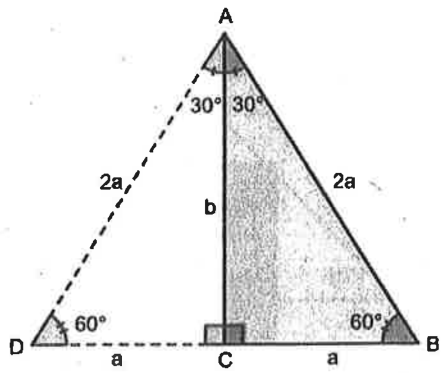
„Lengd langhliðar er tvöföld lengd skemmri skammhliðar."

Sönnun

Teiknum rétthyrndan þríhyrning ABC þar sem:
A = 30°, B = 60° og C = 90° (sjá þríhyrninginn hér að ofan).
Tökum af honum afrit (copy) og speglum (flippum) því um lengri skammhlið (hlið b).
Þá kemur fram þríhyrningur ABD.

Þessi þríhyrningur er jafnhliða með öll horn 60° og allar hliðar því jafn langar, þ.e. 2a.

Hliðin AB er því 2a, tvöfalt lengri en skemmri skammhliðin.



2. REGLA:

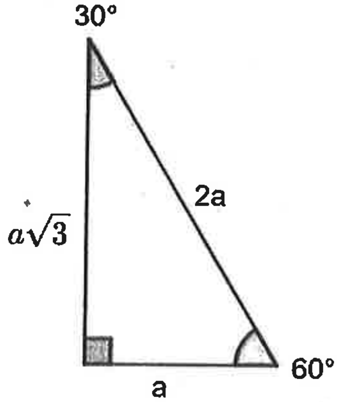
„Lengri skammhlið er lengd skemmri skammhliðar, margfölduð með kvaðratrótinni af þrem."

Video 27 Sérstakir þríhyrningar - Sönnun

Sönnun

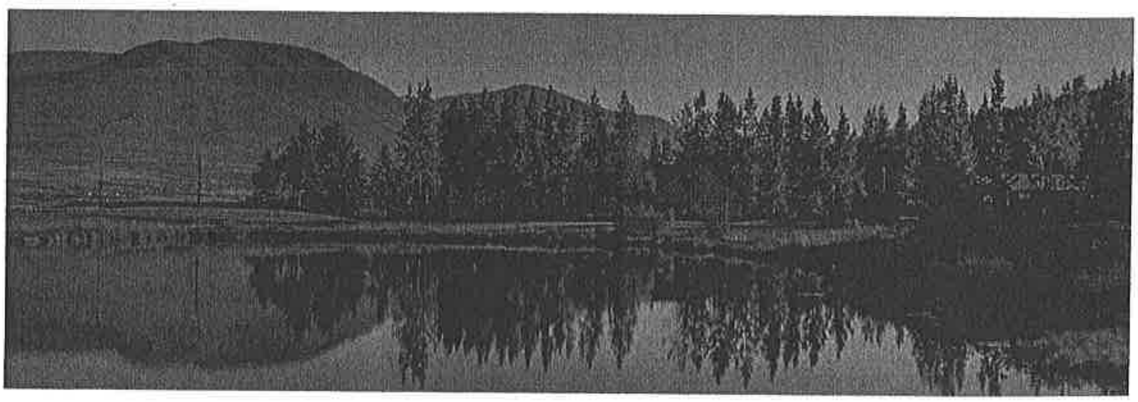
Notfærum okkur 1. reglu hér að framan sem sagði að langhliðin væri tvöföld styttri skammhliðin.
Setjum svo stuttu skammhliðina (a) og langhliðina (2a) inn í reglu Pýþagórasar:

$a^2 + b^2 = c^2$	Regla Pýþagórasar.
$a^2 + b^2 = (2a)^2$	Langhliðin c er 2a að lengd.
$b^2 = (2a)^2 - a^2$	Færum a^2 yfir sama sem merkið.
$b^2 = 4a^2 - a^2$	Leysum upp svigann.
$b^2 = 3a^2$	Drögum frá.
$b = \sqrt{3}\,\sqrt{a^2}$	Drögum kvaðratrót beggja vegna,
$b = \sqrt{3}\,a$	sem við skrifum yfirleitt sem $a\sqrt{3}$



Athugið aftur kröfur um reikninákvæmni.

Ef beðið er um stærðfræðilega nákvæmt svar er átt við fullstytt svar, án tugabrots.
Þá skal halda kvaðratrótum í svörum. Þannig er svarið stærðfræðilega nákvæmt en ekki námundað. Sama gildir um pí þegar það á við, s.s. í hringjum.



Haustlitir á Akureyri