Hliðstæð regla fyrir tangensinn er:

R5:
$\tan(v + 180°) = \tan(v)$

hún fæst með því að deila neðri jöfnunni í **R4** upp í efri jöfnuna. Tangensinn helst sem sagt óbreyttur þegar hálfri umferð er bætt við hornið. Því eru ávallt tvö horn í hverri umferð sem hafa sama tangens.

10. Að finna x þegar tan(x) er þekktur

Dæmi 2.17 Finndu tvö horn í fyrstu umferð sem hafa tangensinn 0,5 eða með öðrum orðum:

$$\text{Leystu jöfnuna } \tan(x) = 0{,}5 \quad , \quad x \in [0°, 360°[.$$

Lausn: Finnum eina lausn með vasareikninum: $x = \tan^{-1}(0{,}5) \approx 26{,}6°$ og hin lausnin er $26{,}6° + 180° = 206{,}6°$.

Dæmi 2.18 Leystu jöfnuna $\tan(x) = -0{,}5 \quad , \quad x \in [0°, 360°[$.

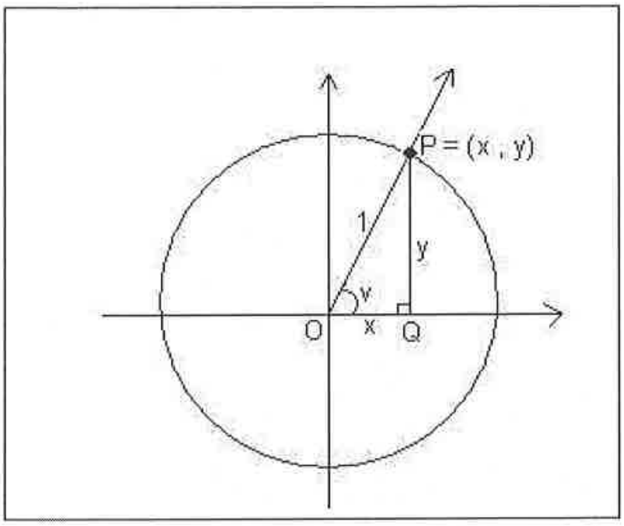
Lausn: Finnum eina lausn með vasareikninum: $x = \tan^{-1}(-0{,}5) \approx -26{,}6°$ og önnur lausn er $-26{,}6° + 180° = 153{,}4°$. Þar sem lausnin $-26{,}6°$ er ekki í bilinu $[0°, 360°[$ fæst þriðja lausn með því að leggja 180° við síðustu lausn og þá fæst lausnin 333,4° (einnig er hægt að bæta 360° við fyrstu lausnina). Lausnirnar eru því 153,4° og 333,4°.

Annars stigs hornafallajöfnur

Jafnan $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$ er dæmi um annars stigs hornafallajöfnu. Hún er sambland af annars stigs jöfnu og sínusjöfnu. Fyrst þarf að leysa annars stigs jöfnuna. Það er hægt að gera með annars stigs formúlunni, eða með því að reyna að þátta jöfnuna í tvær fyrsta stigs jöfnur. Þrautalendingin er að leysa annars stigs jöfnuna í vasareikninum. Lausnin á annars stigs jöfnunni (oftast tvær lausnir) gefur möguleg gildi á sin(x) og þá er eftir að leysa sínusjöfnu til að finna x-ið.

Ein mikilvægasta regla hornafræðinnar er eftirfarandi regla:

R6: $\cos^2(v)+\sin^2(v)=1$



Sönnun: Höfum að $\overline{OP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ og

$|\overline{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}=1$

Setjum báðar hliðar í annað veldi og þá fæst

niðurstaðan: $x^2+y^2=1$ en nú var
x = cos(v) og y = sin(v) og þar með fæst
að $\cos^2(v)+\sin^2(v)=1$.

Hægt er að nota **R6** til að reikna nákvæmt gildi á sínus þegar cosínus er þekktur eða öfugt.

Dæmi 2.22 Reiknaðu nákvæmt gildi á sin(v) og tan(v) ef cos(v) = $\frac{5}{13}$.

Lausn: Notum fyrst **R6** til að finna sínusinn:

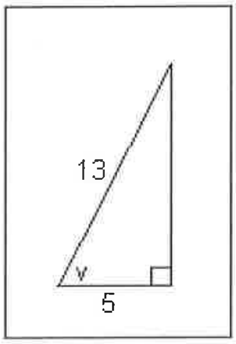
Höfum að $\left(\frac{5}{13}\right)^2+\sin^2(v)=1 \Rightarrow \sin^2(v)=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169} \Rightarrow \sin(v)=\pm\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}}=\pm\frac{12}{13}$.

Hér eru tvær lausnir því að v getur bæði verið í 1. eða 4. fjórðungi fyrst cos(v) > 0 og því getur sin(v) bæði verið jákvæður eða neikvæður.

Finnum síðan tangensinn: tan(v) = $\frac{\sin(v)}{\cos(v)}=\frac{\pm\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}=\pm\frac{12}{5}$.

Síðasta dæmi má einnig leysa á annan hátt. Teiknum rétthyrndan þríhyrning með skammhlið 5 og langhlið 13 og köllum aðlægt horn skammhliðarinnar v. Finnum næst hina skammhliðina sem er mótlæg horninu með reglu Pýþagórasar: $5^2+b^2=13^2 \Rightarrow b=12$.

Þar með finnst að $\sin(v)=\pm\frac{12}{13}$. Þar sem hornið v getur bæði verið í fyrsta eða fjórða fjórðungi (cosínusinn er jákvæður) getur sínusinn bæði verið plústala eða mínustala.



Næsta dæmi er sérlega mikilvægt:

Dæmi 2.24 Reiknaðu hornið á milli vigranna $\overline{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\overline{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lausn: Finnum fyrst innfeldi vigranna og lengdir:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (-1) \cdot 8 + 4 \cdot 3 = 4 \ , \quad |\overline{a}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} \text{ og } |\overline{b}| = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$$

Nú fæst: $\cos(v) = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \dfrac{4}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{73}} \approx 0{,}1135 \Rightarrow v \approx 83{,}5°$.

Dæmi 2.25 Reiknaðu hornið á milli vigranna $\overline{a}$ og $\overline{b}$ ef $|\overline{a}| = 8$, $|\overline{b}| = 2$ og $\overline{a} \cdot \overline{b} = -3$.

Lausn: Ef við einangrum cosínusinn í reglunni fæst $\cos(v) = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$. Setjum tölurnar inn og fáum $\cos(v) = \dfrac{-3}{8 \cdot 2} = -\ 0{,}1875 \Rightarrow v = 100{,}8°$.

Dæmi 2.26 Finndu gildið á s ef hornið á milli vigranna $\overline{a} = \begin{pmatrix} s \\ s-4 \end{pmatrix}$ og $\overline{b} = \begin{pmatrix} s+2 \\ 1 \end{pmatrix}$ er gleitt.

Lausn: Ef hornið er gleitt þá er innfeldið $\overline{a} \cdot \overline{b} < 0$. Reiknum innfeldið og fáum:
$\overline{a} \cdot \overline{b} = s(s+2) + (s-4) \cdot 1 = s^2 + 3s - 4 < 0$. Þetta er 2. stigs ójafna sem við leysum með því að finna rætur margliðunnar $s^2 + 3s - 4$ og gera síðan formerkjamynd.

Finnum fyrst ræturnar: $s^2 + 3s - 4 = (s+4)(s-1)$. Nú sést að ræturnar eru s = – 4 og s = 1 og formerkjamyndin verður svona:

		-4		1	
$s^2 + 3s - 4$	+	0	–	0	+

Lausnin er þar sem margliðan er neikvæð (mínusmerkið) svo $s \in \,]-4\ ,\ 1[$.