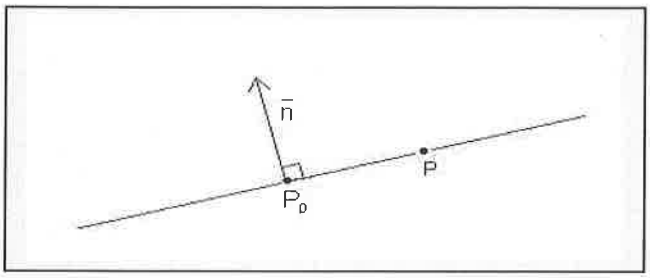
Kafli 5 – Almenn jafna beinnar línu

Jafnan $ax + by + c = 0$ kallast almenn jafna beinnar línu. Þvervigur línunnar $\bar{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ kemur fram í almennu jöfnunni. Þvervigur línu er vigur sem er hornréttur á línuna.

Ef gefinn er punktur $P_0 = (x_0\,, y_0)$ á línu með þvervigur $\bar{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er einfaldast að finna almennu jöfnuna með því að nota regluna um innfeldi hornréttra vigra sem gefur að $\overline{P_0P} \cdot \bar{n} = 0$ þar sem $P = (x\,, y)$ er einhver punktur á línunni.



Dæmi 5.1 Finndu almenna jöfnu línu sem liggur í gegnum punktinn $P_0 = (2\ ,\ 4)$ og hefur þvervigur $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Lausn: Látum $P = (x\,, y)$ vera einhvern punkt á línunni. Þá er

$$\overline{P_0P} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 5(x-2) + (-2)(y-4) = 0$$

svo almenn jafna línunnar er $5x - 2y - 2 = 0$

Dæmi 5.2 Finndu almenna jöfnu línu sem liggur í gegnum punktana $P_1 = (-2\,, 4)$ og $P_2 = (3\,, 6)$.

Lausn: Einn af þvervigrum línunnar er $\bar{n} = \left(\overline{P_1P_2}\right)_þ = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}_þ = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Notum nú þvervigurinn og annan punktinn t.d. $P_2 = (3\,, 6)$ til að finna almennu jöfnuna eins og í síðasta sýnidæminu. Þá fæst:

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = -2(x-3) + 5(y-6) = 0$$

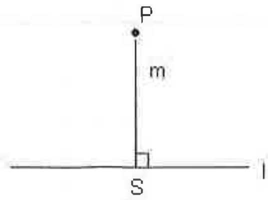
$$\Rightarrow\ -2x + 5y - 24 = 0$$

Dæmi 5.3 Reiknaðu skurðpunkta línanna 8x – 4y – 4 = 0 og 2x + 5y – 19 = 0.

Lausn: Leysum jöfnurnar saman (með samlagningaraðferð, innsetningaraðferð eða í vasareikninum) og þá fæst x = 2 og y = 3 svo skurðpunkturinn er (2 , 3).

Ofanvarp punkts á línu

Látum P vera punkt og l línu. Punkturinn S sem er skurðpunktur línunnar l og línunnar m sem liggur í gegnum P og er hornrétt á línuna l kallast ofanvarp punktsins P á línuna l.



Dæmi 5.4 Finndu ofanvarp punktsins P = (2 , 5) á línuna l sem gefin er með almennu jöfnunni 3x + 4y + 24 = 0.

Lausn: Við þurfum fyrst að finna jöfnu línunnar m sem er línan gegnum P hornrétt á l. Vigurinn $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ er þvervigur l. Vigurinn $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}_{þ} = \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ er þá þvervigur m. Finnum næst almenna jöfnu línunnar m. Þá fæst

$$-4(x-2)+3(y-5)=0 \text{ eða } -4x+3y-7=0$$

Skurðpunkturinn S fæst með því að leysa jöfnuhneppið

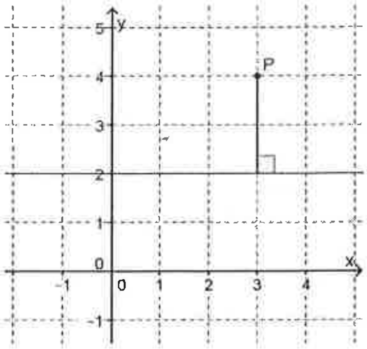
$$\begin{aligned}3x+4y+24&=0\\-4x+3y-7&=0\end{aligned}$$

en það má gera með samlagningaraðferð, innsetningaraðferð eða í vasareikninum (EQUA).

Lausnin er $x=-4,\ y=-3$ svo $S=(-4,-3)$.

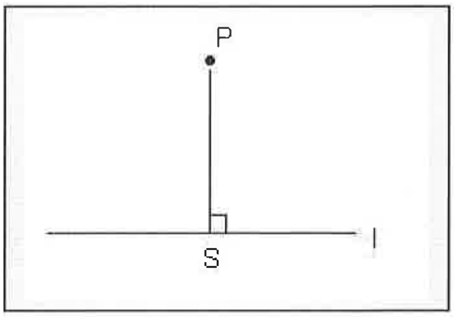
Ath. Ef línan er lárétt eða lóðrétt er hægt að finna ofanvarpspunktinn án nokkurs útreiknings!

Dæmi 5.5 Reiknaðu fjarlægði punktsins P = (3 , 4) frá línunni y = 2.



Lausn: Teiknum línuna inn í hnitakerfi og merkjum punktinn inn (sjá mynd). Fjarlægðin er augljóslega 2.

Fjarlægðarformúlan



Fjarlægð punkts P frá línu l er skilgreind sem minnsta mögulega fjarlægð milli P og punkts S á línunni l en fjarlægðin er minnst þegar vigurinn $\overline{SP}$ er hornréttur á línuna l, þ.e. þegar S er ofanvarp punktsins P á l .

Því er hægt að reikna fjarlægð punkts P frá línu l með því að reikna hnit punktsins S sem er ofanvarp P á l, og síðan lengd vigursins $\overline{SP}$.

Mun þægilegra er þó að nota eftirfarandi formúlu sem kallast fjarlægðarformúlan:

Ef $P = (x_1, y_1)$ og línan l hefur almenna jöfnu $ax + by + c = 0$ þá er fjarlægð punktsins P frá l gefin með

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Dæmi 5.6 Reiknaðu fjarlægðina frá P = (3 , 7) til línunnar l sem er gefin með jöfnunni $3x - 4y + 10 = 0$.

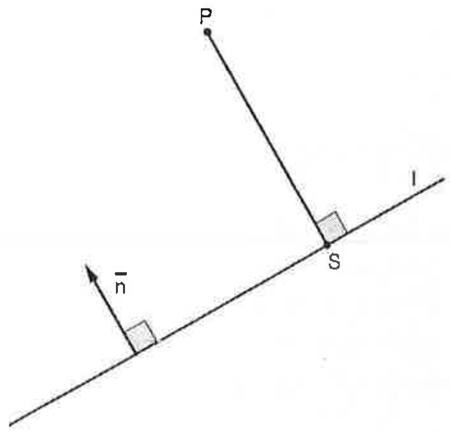
Lausn: $$\frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 7 + 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-9|}{5} = 1{,}8$$

Dæmi 5.7 Reiknaðu fjarlægð punktsins P = (2 , 5) frá línunni $y = 3x - 5$.

Lausn: Finnum fyrst almenna jöfnu línunnar l en hún er $-3x + y + 5 = 0$ og notum síðan fjarlægðarformúluna:

$$\frac{|-3 \cdot 2 + 5 + 5|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \left(= \frac{2\sqrt{10}}{5} \right)$$

Sönnun á fjarlægðarformúlunni:



Látum $P = (x_1, y_1)$, $S = (x_0, y_0)$ vera ofanvarp P á línuna l og $\bar{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vera þvervigur línunnar ax + by + c = 0. Reiknum innfeldið $\bar{n} \cdot \overline{SP}$ á tvo vegu:

i) $\bar{n} \cdot \overline{SP} = |\bar{n}||\overline{SP}|\cos(v) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot |\overline{SP}| \cdot \pm 1$. Hér er v hornið á milli $\bar{n}$ og $\overline{SP}$ en það er annað hvort 0° eða 180° því að $\bar{n}$ og $\overline{SP}$ eru samsíða (báðir hornréttir á l)
Nú er cos(0°) = 1 og cos(180°) = −1 og því er cos(v) = ± 1.

ii)

$$\bar{n} \cdot \overline{SP} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = ax_1 + by_1 + (-ax_0 - by_0) = ax_1 + by_1 + c$$

Í síðasta skrefinu var notað eftirfarandi: fyrst $S = (x_0, y_0)$ er á línunni l þá er $ax_0 + by_0 + c = 0$ svo $c = -ax_0 - by_0$.

Við höfum því fengið að $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot |\overline{SP}| \cdot (\pm 1) = ax_1 + by_1 + c$

Setjum nú algildi báðum megin og notum að $|\pm 1| = 1$ þá fæst:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot |\overline{SP}| = |ax_1 + by_1 + c| \text{ svo } |\overline{SP}| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$