Kafli 3 – Þríhyrningar

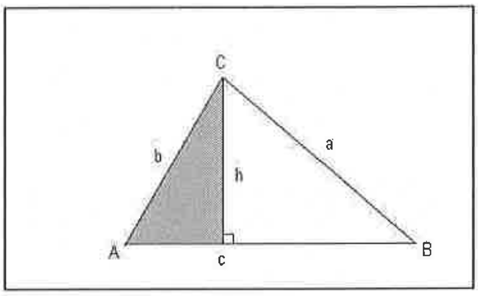
Í þessum kafla eru þrjár reglur sem gilda í öllum í þríhyrningum. Fyrsta reglan er flatarmálsregla en hinar tvær reglurnar eru til að reikna horn og hliðar í þríhyrningi.

Regla 1: Flatarmál (F) þríhyrningsins ABC er

$$\boxed{F = \frac{1}{2} bc \sin(A)}$$

Sönnun:

Veljum c fyrir grunnlínu og teiknum hæðina h á grunnlínuna.



Litli skyggði þríhyrningurinn er rétthyrndur með langhlið b og því gildir:

$$\sin(A) = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \sin(A)$$

Notum nú regluna F = $\frac{1}{2} g \cdot h$ til að reikna flatarmál þríhyrningsins ABC og þá fæst:

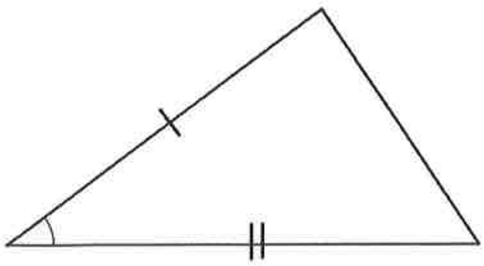
$$F = \frac{1}{2} g \cdot h = \frac{1}{2} c \cdot h = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin(A)$$

Ath. Ekki skiptir máli hvaða hlið er valin fyrir grunnlínu og því fæst á samsvarandi hátt að

$$F = \frac{1}{2} bc \sin(A) = \frac{1}{2} ab \sin(C) = \frac{1}{2} ac \sin(B) \qquad \text{Q.E.D.}$$

Í sönnuninni hér að ofan er gert ráð fyrir að þríhyrningurinn sé hvasshyrndur en sama niðurstaða fæst þótt þríhyrningurinn sé rétthyrndur eða gleiðhyrndur.

Ath. Til að geta notað regluna um flatarmálið þarftu að þekkja tvær hliðar og hornið á milli hliðanna (sjá mynd).



Dæmi um notkun sínusreglunnar

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Hægt er að nota sínusregluna á tvo vegu:

i) Ef þekkt er ein hlið og öll horn þá er hægt að reikna hinar lengdir hinna hliðanna. (Ath. Það nægir að tvö horn séu gefin upp því hægt er að reikna þriðja hornið með því að nota hornasummu þríhyrnings.)

Dæmi 3.3 Í ΔABC er gefið að a = 5, $\angle A = 30°$ og $\angle B = 65°$. Reiknaðu þriðja hornið og lengdir b og c.

Lausn: Reiknum fyrst hornið C.

$$\angle C = 180° - 30° - 65° = 85°.$$

Finnum næst lengd hliðarinnar b með sínusreglunni.

$$\frac{b}{\sin(B)} = \frac{a}{\sin(A)} \Rightarrow \frac{b}{\sin(65°)} = \frac{5}{\sin(30°)} \Rightarrow b = \frac{\sin(65°)\cdot 5}{\sin(30°)} \approx 9{,}06$$

Finnum svo lengd hliðarinnar c á samsvarandi hátt:

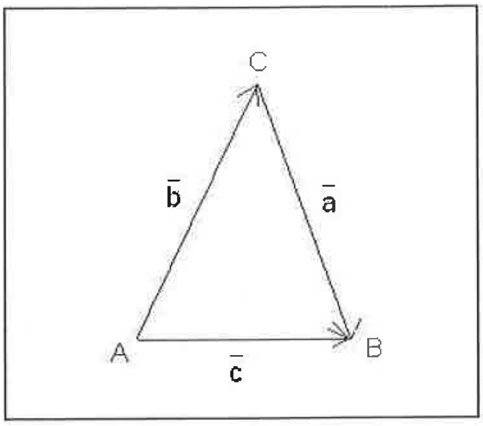
$$\frac{c}{\sin(C)} = \frac{a}{\sin(A)} \Rightarrow \frac{c}{\sin(85°)} = \frac{5}{\sin(30°)} \Rightarrow c = \frac{\sin(85°)\cdot 5}{\sin(30°)} \approx 9{,}96$$

ii) Ef þekktar eru tvær hliðar og horn sem er **<u>á móti</u>** annarri þekktu hliðinni er hægt að reikna hornið **<u>á móti</u>** hinni hliðinni (þriðja hornið finnst svo með því að nota hornasummuna og þriðja hliðin með sínusreglunni sbr. i)). Hér er aðgátar þörf því að hugsanlega koma tvö horn til greina þ.e. hvassa hornið sem vasareiknirinn gefur og frændhornið sem er gleitt (frændhorn hafa sama sínus). Stundum er hægt að útiloka gleiða hornið (eða hvassa hornið) vegna hornasummunnar en sum dæmi hafa tvær lausnir, m.ö.o. tveir þríhyrningar koma til greina.

Kósínusreglan

Regla 3: Í þríhyrningnum ABC gildir að $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$

Sönnun: Búum til vigra úr hliðum þríhyrningsins ABC (sjá mynd) og setjum $\overline{AB} = \bar{c}$, $\overline{AC} = \bar{b}$ og $\overline{CB} = \bar{a}$ þá fæst



$$\bar{b} + \bar{a} = \bar{c} \Rightarrow \bar{a} = \bar{c} - \bar{b}$$

Reiknum næst innfeldi vigursins $\bar{a}$ við sjálfan sig báðum megin jafnaðarmerkisins og þá fæst:

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = (\bar{c} - \bar{b}) \cdot (\bar{c} - \bar{b}) = \bar{c} \cdot \bar{c} - 2\bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{b}$$

Notum síðan regluna $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$ ásamt reglunni $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos(v)$ og þá fæst

$$|\bar{a}|^2 = |\bar{c}|^2 - 2|\bar{b}||\bar{c}|\cos(A) + |\bar{b}|^2$$

en það gefur kósínuregluna

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$ Q.E.D.

Dæmi um notkun kósínusreglunnar

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

Hægt er að nota kósínusregluna á tvo vegu:

i) Ef þekktar eru tvær hliðar og hornið á milli þeirra þá er hægt að reikna þriðju hliðina, þ.e. hliðina á móti horninu. (Sömu upplýsingar duga til að hægt sé að nota fyrrnefnda reglu um flatarmál þríhyrnings.)

Dæmi 3.6 Í ΔABC er gefið að a = 5, b = 6 og $\angle C = 65°$. Reiknaðu lengd hliðarinnar c.

Lausn: Samkvæmt kósínusreglunni er $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$. Því fæst:

$$c^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(65°) \approx 35{,}64 \Rightarrow c \approx 5{,}97$$