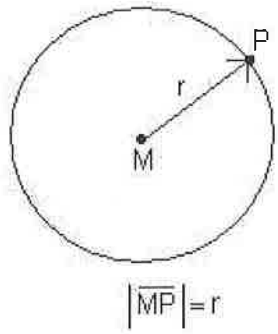
Kafli 4 – Keilusnið

Jafna hrings



Punkar sem liggja á hring í hnitakerfi uppfylla ákveðna jöfnu sem nefnist jafna hringsins.
Látum M = (h , k) vera miðju hringsins, r vera radíus hringsins og P = (x , y) vera einhvern punkt á hringnum (sjá mynd).
Hnit vigursins $\overline{MP}$ eru $\begin{pmatrix} x-h \\ y-k \end{pmatrix}$.

Nú fæst:

P er á hringnum ef og aðeins ef lengd vigursins $\overline{MP}$ er jöfn radíus hringsins, þ.e. ef

$$|\overline{MP}| = \left|\begin{pmatrix} x-h \\ y-k \end{pmatrix}\right| = r.$$

Samkvæmt reglunni um lengd vigurs er $\left|\begin{pmatrix} x-h \\ y-k \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$ svo

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r.$$

Setjum báðar hliðar í annað veldi og þá fæst jafnan:

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

Í jöfnu hringsins kemur fram hnit miðjunnar (h , k) og radíus hringsins. Taktu eftir að hnit miðjunnar eru gagnstæð við merkin í sviganum.

Dæmi 4.1 Ritaðu jöfnu hrings með miðju M = (2 , – 5) og radíus r = 4.

Lausn: $(x-2)^2+(y-(-5))^2 = 4^2$ eða $(x-2)^2+(y+5)^2 = 4^2$

Dæmi 4.2 Er punkturinn Q = (5 , 1) innan eða utan hringsins eða á hringnum sem gefinn er með jöfnunni: $(x+2)^2+y^2 = 7^2$?

Lausn: Hringurinn er með miðju (– 2 , 0) og radíus r = 7. Reiknum fyrst hnit vigursins $\overline{MQ}$ og síðan lengd hans og berum saman við radíus hringsins.
$\overline{MQ} = \begin{pmatrix} 5-(-2) \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $|\overline{MQ}| = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50} > 7$. Þar með sést að Q er utan hringsins.

Dæmi 4.6 Reiknaðu skurðpunkta hringsins sem gefinn er með jöfnunni $(x+1)^2+(y-2)^2=8$ við hnitaásana (þ.e. x-ás og y-ás).

Lausn: Reiknum fyrst skurðpunkta við x-ás: Um alla punkta á x-ási gildir að y-hnit þeirra er 0, þ.e. þeir hafa hnit á forminu (x , 0). Margföldum fyrst upp úr svigunum í jöfnu hringsins og setjum síðan 0 í stað y og færum alla liði í vinstri hlið. Þá fæst:

$$x^2+2x+1+y^2-4y+4=8 \text{ sem verður } x^2+2x-3=0$$

sem er annars stigs jafna með lausnir x = 1 og x = -3. Skurðpunktar við x-ás eru því (–3 , 0) og (1 , 0).
Punktar á y-ási hafa x-hnitið 0, þ.e. þeir hafa hnit á forminu (0 , y) svo þeir finnast með því að setja x = 0 í jöfnu hringsins og þá fæst annars stigs jafnan:

$$y^2-4y-3=0 \text{ sem hefur lausnir } \frac{4\pm\sqrt{28}}{2}\approx\begin{cases}4{,}65\\-0{,}65\end{cases}$$

svo skurðpunktar við y-ás eru (0 ; 4,65) og (0 , – 0,65).

Skurðpunktar hrings og línu

Ef reikna á skurðpunkta hrings og línu þarf að leysa saman jöfnu hringsins og jöfnu línunnar en það er hægt að gera með því að nota innsetningaraðferðina:

i) Reiknum upp úr svigunum í jöfnu hringsins ef hún er á forminu $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ og færum alla liði í aðra hlið.

ii) Setjum línuna á skurðhallaform y = hx + m ef hún er á öðru formi*.

iii) Setjum stærðina (hx + m) í staðinn fyrir y – ið í jöfnu hringsins og fáum annars stigs jöfnu með x sem leysa má í vasareikninum.

iv) Reiknum síðan y-hnit skurðpunktanna með því að setja inn í jöfnu línunnar.

*(Í sumum dæmum gæti verið einfaldara að einangra x – ið í jöfnu línunnar og fá fram annars stigs jöfnu með y).

Dæmi 4.8 Reiknaðu skurðpunkta hringanna sem gefnir eru með jöfnunum $(x+2)^2+(y-3)^2=4^2$ og $x^2+y^2-4y-1=0$.

Lausn: Reiknum upp úr sviganum í hring I: þá fæst $x^2+4x+y^2-6y-3=0$

Margföldum jöfnu hrings II með – 1 og leggjum við jöfnu hrings I:

$$x^2+4x+y^2-6y-3=0$$

$$-x^2-y^2+4y+1=0$$

$$4x-2y-2=0$$

Jafnan $4x-2y-2=0$ er jafna línu sem á skurðhallaforminu verður y = 2x – 1.

Setjum næst stærðina (2x – 1) inn fyrir y í jöfnu hrings II (hún er einfaldari) og reiknum upp úr svigunum. Þá fæst:

$$x^2+(2x-1)^2-4(2x-1)-1=0 \quad\Rightarrow\quad 5x^2-12x+4=0.$$

Lausnir 2. stigs jöfnunnar eru $x_1=2$, $x_2=0{,}4$ og tilsvarandi y verða

$$y_1=3 \text{ og } y_2=-0{,}2$$

Skurðpunktarnir verða þá (2 , 3) og (0,4 ; – 0,2).