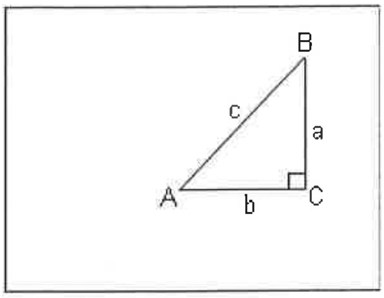
# Kafli 2 – Hornafræði

## 1. Hornaföll í rétthyrndum þríhyrningi

Þessi kafli hefst á upprifjun á hornaföllum í rétthyrndum þríhyrningi.




Í rétthyrndum þríhyrningi ABC þar sem $\angle C = 90^\circ$ gildir:

$$\sin(A) = \frac{a}{c} \quad \left(\text{sínus af hvössu horni} = \frac{\text{mótlæg skammhlið}}{\text{langhlið}}\right)$$

$$\cos(A) = \frac{b}{c} \quad \left(\text{cosínus af hvössu horni} = \frac{\text{aðlæg skammhlið}}{\text{langhlið}}\right)$$

$$\tan(A) = \frac{a}{b} \quad \left(\text{tangens af hvössu horni} = \frac{\text{mótlæg skammhlið}}{\text{aðlæg skammhlið}}\right)$$

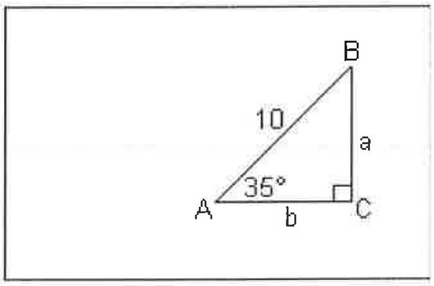
Þessar reglur er hægt að nota til að reikna horn eða hlið í rétthyrndum þríhyrningi.

**Dæmi 2.1** Reiknaðu lengd hliðarinnar b í rétthyrnda þríhyrningum ABC ef $\angle A = 35^\circ$ og c = 10.

**Lausn:** Hliðin b er aðlæg skammhlið hornsins A og því fæst

$$\cos(35^\circ) = \frac{b}{10} \Rightarrow b = 10 \cdot \cos(35^\circ) \approx 8{,}19.$$

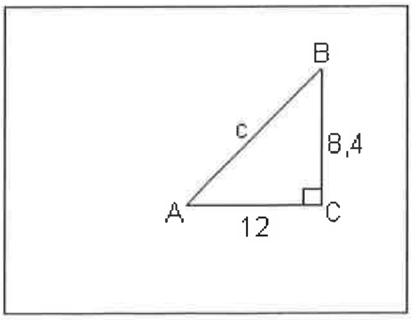
(Talan $\cos(35^\circ) \approx 0{,}819$ finnst í vasareikninum með því að nota cosínus takkann.)



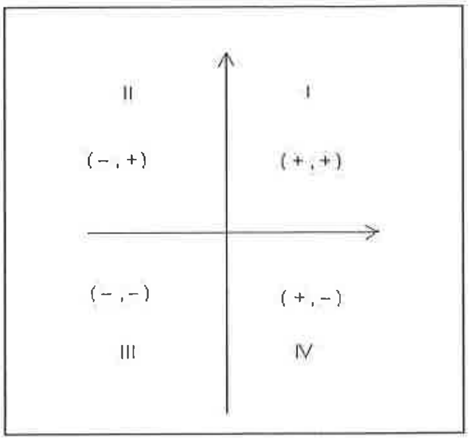

**Dæmi 2.2** Reiknaðu hornið A í rétthyrnda þríhyrningnum ABC ef a = 8,4 og b = 12.

**Lausn:** Höfum að $\tan(A) = \frac{8{,}4}{12} = 0{,}7$.

Hornið A finnst nú með því að nota tangenstakkann afturábak þ.e. $\tan^{-1}$ (= Shift tan) svo $\angle A = \tan^{-1}(0{,}7) \approx 35^\circ$.



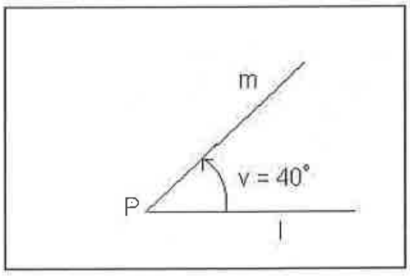
Ásar hnitakerfisins skipta því í fjóra hluta sem kallast fyrsti, annar, þriðji og fjórði fjórðungur (sjá mynd). Taktu eftir formerkjum á hnitum punkta í þessum fjórum fjórðungum.




### 3. Horn sem myndast við snúning

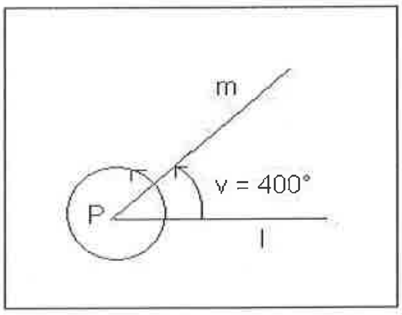
Horn ákvarðast af tveimur hálflínum sem liggja út frá sama punkti P. Hægt er að hugsa sér að hornið myndist þannig að annarri línunni sé snúið um P frá hinni línunni. Tvær snúningsstefnur eru mögulegar, rangsælis (öfugur klukkugangur) sem er jákvæður snúningur og réttsælis (eins og klukkan gengur) sem er neikvæður snúningur. Horn sem kemur fram við snúning getur því verið neikvætt og það getur líka verið meira en 360°.

Á myndinni hefur hornið v = 40° myndast þegar m var snúið 40° rangsælis um P frá l. Ef m er snúið 400° rangsælis um P er lokastaða línanna l og m hin sama. Snúningur um heila hringi réttsælis eða rangsælis breytir ekki lokastöðu l og m og þess vegna eru óendanlega mörg horn sem líta eins út á mynd því að það eru óendanlega margir möguleikar á hve marga heila hringi er hægt að snúa.



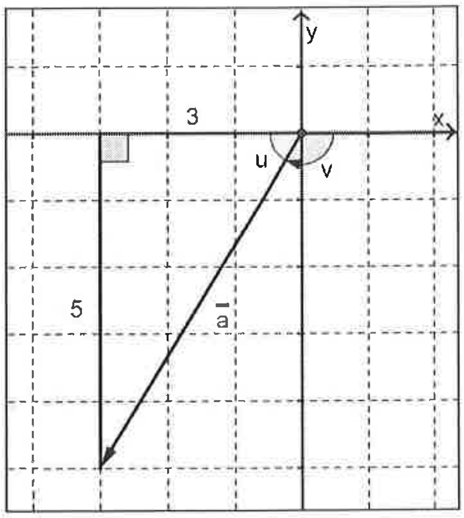

Hornin $40°$, $40° + 360°$, $40° + 2 \cdot 360°$, $40° - 3 \cdot 360°$ eða almennt $40° + h \cdot 360°$ þar sem h getur verið hvaða heila tala sem er, líta öll eins út á mynd.
Þetta er ritað $40° + h \cdot 360°$, $h \in Z$.

Horn sem er á bilinu $[0°, 360°[$ er sagt vera í fyrstu umferð, horn á bilinu $[360°, 720°[$ í annarri umferð o.s.frv.



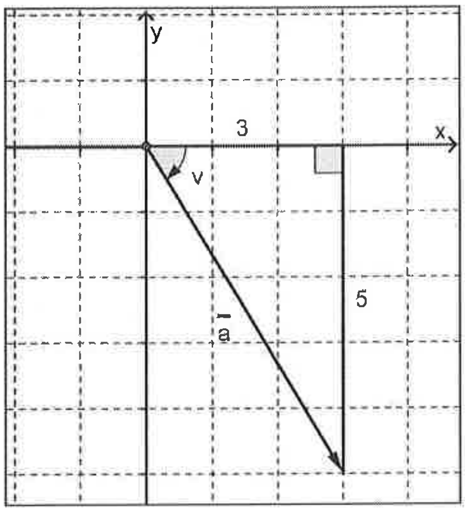

Horn í þríhyrningi eru hins vegar ekki reiknuð með formerki og eru á bilinu $]0°, 180°[$.
Horn á milli vigra verður ekki reiknað hér með formerki og er á bilinu $[0°, 180°]$.

**Dæmi 2.5** Finndu stefnuhorn vigursins $\bar{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.




**Lausn:** Vigurinn liggur í þriðja fjórðungi og stefnuhornið er því neikvætt (mælt réttsælis). Við leysum dæmið eins og dæmi 2 og finnum grannhornið u sem er u.þ.b. 59° en þá er stefnuhornið $v \approx -121°$.

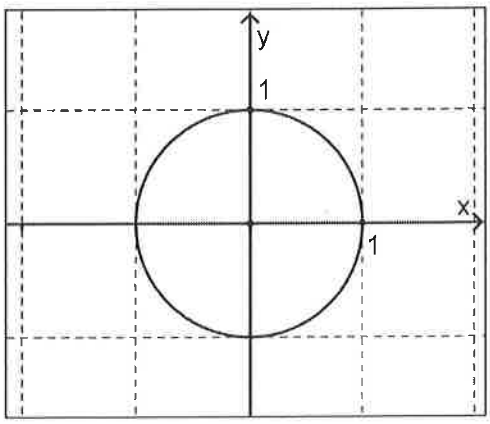
**Dæmi 2.6** Finndu stefnuhorn $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.



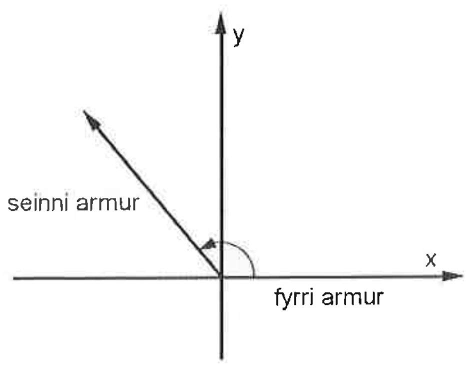

**Lausn:** Vigurinn liggur í fjórða fjórðungi svo stefnuhornið verður neikvætt. Við leysum dæmið eins og dæmi 1 og fáum $v \approx -59°$.

## 5. Einingarhringur og horn í grunnstöðu

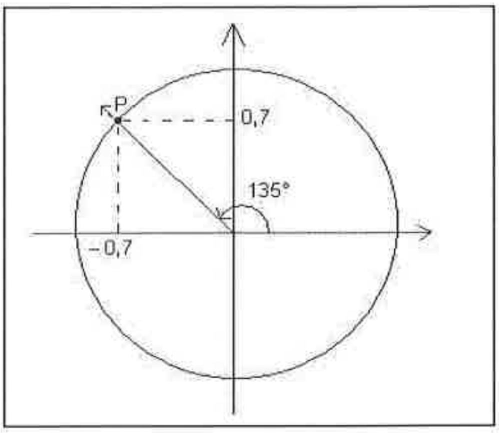
Hringur með miðju í (0,0) og radíus 1 verður í textanum sem hér fer á eftir kallaður einingarhringur.



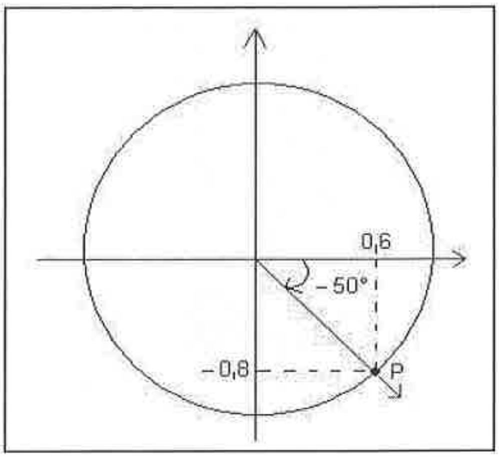

Horn sem er með oddpunkt (0,0) og annan arminn í stefnu x-áss kallast horn í grunnstöðu. Sá armur hornsins sem liggur í stefnu x-áss kallast fyrri armur hornsins og hinn armurinn kallast seinni armur (sjá mynd)



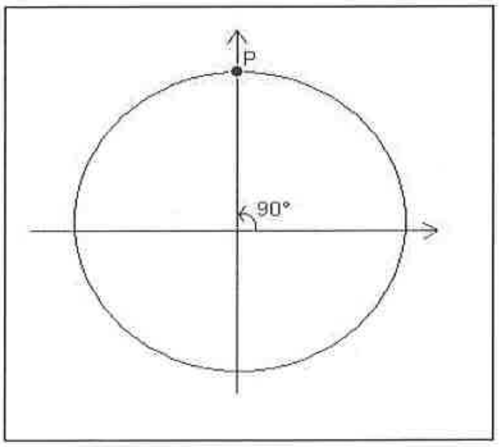
**Dæmi 2.7** Á myndinni sést 135° horn teiknað í grunnstöðu og einingarhringur. Hnit punktsins P eru nálægt því að vera $(-0{,}7; 0{,}7)$. Þá er $\cos(135^\circ) \approx -0{,}7$ og $\sin(135^\circ) \approx 0{,}7$.




**Dæmi 2.8** Á myndinni er $-50^\circ$ horn teiknað í grunnstöðu ásamt einingarhring. Hnit punktsins P eru nálægt því að vera $(0{,}6 ; -0{,}8)$. Þá er $\cos(-50^\circ) \approx 0{,}6$ og $\sin(-50^\circ) \approx -0{,}8$.




**Dæmi 2.9** Á myndinni er 90° horn teiknað í grunnstöðu ásamt einingarhring. Hnit punktsins P eru (0 , 1). Þá er cos(90°) = 0 og sin(90°) = 1.



## 8. Að finna x þegar sin(x) er þekktur

**Dæmi 2.11** Finndu tvö horn í fyrstu umferð sem hafa sínusinn 0,5 eða með öðrum orðum:

Leystu jöfnuna sin(x) = 0,5 , $x \in [0°, 360°[$.

**Lausn:** Finnum eina lausn með vasareikninum: x = $\sin^{-1}(0,5) = 30°$ og hin lausnin er frændhornið sem er 180° – 30°= 150°.

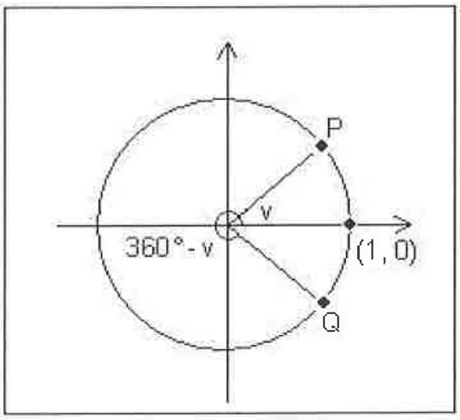
**Dæmi 2.12** Leystu jöfnuna sin(x) = – 0,5 , $x \in [0°, 360°[$.

**Lausn:** Finnum fyrst lausnina $x = \sin^{-1}(-0,5) = -30°$ og síðan frændhornið sem er $180° - (-30°) = 210°$. Lausnin $-30°$ er hins vegar ekki í bilinu $[0°, 360°[$ en ný lausn kemur eftir heila umferð og hún er $-30° + 360° = 330°$. Lausnirnar eru því 210° og 330°.

**Dæmi 2.13** Leystu jöfnuna sin(x) = 1 , $x \in [0°, 360°[$.

**Lausn:** Önnur lausnin er $x = \sin^{-1}(1) = 90°$ og hin lausnin sem er frændhornið er 180° – 90° = 90°. Hér eru hornið og frændhornið jafnstór svo jafnan hefur aðeins eina lausn.

Ef hornin v og 360° – v eru bæði teiknuð í grunnstöðu liggja seinni armar þeirra samhverft um x-ás og skurðpunktar seinni armanna og einingarhringsins liggja einnig samhverft um x-ás (sjá mynd). Punktarnir P og Q hafa því sömu x-hnit og gagnstæð y-hnit. Þar með fást eftirfarandi tvær reglur:




**R3:**
sin(360° – v) = – sin(v)
cos(360° – v ) = cos(v)

Hliðstæð regla fyrir tangensinn er tan(360° – v) = – tan(v) en hún fæst með því að deila neðri jöfnunni upp í efri jöfnuna.

Hliðstæð regla fyrir tangensinn er:

R5:
$\tan(v + 180°) = \tan(v)$

hún fæst með því að deila neðri jöfnunni í **R4** upp í efri jöfnuna. Tangensinn helst sem sagt óbreyttur þegar hálfri umferð er bætt við hornið. Því eru ávallt tvö horn í hverri umferð sem hafa sama tangens.

### 10. Að finna x þegar tan(x) er þekktur

**Dæmi 2.17** Finndu tvö horn í fyrstu umferð sem hafa tangensinn 0,5 eða með öðrum orðum:

Leystu jöfnuna $\tan(x) = 0{,}5 \ , \ x \in [0°, 360°[$.

**Lausn:** Finnum eina lausn með vasareikninum: $x = \tan^{-1}(0{,}5) \approx 26{,}6°$ og hin lausnin er $26{,}6° + 180° = 206{,}6°$.

**Dæmi 2.18** Leystu jöfnuna $\tan(x) = -0{,}5 \ , \ x \in [0°, 360°[$.

**Lausn:** Finnum eina lausn með vasareikninum: $x = \tan^{-1}(-0{,}5) \approx -26{,}6°$ og önnur lausn er $-26{,}6° + 180° = 153{,}4°$. Þar sem lausnin $-26{,}6°$ er ekki í bilinu $[0°, 360°[$ fæst þriðja lausn með því að leggja 180° við síðustu lausn og þá fæst lausnin 333,4° (einnig er hægt að bæta 360° við fyrstu lausnina). Lausnirnar eru því 153,4° og 333,4°.

### Annars stigs hornafallajöfnur

Jafnan $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$ er dæmi um annars stigs hornafallajöfnu. Hún er sambland af annars stigs jöfnu og sínusjöfnu. Fyrst þarf að leysa annars stigs jöfnuna. Það er hægt að gera með annars stigs formúlunni, eða með því að reyna að þátta jöfnuna í tvær fyrsta stigs jöfnur. Þrautalendingin er að leysa annars stigs jöfnuna í vasareikninum. Lausnin á annars stigs jöfnunni (oftast tvær lausnir) gefur möguleg gildi á sin(x) og þá er eftir að leysa sínusjöfnu til að finna x-ið.