

Yfirlit úr kafla 1

Vigur hefur stærð og stefnu.

$$\overline{BA} = -\overline{AB}$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

$$\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b})$$

Ef $A = (x_1, y_1)$ og $B = (x_2, y_2)$ þá er $\overline{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$

Hallatala vigursins $\overline{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ er $h_a = \frac{y}{x}$ (ef $x \neq 0$)

Lengd vigursins $\overline{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ er $|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Innskotsreglan: $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$

Vigrarnir $\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} x/|\overline{a}| \\ y/|\overline{a}| \end{pmatrix}$ og $\overline{e}_2 = -\begin{pmatrix} x/|\overline{a}| \\ y/|\overline{a}| \end{pmatrix}$ eru einingarvigrar samsíða vigrinum $\overline{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Vigurinn \overline{e}_1 er samstefna \overline{a} og \overline{e}_2 er gagnstefna \overline{a} .

Samsíða vigrar: \overline{a} er samsíða \overline{b} ef til er tala s þannig að $\overline{a} = s\overline{b}$, þá er $h_a = h_b$.

Að leysa upp í liði: Ef leysa á \overline{c} upp eftir \overline{a} og \overline{b} þarf að finna tölur s og t þannig að $\overline{c} = s\overline{a} + t\overline{b}$.

Miðpunktur striks og þríhyrnings: Ef $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, M er miðpunktur striksins AB og T er miðpunktur (þyngdarpunktur) þríhyrningsins ABC þá er

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad \text{og} \quad T = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

Innfeldi: Ef $\overline{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ og $\overline{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ þá er $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

$$\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$$

$$|\overline{a} + \overline{b}|^2 = |\overline{a}|^2 + 2\overline{a} \cdot \overline{b} + |\overline{b}|^2 \quad \text{og} \quad |\overline{a} - \overline{b}|^2 = |\overline{a}|^2 - 2\overline{a} \cdot \overline{b} + |\overline{b}|^2$$

Reglan um hornréttar vigra: $\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{b} = 0$

Hornréttar línur: Ef l og m eru tvær línur sem eru hornréttar hvor á aðra og hvorug línan er lárétt (eða lóðrétt) þá er margfeldi hallatalanna $h_l \cdot h_m = -1$.

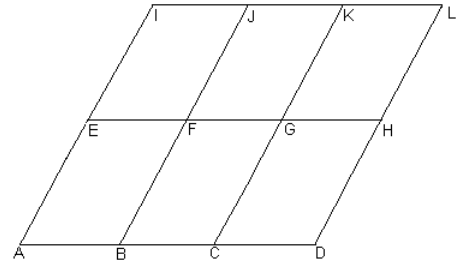
Þvervigrar: Ef $\overline{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ þá eru vigrarnir $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ hornréttir á \overline{a} og jafnlangir og \overline{a} .

Æfing 1.1

Á myndinni eru sex jafnstórir samsíðungar.
Notaðu myndina í dæmum 1, 2 og 3.

1. Hvaða vigrar á myndinni eru eins og

- a) \overline{AF} b) \overline{EA} c) \overline{JB}
d) \overline{LC} e) \overline{DI}



2. Notaðu myndina til að til að reikna

- a) $\overline{AB} + \overline{CF}$ b) $\overline{EB} + \overline{GK}$ c) $\overline{AF} + \overline{KH}$ d) $\overline{GI} + \overline{KD}$
e) $\overline{AH} + \overline{LE}$ f) $\overline{CL} + \overline{LD}$

3. Notaðu myndina til að reikna

- a) $\overline{AB} - \overline{EF}$ b) $\overline{AF} - \overline{AE}$ c) $\overline{AG} - \overline{HL}$ d) $\overline{FK} - \overline{GB}$
e) $\overline{BC} - \overline{BF}$ f) $\overline{KF} - \overline{CF}$

4. Hve margir vigrar (sem eru ekki núllvigrar) ákvarðast af þremur punktum A, B og C sem ekki liggja allir á sömu línunni?

5. Einfaldaðu eftirfarandi

- a) $\overline{PS} - \overline{QS}$ b) $\overline{PQ} + \overline{QR} - \overline{PR}$ c) $\overline{QR} - \overline{PR}$ d) $\overline{PQ} - \overline{RS} - \overline{PR}$

6. Gefnir eru tveir vigrar \overline{a} og \overline{b} (sjá mynd).
Finndu með teikningu eftirfarandi viga:

- a) $\overline{a} + \overline{b}$ b) $2\overline{a} + 3\overline{b}$
c) $\overline{a} - 2\overline{b}$ d) $\frac{1}{2}\overline{a} - 3\overline{b}$



Æfing 1.2

1. Reiknaðu hnit vigursins \overline{AB} og teiknaðu hann í hnitakerfi ef

a) $A = (1, 2)$ og $B = (3, 6)$ b) $A = (0, -2)$ og $B = (-3, 4)$

c) $A = (-3, 2)$ og $B = (2, -4)$ d) $A = (5, 0)$ og $B = (-1, 8)$

2. Reiknaðu hnit punktsins A ef $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ og

a) $B = (8, 2)$ b) $B = (0, -4)$ c) $B = (-1, 5)$ d) $B = (0, 0)$

3. Reiknaðu hnit punktsins B ef $\overline{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ og

a) $A = (2, 4)$ b) $A = (-4, 7)$ c) $A = (0, -3)$

4. Reiknaðu lengd vigursins \overline{AB} ef

a) $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ b) $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ c) $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ d) $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

5. Reiknaðu lengd vigursins \overline{AB} ef $A = (2, 5)$ og $B = (0, -4)$.

6. Reiknaðu gildið á x ef lengd vigursins $\overline{AB} = \begin{pmatrix} x \\ 8 \end{pmatrix}$ er 17.

7. Reiknaðu gildið á x ef $\left| \begin{pmatrix} x+2 \\ x-1 \end{pmatrix} \right| = 3$.

8. Teiknaðu eftirfarandi viga í hnitakerfi og reiknaðu hallatölu þeirra ef til er.

a) $\bar{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ d) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

9. Í eftirfarandi dæmi eru vigrarnir \bar{a} og \bar{b} samsíða. Reiknaðu gildið á x.

a) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ x \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\bar{a} = \begin{pmatrix} x+1 \\ x \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ c) $\bar{a} = \begin{pmatrix} x+1 \\ x \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ x-2 \end{pmatrix}$

10. $A = (4, 6)$, $B = (12, 5)$, $C = (-6, 8)$ og $D = (x, 2x + 3)$. Reiknaðu gildið á x ef gefið er að \overline{AB} er samsíða \overline{CD} .

11. Tilgreindir eru tveir punktar $P = (-3, -1)$ og $Q = (6, 2)$. Reiknaðu hnit punktanna A og B ef

a) $\overline{PA} = \frac{1}{2} \overline{AQ}$ b) $\overline{PQ} = -2 \overline{PB}$

Æfing 1.3

1. Gefnir eru vigrarnir $\bar{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$. Reiknaðu hnit vigranna

a) $\bar{a} + \bar{b}$ b) $2\bar{a} - 3\bar{b}$ c) Finndu hnit vigransins $\bar{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ef $3\bar{a} - \bar{c} = 2\bar{b}$

2. Gefinn er vigurinn $\bar{a} = \begin{pmatrix} 15 \\ -20 \end{pmatrix}$.

a) Finndu hnit einingarvigurs sem er samstefna \bar{a} .

b) Finndu hnit einingarvigurs sem er gagnstefna \bar{a} .

c) Finndu hnit þeirra vigra sem eru samsíða \bar{a} og hafa lengdina 10.

3. Finndu hnit þeirra einingarvigra sem eru samsíða $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

4. Leystu vigurinn $\bar{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ upp eftir \bar{i} og \bar{j} .

5. Gefnir eru vigrarnir $\bar{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ og $\bar{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$. Leystu \bar{c} upp eftir \bar{a} og \bar{b} .

6. Leystu \bar{j} upp eftir $\bar{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ og \bar{i} .

7. Leystu \bar{i} upp eftir $\bar{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ og \bar{j} .

Æfing 1.4

1. Reiknaðu hnit miðpunkts striksins AB ef

a) $A = (4, 10)$ og $B = (-2, 18)$

b) $A = (0, 8)$ og $B = (3, 6)$

c) $A = (3, -4)$ og $B = (15, -10)$

d) $A = (14, 6)$ og $B = (0, 0)$

2. a) Reiknaðu hnit punktsins A ef $B = (4, 8)$ og hnit miðpunkts striksins AB eru $M = (2, -10)$.

b) Reiknaðu hnit punktsins A ef $B = (0, -12)$ og hnit miðpunkts striksins AB eru $M = (1,5; 4)$

3. Reiknaðu hnit þyngdarpunkts þríhyrningsins ABC ef $A = (4, 8)$, $B = (6, 12)$ og $C = (5, 4)$.

4. Þríhyrningur ABC hefur hornpunkta A, B og C. Reiknaðu hnit hornpunktsins B ef $A = (2, 6)$, $C = (-5, 8)$ og þyngdarpunkturinn er $T = (10, -7)$.

5. Gefnir eru punktarnir $A = (0, 2)$, $B = (2, 10)$ og $C = (12, -8)$. Reiknaðu hnit punktsins D ef ABCD er samsíðungur.

6. Tilgreindir eru fimm punktar $A = (3, -1)$, $B = (1, 4)$, $C = (-2, 1)$, $E = (-1, 9)$ og $F = (x, 0)$.

- Reiknaðu hnit miðpunkts BC.
- Reiknaðu hnit punktsins D ef ABCD er samsíðungur (með hornalínu AC).
- Kannaðu með reikningi hvort \overline{AE} er samsíða \overline{AB} .
- Reiknaðu x ef gefið er að \overline{AF} og \overline{BC} eru jafnlangir.
- Reiknaðu hnit miðpunkts þríhyrningsins ABC.
- Reiknaðu hnit tveggja einingarvigna sem eru samsíða \overline{AB} .

Æfing 1.5

1. Reiknaðu innfeldi vigranna \bar{a} og \bar{b} ef

a) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ b) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\bar{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \end{pmatrix}$

2. Gefið er að $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 6$ og $\bar{a} \cdot \bar{b} = 4$. Reiknaðu

a) $|\bar{a} + \bar{b}|$ b) $|\bar{a} - \bar{b}|$ c) $|2\bar{a} - 3\bar{b}|$

3. Gefið er að $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 10$ og $|\bar{a} + \bar{b}| = 12$. Reiknaðu

a) $\bar{a} \cdot \bar{b}$ b) $|3\bar{a} - \bar{b}|$

4. Gefið er að $|\bar{a}| = 10$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = -4$ og $|\bar{a} + 2\bar{b}| = 12$. Reiknaðu $|\bar{b}|$.

5. Reiknaðu $\bar{a} \cdot \bar{b}$ og notaðu niðurstöðuna til að ganga úr skugga um hvort \bar{a} og \bar{b} eru hornréttir hvor á annan:

a) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} -14 \\ 10 \end{pmatrix}$ b) $\bar{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 21 \end{pmatrix}$ c) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \end{pmatrix}$

6. Finndu gildið á k ef gefið er að vigrarnir \bar{a} og \bar{b} eru hornréttir hvor á annan ef

a) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} k+1 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\bar{a} = \begin{pmatrix} k+2 \\ -2 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} k-2 \\ 6 \end{pmatrix}$ c) $\bar{a} = \begin{pmatrix} k-2 \\ k-1 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} k+2 \\ k-3 \end{pmatrix}$

7. Finndu hnit tveggja viga sem eru hornréttir á vigrinn \bar{a} og jafnlangir og vigrinn \bar{a} ef

a) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ b) $\bar{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ c) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ d) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

8. Finndu hnit tveggja einingarvigna sem eru hornréttir á \bar{a} ef

a) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix}$ b) $\bar{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ c) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ d) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

9. Finndu hnit tveggja vigra sem eru hornréttir á \vec{a} og hafa lengdina 8 ef

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

10. Finndu hallatölu línu sem er hornrétt á línuna l ef jafna l er gefin með

$$\text{a) } y = 2x - 4 \quad \text{b) } y = -\frac{1}{3}x + 8 \quad \text{c) } 2x + 3y + 6 = 0 \quad \text{d) } x = 6$$

11. Gefnir eru punktarnir $A = (4, 8)$, $B = (12, 2)$ og $C = (-2, 4)$. Reiknaðu hnit punktsins D ef gefið er að D er á x-áasi og $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

12. Tilteknir eru punktarnir $A = (-6, 1)$, $B = (1, 0)$, $C = (3, 2)$ og $D = (k, k+2)$.

a) Reiknaðu k ef $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

b) Reiknaðu k ef $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

c) Reiknaðu k ef $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$.

13. Tilteknir eru punktarnir $A = (-2, -1)$, $B = (3, 0)$ og $C = (5, 4)$.

a) Reiknaðu hnit \overline{AB} og \overline{AC} .

b) M er miðpunktur BC. Reiknaðu hnit M.

c) Reiknaðu lengd miðlínunnar m_a í þríhyrningnum ABC.

d) Ákvarðaðu töluna k þannig að $\begin{pmatrix} k-2 \\ 3k \end{pmatrix} \perp \overline{AB}$.

e) Ákvarðaðu punkt D á x-áasi þannig að strikin DA og DB verði jafn löng.

f) Ákvarðaðu punkt E á y-áasi þannig að $\angle AEB = 90^\circ$.

Æfing 1. 6

1. Tiltekinn er þríhyrningur ABC. Láttu S vera punkt á BC þannig að $\overline{BS} = \frac{3}{4}\overline{BC}$ og láttu T vera punkt á AC þannig að $\overline{AT} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Táknaðu \overline{TS} með \overline{AB} og \overline{AC} . (Teiknaðu fyrst mynd af þríhyrningi ABC og merktu S og T inn á hana.)

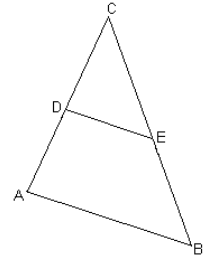
2. ABC er ótilgreindur þríhyrningur og D er punktur á BC þannig að $\overline{BD} = \frac{3}{4}\overline{BC}$. Táknaðu \overline{AD} með \overline{AB} og \overline{AC} . (Teiknaðu fyrst mynd af þríhyrningi ABC og merktu D inn á hana.)

3. ABC er ótilgreindur þríhyrningur og S er punktur á BC þannig að $\overline{BS} = 2\overline{SC}$. Táknaðu \overline{AS} með \overline{AB} og \overline{AC} . (Teiknaðu fyrst mynd af þríhyrningi ABC og merktu S inn á hana.)

4. Tilteknir eru þrjú punktar A, B og C þannig að $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{CB}$. Táknaðu \overline{OC} með \overline{OA} og \overline{OB} ef O er ótilgreindur punktur í fletinum. Teiknaðu fyrst mynd.

5. Á myndinni eru D og E miðpunktir hliðanna AC og BC.

Notaðu vigurreikning til að sýna að $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{AB}$.



6. Hornalínurnar í ferhyrningnum ABCD helminga hvor aðra. Sýndu að $\overline{AB} + \overline{CD} = \vec{0}$.

7. Tiltekinn er samsíðungur ABCD á CD er punktur P þannig að $\overline{DP} = 3\overline{PC}$ og á BC er punktur Q þannig að $\overline{BQ} = 2\overline{QC}$. Táknaðu \overline{PQ} með \overline{AB} og \overline{AC} . (Teiknaðu fyrst mynd.)

Ýmis dæmi 1

1. Gefnir eru punktarnir $A = (2, 6)$, $B = (-2, 13)$ og $C = (6, 3)$.

a) Reiknaðu hnit vigranna \overline{AB} og \overline{AC} .

b) Reiknaðu $|\overline{AB}|$.

c) Reiknaðu hallatölu \overline{AB} .

d) Reiknaðu hnit miðpunkts striksins BC.

e) Reiknaðu hnit miðpunkts (þyngdarpunkts) þríhyrningsins ABC.

f) Búðu til tvo einingarviga sem eru hornréttir á \overline{AC} .

g) Reiknaðu hnit punkts D þannig að ABCD verði samsíðungur (með hornalínu AC).

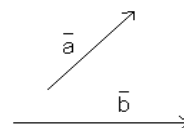
2. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ s+1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} s-3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Reiknaðu gildið á s ef gefið er að

a) \vec{a} er samsíða \vec{b} .

b) \vec{a} er hornréttur á \vec{b} .

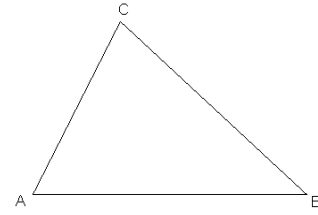
3. Einfaldaðu $\overline{PR} + \overline{PQ} + \overline{RQ} - \overline{QP}$

4. Sýndu á teikningu samlagninguna $\vec{a} + \vec{b}$



5. Reiknaðu $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ef gefið er að $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 5$ og $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 20$.

6. Í þríhyrningnum ABC er P punktur á hliðinni AB þannig að $\overline{AP} = \frac{3}{5}\overline{AB}$ og Q er punktur á hliðinni BC þannig að $\overline{BQ} = \frac{1}{2}\overline{QC}$.



a) Merktu punktana P og Q inn á myndina.

b) Táknaðu \overline{PQ} með \overline{AB} og \overline{AC} .

7. Leystu vigurinn $\bar{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ upp eftir $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

8. Gefnir eru punktarnir $A = (3, 6)$, $B = (-2, 4)$, $C = (12, 30)$ og $D = (x, 24)$.

a) Reiknaðu x ef gefið er að $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$. (Hafðu tvo aukastafi í svarinu.)

b) Reiknaðu x ef gefið er að $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

9. Gefnir eru punktarnir $A = (4, 10)$ og $B = (-2, 6)$. C er punktur á y-ási. Punktarnir A, B og C mynda rétthyrndan þríhyrning með $\angle C = 90^\circ$. Reiknaðu hnitin á C.

Yfirlit úr kafla 2

Í rétthyrndum þríhyrningi ABC þar sem $\angle C = 90^\circ$ gildir:

$$\sin(A) = \frac{a}{c} \quad \cos(A) = \frac{b}{c} \quad \tan(A) = \frac{a}{b}$$

Nákvæm gildi fyrir cosínus, sínus og tangens af 30° , 45° og 60°

$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}, \quad \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(= \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(= \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(= \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \tan(45^\circ) = 1$$

$$\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}, \quad \tan(60^\circ) = \sqrt{3}$$

Stefnuhorn vigurs er hornið sem vigurinn myndar við x – ás. Rangshælis snúningur gefur jákvætt horn, réttsælis snúningur gefur neikvætt horn.

Skilgreining á cosínus, sínus og tangens:

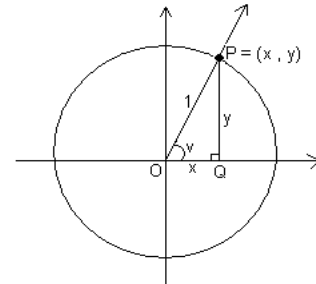
Ef v er horn í grunnstöðu og P er skurðpunktur seinni arms v og einingarringsins þá er

$\cos(v) = x$ – hnit punktsins P

og $\sin(v) = y$ – hnit punktsins P, þ.e.

$P = (x, y) = (\cos(v), \sin(v))$.

$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}, \quad \cos(v) \neq 0$$



R1: $\cos(v) = \cos(v + h \cdot 360^\circ)$ og $\sin(v) = \sin(v + h \cdot 360^\circ)$, $h \in \mathbb{Z}$

R2: $\sin(180^\circ - v) = \sin(v)$

$\cos(180^\circ - v) = -\cos(v)$

R3: $\sin(360^\circ - v) = -\sin(v)$

$\cos(360^\circ - v) = \cos(v)$

R4: $\sin(v + 180^\circ) = -\sin(v)$

$\cos(v + 180^\circ) = -\cos(v)$

R5: $\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$

R6: Ef vigurinn \vec{b} hefur stefnuhorn v þá er $\vec{b} = |\vec{b}| \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$.

R7: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(v)$ þar sem v er hornið á milli vigranna \vec{a} og \vec{b}

Ef hornið á milli vigranna \vec{a} og \vec{b} er hvasst þá er $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$

Ef hornið á milli vigranna \vec{a} og \vec{b} er gleitt þá er $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

Æfing 2.1

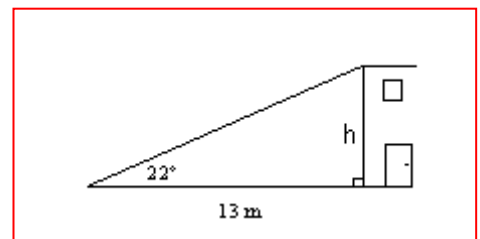
1. Í þríhyrningnum $\triangle ABC$ er $\angle C = 90^\circ$. Reiknaðu hin hornin ef

- a) $b = 4$ og $a = 5$
- b) $b = 13$ og $a = 4$
- c) $b = 8$ og $a = 8$
- d) $b = \sqrt{3}$ og $a = 1$

2. Í þríhyrningnum $\triangle KLM$ er $\angle K = 90^\circ$. Reiknaðu

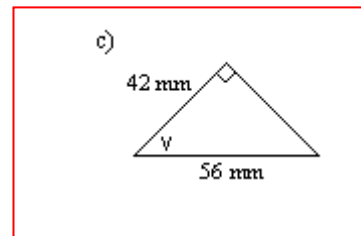
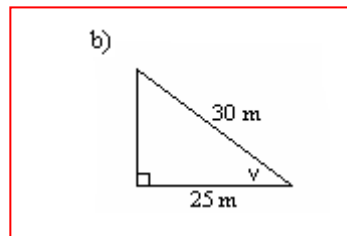
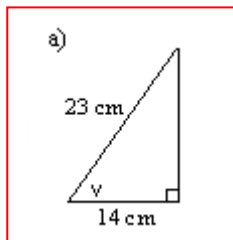
- a) KL ef $\angle M = 24^\circ$ og $KM = 10$
- b) KL ef $\angle L = 39^\circ$ og $KM = 7$
- c) KM ef $\angle L = 14,2^\circ$ og $KL = 5$
- d) KM ef $\angle M = 73^\circ$ og $KL = 22$

3. a) Við getum mælt hæð húss h með sjónarhornsmælingu. Ef við stöndum í 13 m fjarlægð frá húsinu myndar sjónlína til þaks hússins 22° horn við jörðina. Reiknaðu hæðina h .



b) Stigi stendur á láréttu undirlagi og hallast upp að vegg. Stiginn nær 8 m upp á vegginn og myndar 55° horn við undirlagið. Hve langur er stiginn?

4. Reiknaðu hornið v á þessum myndum.



5. a) Teiknaðu upp eftirtalda vigra (sem staðarvigra) og tilgreindu í hvaða fjórðungi hver vigur liggur

i) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Teiknaðu og reiknaðu stefnuhorn vigranna í a)-lið.

6. a) Teiknaðu 180° horn í grunnstöðu og notaðu myndina til að finna $\cos(180^\circ)$ og $\sin(180^\circ)$.

b) Teiknaðu 270° horn í grunnstöðu og notaðu myndina til að finna $\cos(270^\circ)$ og $\sin(270^\circ)$.

7. Finndu gleitt horn sem hefur sama sínus og 51° horn.

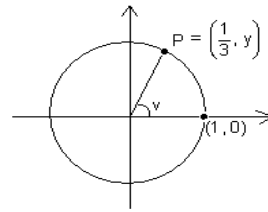
8. Finndu hvasst horn sem hefur sama sínus og 153° horn.

9. Finndu horn í fyrstu umferð sem hefur sama cosínus og hornið 73° .

10. Finndu horn í fyrstu umferð sem hefur sama tangens og hornið 132° .

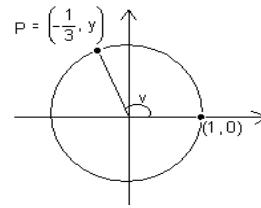
11. Punkturinn P hefur hnitin $P = \left(\frac{1}{3}, y\right)$.

Finndu hornið v og y .



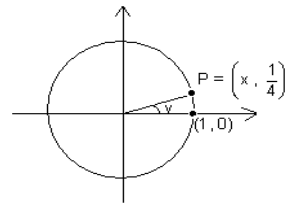
12. Punkturinn P hefur hnitin $P = \left(-\frac{1}{3}, y\right)$.

Finndu hornið v og y



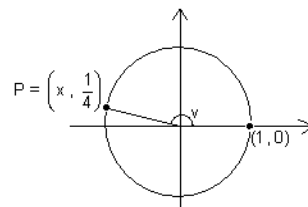
13. Punkturinn P á myndinni hefur hnitin

$P = \left(x, \frac{1}{4}\right)$. Finndu hornið v og x .



14. Punkturinn P hefur hnitin $P = \left(x, \frac{1}{4}\right)$.

Finndu hornið v og x .



15. Leystu jöfnurnar:

a) $\sin(x) = 0,4$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$

b) $\sin(x) = -0,25$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$

c) $\sin(x) + 2 = 2,6$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$

d) $3\sin(x) = 0,6$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$

e) $2\sin(x) + 3 = 4$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$

f) $3\sin(x) = 4$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$

g) $\sin(x) = 0,1$, $x \in [360^\circ, 720^\circ[$

16. Leystu jöfnurnar:

a) $\cos(x) = 0,4$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$

b) $\cos(x) = -0,25$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$

c) $\cos(x) + 2 = 2,6$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$

d) $3\cos(x) = 0,6$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$

- e) $2\cos(x) = 2$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$
 f) $5\cos(x) = 10$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$
 g) $\cos(x) = 0,1$, $x \in [720^\circ, 1080^\circ[$

17. Leystu jöfnurnar:

- a) $\tan(x) = 0,4$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$
 b) $\tan(x) = -0,25$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$
 c) $\tan(x) + 2 = 2,6$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$
 d) $3\tan(x) = 0,6$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$
 e) $2\tan(x) + 3 = 4$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$
 f) $3\tan(x) = 4$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$
 g) $\tan(x) = 0,1$, $x \in [-180^\circ, 180^\circ[$

18. Leystu jöfnurnar

- a) $\sin(x) = 0,7$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$
 b) $2\cos(x) = 0,9$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$
 c) $3\tan(x) = 21$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$
 d) $4\sin(x) = -3$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$
 e) $\cos(x) = 0,6$, $x \in [360^\circ, 720^\circ[$
 f) Finndu x ef $\sin(x) = 0,6$, $x \in [90^\circ, 180^\circ[$
 g) Finndu x ef $\cos(x) = 0,73$, $x \in [270^\circ, 360^\circ[$

19. Kílógramlóð er ekki jafnpungt alls staðar á jörðunni m.a. vegna fráviks jarðar frá kúlulögun. Ef x er breiddargráðan er þyngd lóðsins (mælt í newton) gefin með formúlunni.

$$y = 9,806 - 0,026\cos(2x) , x \in [0^\circ, 90^\circ[.$$

- a) Reiknaðu þyngd kílógramlóðs á breiddargráðunni 66° .
 b) Hver er breiddargráðan ef þyngd kílógramlóðs er 9,792 ?

20. Leystu jöfnurnar:

- a) $6\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$
 b) $5\sin^2(x) - 2\sin(x) = 0$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$
 c) $2\sin^2(x) + 5\sin(x) + 2 = 0$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$
 d) $\tan^2(x) - 6\tan(x) = 7$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$
 e) $\sin^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) - 2\cos^2(x) = 0$, $x \in [0^\circ, 360^\circ[$

Ábending við e)-lið: Deildu með $\cos^2(x)$ í alla liði og fáðu fram 2. stigs tangensjöfnu.

Leystu næstu dæmi án þessa að nota vasareikni og notaðu nákvæm gildi.

21. Finndu nákvæmt gildi fyrir

- a) $\cos(750^\circ)$ b) $\sin(315^\circ)$ c) $\tan(-480^\circ)$ d) $\sin(3900^\circ)$
 e) $\cos(135^\circ)$ f) $\sin(585^\circ)$

22. Finndu nákvæmt gildi á $\cos(x)$ ef $\sin(x) = \frac{5}{13}$.

23. Finndu nákvæmt gildi á $\sin(x)$ ef $\cos(x) = -\frac{7}{25}$ og x er í öðrum fjórðungi.

24. Finndu nákvæmt gildi á $\cos(x)$ ef $\sin(x) = -\frac{1}{4}$ og x er í fjórða fjórðungi.

25. Finndu hnit vigurs \bar{a} sem hefur stefnuhorn 55° ef $|\bar{a}| = 6$.

26. Finndu hnit vigurs \bar{a} sem hefur stefnuhorn 90° ef $|\bar{a}| = 10$.

27. Finndu hnit einingarvigurs sem hefur stefnuhorn 220° .

28. Reiknaðu hornið á milli vigranna $\bar{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

29. Reiknaðu hornið á milli vigranna $\bar{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

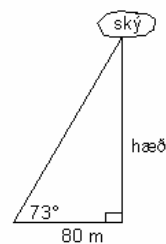
30. Reiknaðu hornið á milli vigranna $\bar{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

31. Finndu gildið á s ef hornið á milli vigranna $\bar{a} = \begin{pmatrix} s+1 \\ s-3 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} s-6 \\ 2s-7 \end{pmatrix}$ er hvasst.

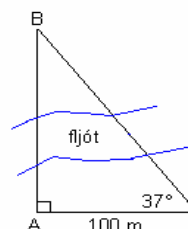
32. Finndu gildið á s ef hornið á milli vigranna $\bar{a} = \begin{pmatrix} s \\ s-6 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} s-6 \\ 1 \end{pmatrix}$ er a) 90° b) gleitt c) er 0°

Ýmis dæmi 2

1. Notaðu upplýsingarnar á myndinni til að reikna hve hátt skýið er yfir jörðu.



2. Notaðu upplýsingarnar á myndinni til að reikna fjarlægðina á milli A og B.



3. Einfaldaðu stærðirnar

a) $\frac{\sin^2(x) \cdot \cos(x)}{\cos^2(x) \cdot \sin(x)}$

b) $\frac{\sin^2(x) - 36}{\sin(x) - 6}$

c) $\frac{1}{\cos^2(x)} - \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2$

d) $\frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin^2(x) + \cos^2(x)}$

4. Leystu jöfnurnar

a) $\frac{1}{\cos(x)} = 8, x \in [0^\circ, 360^\circ[$

b) $\frac{1}{\tan(x)} = 2, x \in [0^\circ, 360^\circ[$

5. Hiti sjúklings á 12 daga tímabili er gefinn með formúlunni

$$T(t) = 38,7 + \frac{8}{5} \sin(22,5^\circ t)$$

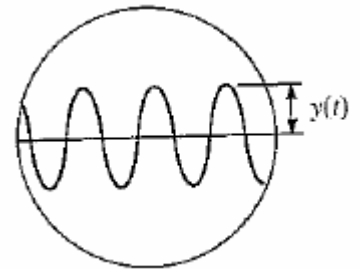
þar sem T er hitinn í $^\circ\text{C}$ og t er tíminn í dögum.

- Reiknaðu hitann þegar $t = 0, 2, 4, 6, 10$ og 12 . Notaðu Table í vasareikninum.
- Hver er hæsti hiti sjúklingsins á þessu 12 daga tímabili og hvaða dag er það?
- Hver er lægsti hiti sjúklingsins þessa 12 daga og hvað dag er það?

6. Gervitungl er á braut umhverfis jörðu þannig að fjarlægð þess frá miðbaugi (í norður eða suður) er gefin með formúlunni

$$y(t) = 8000 \cos(4t - 40^\circ)$$

þar sem y er fjarlægðin frá miðbaugi í kílómetrum og t er tíminn í mínútum eftir að gervitunglinu var skotið á loft (sjá mynd).



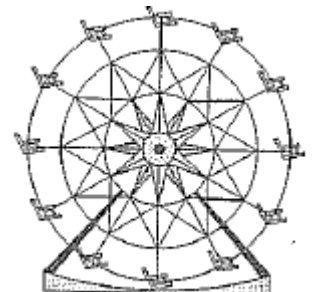
- Hver er mesta fjarlægð frá miðbaug?
- Hvað tekur það margar mínútur að ná mestu fjarlægð frá miðbaug?

7. Þú ert í Parísarhjóli. Hæð þín yfir jörðu er gefin með formúlunni

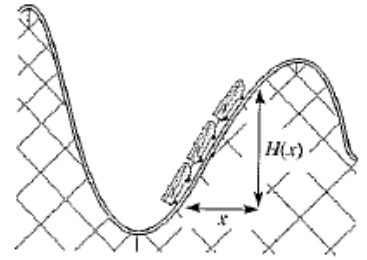
$$y(t) = 18 - 16 \sin(12t + 90^\circ)$$

þar sem y er hæðin í metrum og t er tíminn í sekúndum sem liðinn er frá því að hjólið fór að snúast.

- Reiknaðu hæðina eftir $t = 0, 6, 9, 18, 24, 27, 30$ sekúndur. Notaðu Table í vasareikninum.
- Hver lægsta hæð þín yfir jörðu?
- Hver er mesta hæð þín yfir jörðu og eftir hve margar sekúndur nærðu henni? Finndu svarið með reikningi.
- Hvað er hjólið lengi að snúast einn hring?



8. Rússíbaní er hannaður þannig að hæð hans er gefin með formúlunni $H(x) = 20\sin(3x - 360)^\circ$ þar sem H er hæðin í metrum miðað við upphafsstað og $x \in [0, 240]$ er fjarlægðin í metrum frá upphafsstað.



- Reiknaðu hæðina fyrir $x = 0, 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210$ og 240 notaðu niðurstöðurnar til að gera graf (notaðu Table í vasareikninum).
- Hver er minnsta og mesta hæð rússíbanans miðað við upphafsstað?
- Hversu langt er rússíbaninn frá upphafsstað þegar hæðin er mest?

9. Fjöldi birtustunda í borgum fer eftir breiddargráðu og dagsetningu. Formúlan

$$H(d) = 12 + A \sin\left(\frac{360}{365}(d - 80)^\circ\right)$$

reiknar fjölda birtustunda þar sem d er númer dags og stuðullinn A ákvarðast af breiddargráðunni. Í borgum sem eru á 30° breiddargráðu er $A = 2,3$.

- Reiknaðu fjölda birtustunda í borg á 30° breiddargráðu 1. janúar, 1. febrúar, 1. júlí og 1. október. (Reiknum ekki með hlaupári).
- Hvaða dag ársins er mest dagsbirta?
- Hvaða dag ársins er minnst dagsbirta?

Yfirlit úr kafla 3

Regla um flatarmál þríhyrnings: $F = \frac{1}{2}bc \sin(A)$

Sínusreglan: $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$ eða $\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$

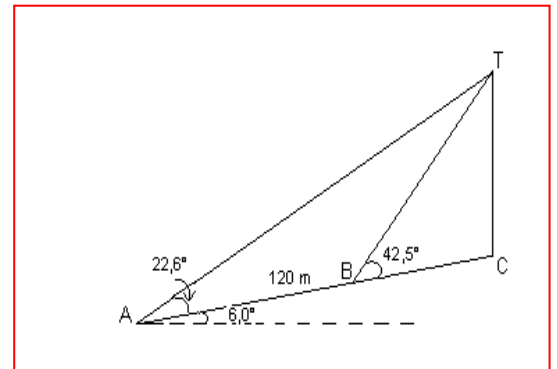
Kósínusreglan: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$ eða $\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$

Æfing 3.1

1. Reiknaðu flatarmál þríhyrnings ef
 - a) $b = 8 \text{ cm}$, $c = 10 \text{ cm}$ og $\angle A = 40^\circ$
 - b) $a = 3 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$ og $\angle C = 133^\circ$
2. Reiknaðu $\angle A$ í þríhyrningum ABC ef $b = 12 \text{ cm}$, $c = 9 \text{ cm}$ og flatarmálið $F = 50 \text{ cm}^2$.
3. Reiknaðu hliðina AB í þríhyrningum ABC ef
 - a) $a = 7,2$, $\angle A = 42^\circ$ og $\angle C = 51^\circ$.
 - b) $b = 14$, $\angle B = 77,2^\circ$ og $\angle C = 32,4^\circ$
 - c) $AC = 4$, $\angle B = 60^\circ$ og $\angle C = 45^\circ$.
4. Reiknaðu $\angle L$ í þríhyrningnum LMN ef $MN = 8$, $LM = 10$ og $\angle N = 45^\circ$.
5. Í þríhyrningnum ABC er $b = 10$ og $\angle A = 55^\circ$. Finndu $\angle B$ ef hliðin a er
 - a) 20
 - b) 12
 - c) 10
 - d) 8,2
 - e) 7
6. Í þríhyrningnum ABC er $b = 12 \text{ cm}$, $c = 10 \text{ cm}$ og $\angle A = 47^\circ$, Reiknaðu hliðina a.
7. Í þríhyrningum ABC er $a = 6 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$ og $\angle C = 123^\circ$. Reiknaðu hliðina c.
8. Í þríhyrningum ABC er $a = 5 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$ og $c = 6 \text{ cm}$. Reiknaðu hornin.
9. Í þríhyrningum ABC er $a = 7 \text{ cm}$, $b = 11 \text{ cm}$ og $c = 9 \text{ cm}$. Reiknaðu flatarmálið.
10. Í þríhyrningum PQR er $PR = 25$, $QR = 39$ og $\angle R = 22,6^\circ$. Reiknaðu hin hornin og hliðina PQ.
11. Gefnir eru punktarnir $A = (3,6)$, $B = (-2,5)$ og $C = (5,1)$. Reiknaðu
 - a) hnit vigranna \overline{AB} , \overline{AC} og \overline{BC}
 - b) hliðar þríhyrningsins ABC
 - c) hornin í þríhyrningum ABC
 - d) flatarmál þríhyrningsins ABC
12. Jarðskiki er í laginu eins og þríhyrningur ABC. Hliðin $AB = 44,3 \text{ m}$, $\angle A = 52,5^\circ$ og $\angle B = 62,3^\circ$.
 - a) Reiknaðu hliðina AC ásamt flatarmáli skikans.
 - b) Girðing liggur frá B til miðpunkts AC. Reiknaðu lengd hennar.
13. Hraðbátur á legupláss við F. Hólmi H er $3,8 \text{ km}$ beint suður af F og bryggja B er beint norðaustur frá F (þ.e. $\angle HFB = 135^\circ$). Fjarlægðin milli H og B er $6,5 \text{ km}$.
 - a) Teiknaðu mynd af þríhyrningnum HFB og merktu inn gefnar upplýsingar.
 - b) Reiknaðu óþekkt horn í þríhyrningnum HFB og fjarlægðina FB.
 - c) Dag nokkurn siglir bátur frá H til F. Nákvæmlega miðja vegu milli H og F dregur vélin á sér. Engar árar eru um borð en hinsvegar er lítið senditæki um borð sem dregur 5 km . Mun heyrast í senditækinu frá bryggjunni B ?

14. Finna á hæð útvarpsmasturs TC með því að mæla hornin sem sjónlína til mastursins myndar frá tveimur punktum A og B sem eru í brekku. Milli A og B eru 120 m. Sjónarhornin eru $22,6^\circ$ í A og $42,5^\circ$ í B (sjá mynd). ABC er brekka sem myndar 6° horn við láréttan flöt.

- Reiknaðu $\angle ATB$ og fjarlægðina BT.
- Reiknaðu hæð mastursins TC.

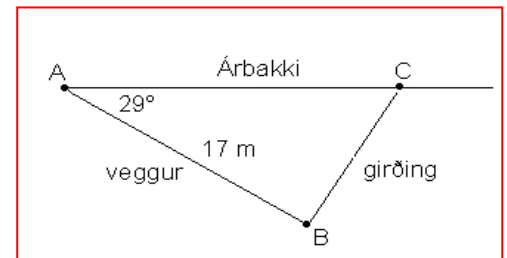


15. Á teikningunni sést þríhyrnt svæði sem afmarkast af hlið AB sem er lágur veggur, hlið AC sem er árbakki og hlið BC sem er girðing. C er hornstaur sem er einhvers staðar á árbakkanum hægra megin við A. Hornið A er 29° og hliðin AB = 17 m.

- Reiknaðu lengd girðingarinnar BC ef C er 15 m frá A.

b) Reiknaðu AC og lengd girðingarinnar BC ef hornið B er 84° . Reiknaðu einnig flatarmál svæðisins.

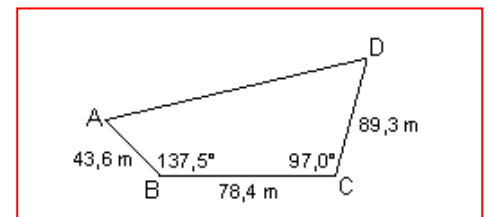
c) Bóndinn hefur til umræða það girðingarefni sem fékkst í b)-lið. Hann ákveður að færa girðingarstaurinn C nær A en nota samt allt girðingarefnið. Reiknaðu AC.



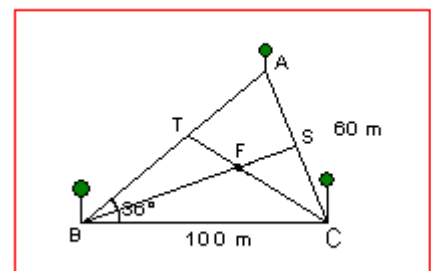
- Hver er minnsta mögulega lengd girðingarinnar BC og hversu langt frá A er hornstaurinn C þá ?

16. Sprengja á göng frá A til D. (Sjá mynd.) Verkfræðingar hafa merkt inn punktana B og C og mælt horn og fjarlægðir sem tilgreindar eru á myndinni sem er teikning af vinnusvæðinu séð að ofan.

- Reiknaðu fjarlægðina AC
- Reiknaðu $\angle BCA$.
- Hve löng verða göngin ?



17. Á fjársjóðskorti eru eftirfarandi upplýsingar: Fjársjóðurinn er falinn innan hvasshyrnds þríhyrnings sem ákvarðast af þremur trjám A, B og C. Fjarlægðin AC = 60 m, BC = 100 m og $\angle B = 36^\circ$. BS og CT eru helmingalínur hornanna B og C og er fjársjóðurinn F falinn þar sem þær skerast. Reiknaðu vegalengdina BF.



Yfirlit úr kafla 4

Almenn jafna hrings : $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, r er radíus hringsins, miðja er í (h,k) .

Jafnan $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ er líka jafna hrings (ef $b^2 + c^2 > 4ad$).

Skurðpunktar hrings við x-ás finnast með því að setja $y = 0$ í jöfnu hringsins og reikna x

Skurðpunktar hrings við y-ás finnast með því að setja $x = 0$ í jöfnu hringsins og reikna y .

Skurðpunktar hrings og línu finnast með því að einangra y -ið (eða x -ið) í jöfnu línunnar og setja inn í jöfnu hringsins og leysa.

Skurðpunktar tveggja hringja finnast með því að draga jöfnu annars hringsins frá hinum þannig að fáist jafna línu og framhaldið er síðan eins og þegar fundnir eru skurðpunktar hrings og línu.

Almenn jafna sporbaugs með láréttan eða lóðréttan stórás:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$2a$ og $2b$ eru lengdir stórás og skammás (ef $a > b$ annars öfugt). Miðjan er í (h, k) .

Hringvik er $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{c}{a}$ (ef $a > b$ annars öfugt).

Almenn jafna breiðboga með láréttan eða lóðréttan tengiás:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Miðjan er í (h, k) . Tengiásinn er láréttur ef mínusinn er á y -sviganum (fyrri jafnan) en lóðréttur ef mínusinn er á x -sviganum (seinni jafnan). Lengd tengiás er $2a$.

Æfing 4.1

1. Ritaðu jöfnu hrings með miðju M og radíus r ef

a) $M = (2, 7)$ og $r = 3$ b) $M = (0, 4)$ og $r = 7$ c) $M = (-3, 2)$ og $r = 6$

d) $M = (-1, -5)$ og $r = 2,5$ e) $M = (0, 0)$ og $r = 1$

2. Tilgreindu miðju og radíus hringanna sem gefnir eru með jöfnunum

a) $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 4^2$ b) $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 25$

c) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 10$ d) $x^2 + y^2 = 4$

3. Gefinn er hringurinn $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$. Finndu með reikningi hvort eftirfarandi punktar eru fyrir utan eða innan hringinn eða á hringnum.

- a) $A = (1, 0)$ b) $A = (6, 5)$ c) $A = (-4, 5)$ d) $A = (1, 5)$

4. Finndu jöfnu hrings með miðstreng AB ef $A = (2, 9)$ og $B = (7, -3)$.

5. Finndu radíus hrings með miðju $M = (7, 5)$ sem liggur í gegnum punktinn $A = (10, 9)$ og ritaðu jöfnu hans.

6. Hvaða þriðja lið þarf að bæta við eftirfarandi stærðir til að þær verði ferningsstærðir?

- a) $x^2 + 8x$ b) $x^2 - 12x$ c) $x^2 + 5x$ d) $y^2 - 2y$

7. Umritaðu jöfnur eftirfarandi hringa yfir á formið $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ og tilgreindu miðjur þeirra og radíus.

a) $x^2 + 4x + y^2 - 10y = -4$ b) $x^2 - 12x + y^2 - 13 = 0$

c) $2x^2 + 4x + 2y^2 - 12y = 0$ d) $x^2 + 5x + y^2 - 3y = 1$

8. Reiknaðu skurðpunkta hringanna við x-ás og y-ás ef til eru.

a) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$ b) $x^2 + (y + 2)^2 = 3$ c) $x^2 + 6x + y^2 - 3y = 4$

9. Reiknaðu skurðpunkta hringsins H og línunnar l ef jöfnur þeirra eru

a) H: $x^2 + y^2 = 16$ og l: $y = x + 4$ b) H: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ og l: $y = x + 2$

10. Reiknaðu skurðpunkta hringanna H og K ef jöfnur þeirra eru

a) H: $x^2 + y^2 = 4$ K: $x^2 - 2x + y^2 = 2^2$

b) H: $x^2 + (y - 2)^2 = 16$ K: $x^2 + y^2 = 8$

11. Finndu möguleg gildi á stærðinni k ef jafnan $x^2 + 4x + y^2 + 6y = k$ er jafna hrings með radíus $r > 2$.

12. Hringur með miðju $(t, t + 2)$ hefur radíus $r = 1$. Punkturinn $A = (2, 3)$ liggur á hringnum. Finndu möguleg gildi á t.

Æfing 4.2

1. Finndu miðju, lengd stórás og skammás, brennipunkta og hringvik sporbauganna ef jöfnur þeirra eru:

$$a) \frac{(x-2)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1$$

$$b) \frac{(x+12)^2}{5^2} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$$

$$c) \frac{x^2}{1} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

$$d) \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

2. a) Ritaðu jöfnu sporbaugs með láréttan stórás ef miðja hans er $M = (4, 1)$, $a = 10$ og $b = 8$.

b) Ritaðu jöfnu sporbaugs með lóðréttan stórás ef miðja hans er $M = (4, 1)$, lengd stórás er 10 og lengd skammás er 8.

Ýmis dæmi 4

1. Finndu með reikningi miðju og radíus hringsins sem gefinn er með jöfnunni $x^2 - 6x + y^2 + 10y = 15$

2. a) Finndu skurðpunkt hringsins H og línunnar l sem gefin eru með jöfnunum H: $(x+6)^2 + (y-3)^2 = 26$ og l: $y = x + 3$

b) Liggur punkturinn $Q = (-2, 5)$ innan eða utan hringsins? (Rökstyddu svarið með útreikningi)

3. Sporbaugur hefur miðju $(3, -2)$. Stórásinn er láréttur og er 10 að lengd en skammásinn er 6 að lengd. Ritaðu jöfnu sporbaugsins.

4. Finndu hringvik sporbaugsins sem gefinn er með jöfnunni $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$

5. Reiknaðu skurðpunkta hringsins $x^2 - 8x + y^2 + 12y = 12$ við x-ás.

6. Finndu miðju og radíus hrings með miðstreng AB ef $A = (2, 8)$ og $B = (-4, 20)$.

7. Sporbaugur hefur stórás sem er 8 að lengd og hringvik sem er 0,6. Reiknaðu lengd skammásins.

8. Finndu lengd stórás, skammás og hringvik sporbaugsins sem gefinn er með jöfnunni $4x^2 + 9y^2 = 144$.

9. Tilgreindu miðju, hvaða tölur a og b eru og reiknaðu topppunkta breiðbogans

$$\frac{(x+3)^2}{5^2} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$

10. Finndu jöfnu breiðboga ef hnit topppunktanna eru $(4, 2)$ og $(10, 2)$ og punkturinn $(12, 4)$ er á breiðboganum.

Yfirlit úr kafla 5

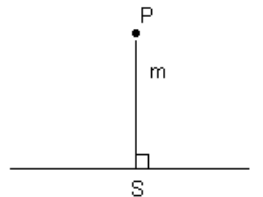
Almenn jafna línu: $ax + by + c = 0$. Vigurinn $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er þvervigur línunnar.

Skurðpunktur tveggja lína finnst með því að leysa saman jöfnur línanna.

Samsíða línur hafa sömu þvervigra.

Hornréttar línur hafa hornréttu þvervigra.

Ofanvarp punkts á línu: Punkturinn S kallast ofanvarp punktsins P á línuna l ef punkturinn S er á línunni l og \overline{PS} er hornréttur á línuna l. S er skurðpunktur línunnar l og línunnar m sem



liggur í gegnum P og S.

Fjarlægðarformúlan: Fjarlægð punktsins $P = (x_1, y_1)$ frá línunni l sem gefin er með jöfnunni

$ax + by + c = 0$ er $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Æfing 5.1

1. Finndu almenna jöfnu línu sem liggur í gegnum P_0 og hefur þvervigur \bar{n} ef:

a) $P_0 = (1, 4)$ og $\bar{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $P_0 = (-2, 6)$ og $\bar{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $P_0 = (0, 5)$ og $\bar{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ d) $P_0 = (4, 7)$ og $\bar{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. Finndu almenna jöfnu línunnar gegnum punktana A og B ef

a) $A = (4, -7)$ og $B = (-3, 8)$ b) $A = (2, 6)$ og $B = (-4, 0)$
 c) $A = (0, 3)$ og $B = (5, 0)$ d) $A = (10, 6)$ og $B = (18, 12)$

3a) Finndu almenna jöfnu línu sem liggur í gegnum $P_0 = (2, 5)$ og er hornrétt á línuna $2x - 4y + 5 = 0$. (Ábending: hornréttar línur hafa hornréttu þvervigra.)

b) Finndu almenna jöfnu línu sem liggur í gegnum $P_0 = (2, 5)$ og er samsíða línunni $2x - 4y + 5 = 0$. (Ábending: samsíða línur hafa sömu þvervigra.)

c) Finndu almenna jöfnu línu sem liggur í gegnum $P_0 = (1, 8)$ og er samsíða línunni $y = 4x + 6$.

d) Finndu almenna jöfnu línu sem liggur í gegnum $P_0 = (3, -2)$ og er hornrétt á línuna $y = 3x - 4$.

4. Finndu skurðpunkt línanna

a) $2x + 5y - 8 = 0$ og $-3x + 7y + 11 = 0$ b) $5x - 4y + 6 = 0$ og $y = 2x + 8$

c) $8x - 2y + 5 = 0$ og $x + 2y - 8 = 0$ d) $x = 4$ og $3x - 4y + 10 = 0$

5a) Reiknaðu ofanvarp punktsins $A = (-5, 8)$ á línuna $4x - 3y - 6 = 0$.

b) Reiknaðu ofanvarp punktsins $A = (-5, 8)$ á línuna $y = 2x + 4$.

6. Reiknaðu ofanvarp punktsins $A = (6, -4)$ á línuna

a) $y = 5$ b) $x = 4$ c) $y = -2x + 10$ d) $x + y + 2 = 0$

7. Reiknaðu fjarlægð punktsins A frá línunni l: $5x + 12y - 60 = 0$ ef

a) $A = (0, 0)$ b) $A = (-1, 0)$ c) $A = (12, 13)$

d) $A = (13, 5)$ e) $A = (23, -10)$ f) $A = (-7, -2)$

8. Reiknaðu fjarlægð miðju hringsins sem gefinn er með jöfnunni $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 12$ frá línunni $4x - 3y + 8 = 0$.

9. Gefnir eru þrír hornpunktir þríhyrnings: $A = (1, 6)$, $B = (8, -5)$ og $C = (4, 12)$.

a) Finndu almenna jöfnu línunnar gegnum A og B.

b) Reiknaðu h_c , þ.e. hæðina frá C á hliðina AB í þríhyrningum ABC.

c) Reiknaðu flatarmál þríhyrningsins ABC.

10. Finndu gildið á x ef gefið er að fjarlægð punktsins $P = (x, 5)$ frá línunni $3x + 4y - 4 = 0$ er 2.

11. Finndu hnit punkts á y - ási ef gefið er að fjarlægð hans frá línunni $2x + 5y + 1 = 0$ er $\sqrt{5}$.

Yfirlit úr kafla 6**Summuformúlur**

1. $\cos(u - v) = \cos(u) \cdot \cos(v) + \sin(u) \cdot \sin(v)$

2. $\cos(u + v) = \cos(u) \cdot \cos(v) - \sin(u) \cdot \sin(v)$

3. $\sin(u - v) = \sin(u) \cdot \cos(v) - \cos(u) \cdot \sin(v)$

4. $\sin(u + v) = \sin(u) \cdot \cos(v) + \cos(u) \cdot \sin(v)$

5. $\tan(u - v) = \frac{\tan(u) - \tan(v)}{1 + \tan(u) \cdot \tan(v)}$

6. $\tan(u + v) = \frac{\tan(u) + \tan(v)}{1 - \tan(u) \cdot \tan(v)}$

Tvöföldunarformúlur fyrir hornaföll

I $\cos(2v) = \cos^2(v) - \sin^2(v)$

II $\sin(2v) = 2\sin(v)\cos(v)$

III $\tan(2v) = \frac{2\tan(v)}{1 - \tan^2(v)}$

IV $\cos(2v) = 2\cos^2(v) - 1$

V $\cos(2v) = 1 - 2\sin^2(v)$

Þreföldunarformúlur fyrir hornaföll

I $\cos(3v) = 4\cos^3(v) - 3\cos(v)$

II $\sin(3v) = 3\sin(v) - 4\sin^3(v)$

Helmingunarformúlur fyrir hornaföll

I $\cos\left(\frac{1}{2}v\right) = \pm\sqrt{\frac{\cos(v) + 1}{2}}$

II $\sin\left(\frac{v}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(v)}{2}}$

III $\tan\left(\frac{v}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(v)}{1 + \cos(v)}}$

Radíanar

Gráðum breytt í radíana: $x^\circ = \frac{x \cdot \pi}{180}$ rad

Radíönum breytt í gráður: $\frac{x \cdot 180^\circ}{\pi} = x$ rad

Gröf hornafalla: Föllin $f(x) = A \cos(bx + c)$ og $g(x) = A \sin(bx + c)$ hafa bylgjuhæð (sveifluvídd) A og bylgjulengd (lotu) $\frac{2\pi}{b}$.

Æfing 6.1

1. Notaðu summuformúlurnar til að reikna nákvæmt gildi á

- a) $\sin(75^\circ)$ b) $\cos(105^\circ)$ c) $\tan(75^\circ)$ d) $\tan(15^\circ)$

2. Notaðu summuformúlu til að sanna regluna

- a) $\sin(180^\circ - x) = \sin(x)$ b) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ c) $\tan(180^\circ + x) = \tan(x)$
d) $\cos(360^\circ - x) = \cos(x)$

3. Gefið er að $\tan(u) = 2$ og $\tan(v) = 5$. Notaðu summuformúlu til að reikna nákvæmt gildi á $\tan(u + v)$

4. Gefið að $\cos(u) = \frac{3}{5}$ og $\cos(v) = \frac{5}{9}$. Ennfremur er gefið að u er í fyrsta fjórðungi en v er í fjórða fjórðungi. Reiknaðu nákvæm gildi á

- a) $\sin(u)$ b) $\sin(v)$ c) $\cos(u + v)$ d) $\sin(u + v)$ e) $\tan(u + v)$

5. Gefið er að $\sin(v) = \frac{7}{25}$ og v er í öðrum fjórðungi. Reiknaðu nákvæmt gildi á

- a) $\cos(v)$ b) $\sin(2v)$ c) $\cos(2v)$ d) $\tan(2v)$

6. Gefið er að $\cos(v) = \frac{3}{10}$. Finndu nákvæmt gildi á

- a) $\cos(2v)$ b) $\cos(3v)$ c) $\cos\left(\frac{1}{2}v\right)$

7. Í þríhyrningnum ABC er $a = 10$ cm, $c = 7$ cm og $\angle A$ er tvöfalt stærra en $\angle C$. Reiknaðu hornin og hliðina b .

8. Notaðu helmingunarformúlu til að finna nákvæmt gildi á

- a) $\cos(15^\circ)$ b) $\sin(22,5^\circ)$ c) $\tan(15^\circ)$

9. Gefið er að $\cos(v) = \frac{4}{5}$. Reiknaðu nákvæmt gildi á

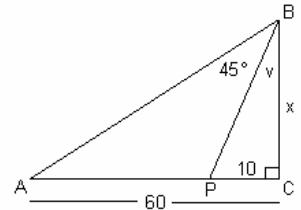
a) $\cos\left(\frac{1}{2}v\right)$ b) $\sin\left(\frac{1}{2}v\right)$ c) $\tan\left(\frac{1}{2}v\right)$

10. Í réttthyrnda þríhyrningnum á myndinni er $BC = x$ og $AC = 60$. P er punktur á hliðinni AC og er $CP = 10$ og $\angle ABP = 45^\circ$. Ennfremur er $\angle PBC = v$.

a) Táknaðu $\tan(v)$ og $\tan(B)$ með x.

b) Notaðu summuformúlu til að finna samband á milli $\tan(v)$, $\tan(B)$ og $\tan(45^\circ)$

c) Notaðu niðurstöðuna til að reikna x.



Æfing 6.2

1. Breyttu í radíana

a) 20° b) 2343° c) 45° d) 900° e) 2°

2. Breyttu í gráður

a) 4 b) 0,2 c) 3π d) $\frac{5\pi}{6}$ e) $-\frac{\pi}{12}$ f) 20,3

3. Leystu þessar hornjöfnur:

a) $\sin(x) = 0,23$, $x \in [0, 2\pi[$ b) $\sin(x) = -0,75$, $x \in [0, 2\pi[$

c) $2\cos(x) + 5 = 6$, $x \in [0, 2\pi[$ d) $3\tan(x) = 8$, $x \in [0, 2\pi[$

e) $10\cos(x) - 5 = 3$, $x \in [2\pi, 4\pi[$

Æfing 6.3

Skoðaðu gröf hornafallanna í dæmunum hér á eftir. Gröfin eru á næstu síðu og svaraðu svo spurningunni í dæminu.

1. Eftirfarandi föll hafa jöfnuna $y = a \sin(x)$ þar sem a er einhver fasti. Hvaða áhrif hefur stuðullinn a á feril fallsins?

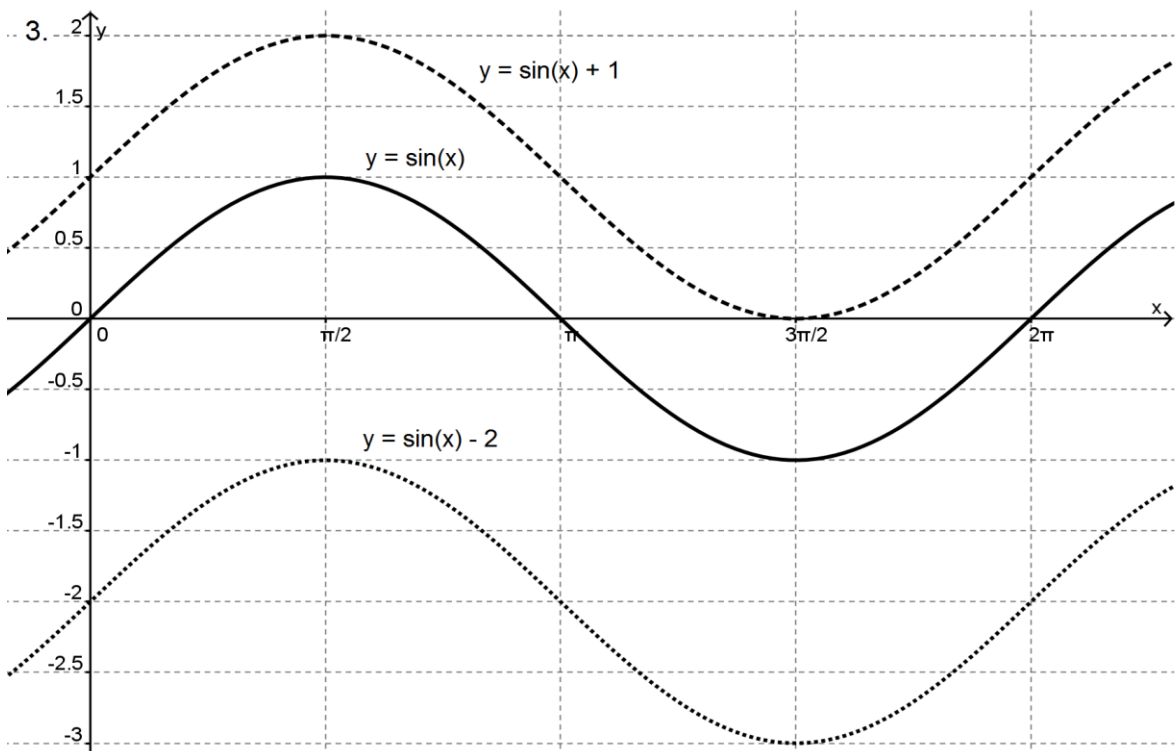
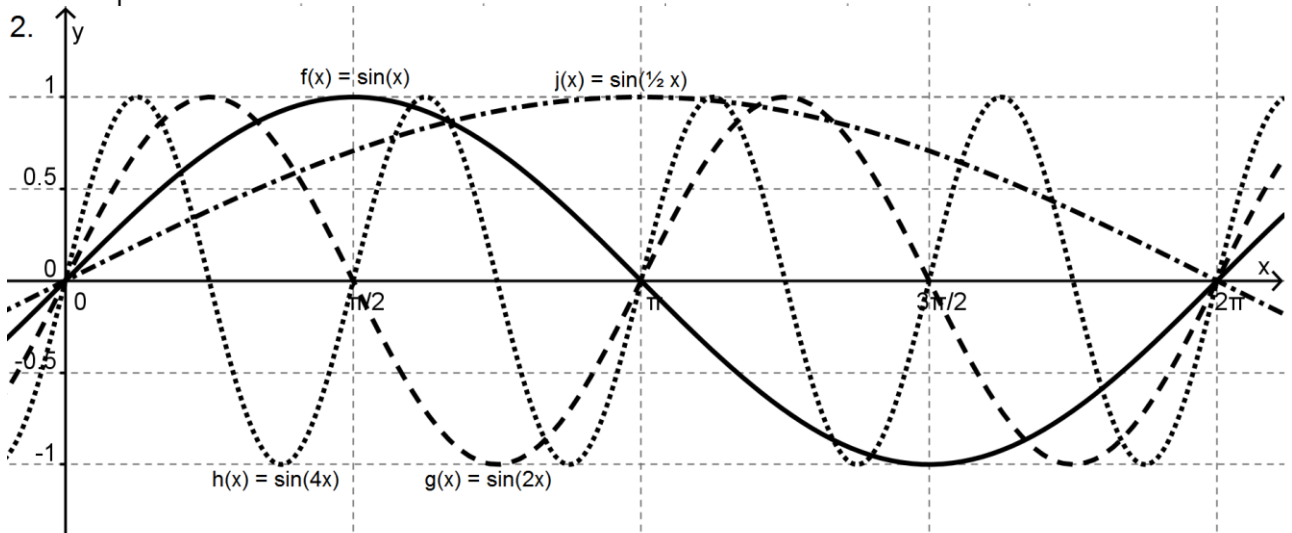
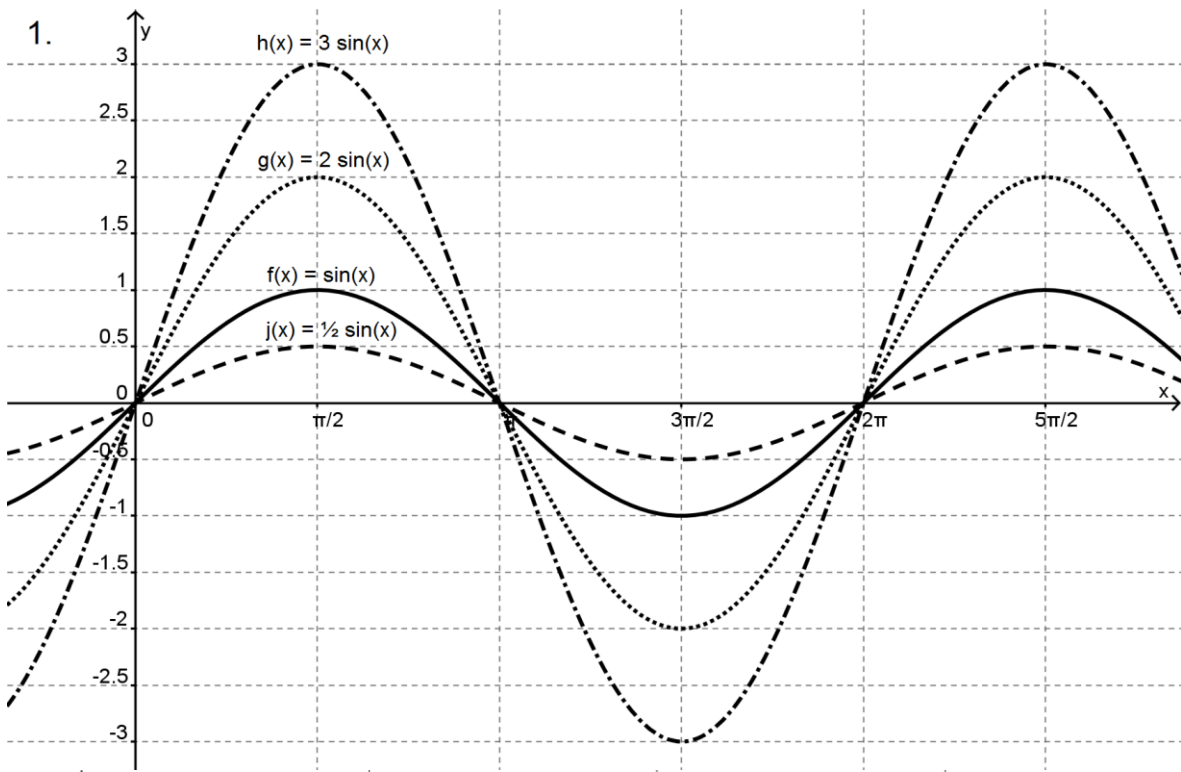
$f(x) = \sin(x)$ $g(x) = 2\sin(x)$ $h(x) = 3\sin(x)$ $j(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$

2. Eftirfarandi föll hafa jöfnuna $y = \sin(bx)$ þar sem b er einhver fasti. Hvaða áhrif hefur stuðullinn b á feril fallsins?

$f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \sin(2x)$ $h(x) = \sin(4x)$ $j(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$

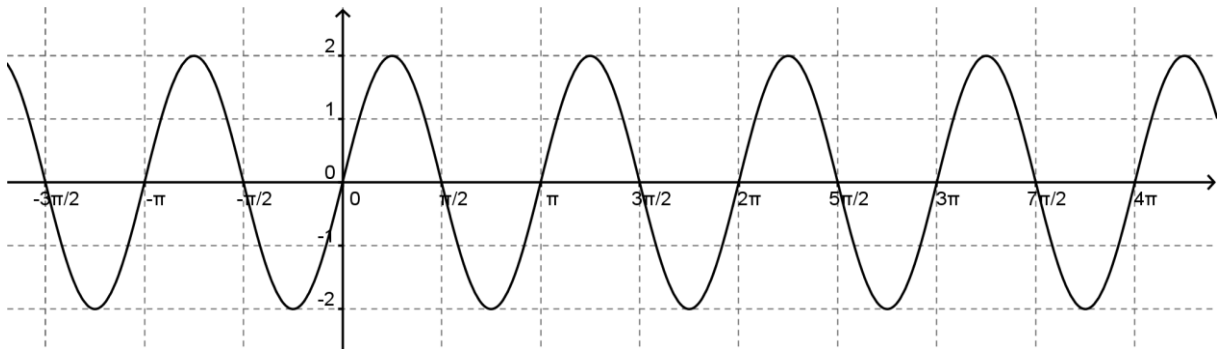
3. Eftirfarandi föll hafa jöfnuna $y = \sin(x) + c$ þar sem c er einhver fasti. Hvaða áhrif hefur fastinn c á feril fallsins?

$f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \sin(x) + 1$ $h(x) = \sin(x) - 2$

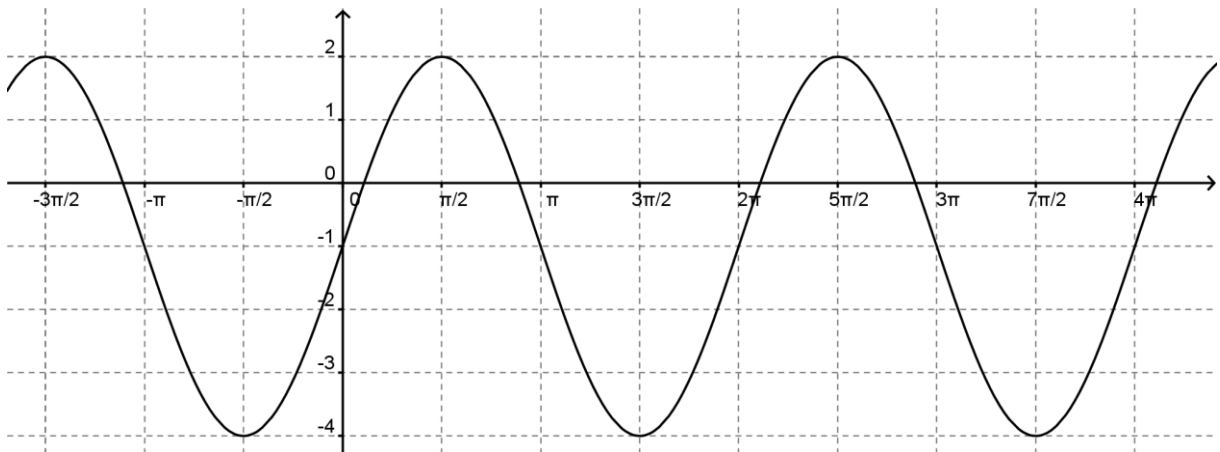


4. Jöfnur ferlanna eru á forminu $y = a \sin(bx) + c$. Lestu gildi a , b og c af gröfunum fjórum sem hér fara á eftir.

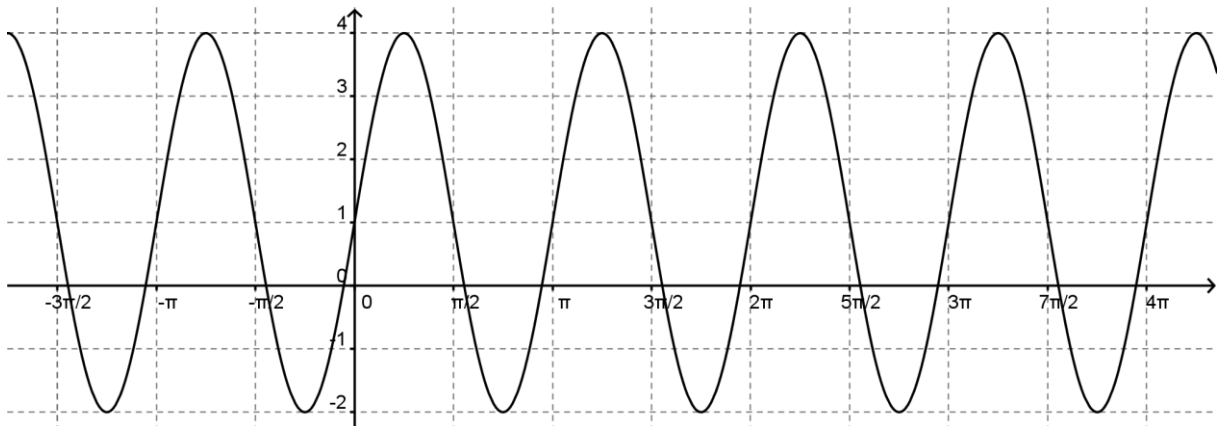
a)



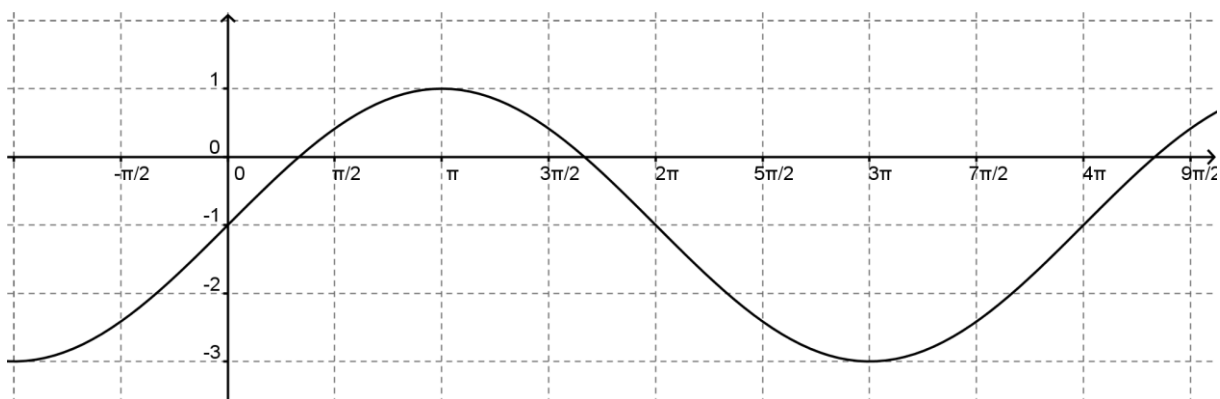
b)



c)



d)



Yfirlit úr kafla 7

Grunnhornafallajöfnur:

$$\sin(v) = c \Rightarrow v = \sin^{-1}(c) + h \cdot 360^\circ \text{ eða } v = 180^\circ - \sin^{-1}(c) + h \cdot 360^\circ, \quad h \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(v) = c \Rightarrow v = \pm \cos^{-1}(c) + h \cdot 360^\circ, \quad h \in \mathbb{Z}$$

$$\tan(v) = c \Rightarrow v = \tan^{-1}(c) + h \cdot 180^\circ, \quad h \in \mathbb{Z}$$

Annars stigs hornafallajöfnur: Fyrst er annars stigs jafnan leyst (með þáttun, annars stigs formúlunni eða í vasareikninum). Lausnin á annars stigs jöfnunni er möguleg gildi hornafallsins og þarf að síðan að leysa hornafallajöfnurnar.

Jafnan $A \sin^2(x) + B \sin(x) \cos(x) + C \cos^2(x) = D$

Fyrst er hægri hliðinni breytt í $D(\cos^2(x) + \sin^2(x))$, margfaldað upp úr sviganum og fært yfir í vinstri hlið og einfaldað. Síðan er deilt með $\cos^2(x)$ í alla liði og þá fæst annars stigs tangensjafna (ath. Sértilvik.)

Jafnan $\sin(u) = \sin(v)$:

$$u = v + h \cdot 360 \text{ eða } u = 180^\circ - v + h \cdot 360, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Jafnan $\cos(u) = \cos(v)$:

$$u = \pm v + h \cdot 360, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Jafnan $\tan(u) = \tan(v)$:

$$u = v + h \cdot 180^\circ, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Jafnan $\cos(u) = \sin(v)$: er sama og jafnan $\cos(u) = \cos(90^\circ - v)$.

Æfing 7.1

Dæmi 1 – 10 hafa öll tvær lausnir á bilinu $[0^\circ, 360^\circ[$. Finndu þær báðar.

1. $\sin(x) = \frac{1}{2}$

2. $\cos(x) = 0$

3. $\tan(x) = \sqrt{3}$

4. $2\cos(x) = -1$

5. $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6. $\tan(x) = 1,3$

7. $\sin(x) = 0,8$

8. $\cos(x) = -\frac{1}{3}$

9. $3\tan(x) = 4$

10. $7\cos(x) = -2$

Finndu almenna lausn í gráðum í dæmum 11 – 24

11. $2\cos(x) = 1$

12. $\tan(x) = -1$

13. $\sin(2x) = 0,3$

14. $\cos(3x) = -0,6$

15. $9\sin(2x) + 2 = 0$

16. $\tan(x) = \sqrt{3}$

17. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{9}$

18. $\sin(2x - 180^\circ) = -0,1$

19. $\tan(2x) = 4$

20. $\sin(4x) = 0,5$

21. $\cos(x - 60^\circ) = 0,6$

22. $\sin^2(x) - 3\sin(x) + 2 = 0$

23. $3\cos^2(x) + \cos(x) - 2 = 0$

24. $\tan^2(x) - 2\tan(x) - 3 = 0$

Æfing 7.2

1. Leystu jöfnurnar:

a) $2\sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) - \cos^2(x) = 0$, $x \in [0^\circ, 360^\circ [$

b) $2\sin^2(x) - 3\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) = 0$, $x \in [0, 2\pi [$

c) $4\sin^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + 2\cos^2(x) = 3$, $x \in [0^\circ, 360^\circ [$

d) $3\cos^2(x) + \sin(2x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$

e) $5\sin^2(x) + \sin(x)\cos(x) + 2\cos^2(x) = 4$, $x \in [0^\circ, 360^\circ [$

2. Leystu jöfnurnar:

a) $\cos(3x) = \cos(x - 20^\circ)$

b) $\cos(3x) = \cos(2x)$

c) $\cos(x + 10^\circ) = \cos(2x)$

d) $\sin(5x) = \sin(x + 60^\circ)$

e) $\sin(3x) = \sin(x + \pi)$, $x \in \mathbb{R}$

f) $\sin(2x) = \cos(3x - 40^\circ)$

g) $\cos(3x) = \sin(x - 70^\circ)$, $x \in [0^\circ, 360^\circ [$

h) $\tan(2x) = \tan(x + 30^\circ)$, $x \in [0^\circ, 360^\circ [$

i) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan(3x)$, $x \in \mathbb{R}$

j) $\tan(5x + 32^\circ) = \tan(3x + 6^\circ)$

3. Meðalhitastig mánaðar í Osló ár eitt er gefið með formúlunni

$$f(t) = 11 \cdot \cos\left(\frac{\pi(t-7)}{6}\right) + 6$$
 , $t \in \{1, 2, 3, \dots, 11, 12\}$ þar sem t er númer mánaðar í árinu.

a) Reiknaðu meðalhitann í janúar og september.

b) Hver er hæsti meðalhiti samkvæmt formúlunni og í hvaða mánuði næst hann? Settu upp jöfnu og leystu hana.

c) Í hvaða mánuði er meðalhitinn lægstur? Settu upp jöfnu og leystu hana.

4. Lengd mánudags í mínútum (frá sólarupprás til sólarlags) á tiltekinni breiddargráðu er gefið með formúlunni $L(n) = 740 + 390\sin(7n - 85)^\circ$ þar sem n er númer viku í ári.

a) Reiknaðu lengd mánudags í annarri viku ársins.

b) Hver er hæsta mögulega útkoma sem formúlan getur gefið?

c) Reiknaðu í hvaða viku er lengsti mánudagur með því að setja upp jöfnu og leysa.

d) Reiknaðu í hvaða vikum lengd mánudagsins er 958 mínútur. (Settu upp jöfnu).

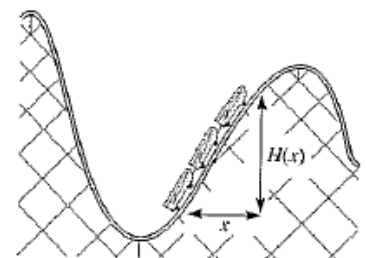
5. Rússíbani er hannaður þannig að hæð hans H í metrum miðað við upphafsstað er gefin með formúlunni

$$H(x) = 20\sin\left(\frac{\pi}{60}x - 2\pi\right) + 20$$

þar sem $x \in [0, 480]$ er fjarlægðin í metrum frá upphafsstað.

a) Hver er minnsta og mesta hæð rússíbanans?

b) Hver er fjarlægð frá upphafsstað þar sem hæðin er minnst? Settu upp jöfnu og leystu hana.



6. Verð y á bensínlítra á 16 daga tímabili er gefið með formúlunni
 $y = 9,2 \sin(30x - 120)^\circ + 108,7$ þar sem x er fjöldi daga frá því mæling hófst.

- Hvað kostar bensínlítrinn þremur dögum frá því að mæling hófst ?
- Hvert er hæsta verð á bensínlítranum þessa 16 daga og hvaða dag er það?
- Hvert er lágsta verð á bensínlítranum og hvaða dag er það?
- Hvaða daga kostar bensínlítrinn 110 ?

7. Sumir trúa því að líf fólks ráðist af slæmum og góðum hringjum sem hefjast við fæðingu. Hringirnir eiga að vera þrír.

i) Lífræðilegur 23 daga hringur sem gefinn er með formúlunni $P(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{23}t\right)$

ii) Tilfinningahringur sem er 28 daga hringur og er gefinn með formúlunni $E(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{28}t\right)$

iii) Vitsmunahringur sem er 33 daga hringur gefinn með formúlunni $M(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{33}t\right)$

þar sem t er tíminn frá fæðingu í dögum ($t = 0$ við fæðingu).

a) Lítum á 50 daga tímabil í lífi þínu eftir að þú verður 19 ára. Reiknaðu $P(t)$, $E(t)$ og $M(t)$ fyrir $t = 6940, 6945, 6950, \dots, 6990$ (þ.e. með 5 daga millibili frá 6940 upp í 6990).

Notaðu niðurstöðurnar í a) lið til að gera graf fyrir hverja formúlu.

b) Ef við notum niðurstöðurnar til að ákveða hvenær er hagstæðast að framkvæma eitthvað mikilvægt og rétti tíminn er þegar allar formúlur gefa sem hæsta útkomu hvenær væri þá best fyrir þig að fara í próf á þessu 50 daga tímabili ?

Svör

Svör við æfingu 1.1

1a) $\overline{AF} = \overline{BG} = \overline{CH} = \overline{EJ} = \overline{FK} = \overline{GL}$

b) $\overline{EA} = \overline{FB} = \overline{GC} = \overline{HD} = \overline{IE} = \overline{JF} = \overline{KG} = \overline{LH}$

c) $\overline{JB} = \overline{IA} = \overline{KC} = \overline{LD}$

d) $\overline{LC} = \overline{KB} = \overline{JA}$

e) Enginn vigur er eins og \overline{DI} .

2. a) \overline{AE}

b) \overline{EF}

c) \overline{AC}

d) \overline{GB}

e) $\overline{0}$

f) \overline{CD}

3. a) $\overline{0}$

b) \overline{AB}

c) \overline{AC}

d) \overline{AK}

e) \overline{FC}

f) \overline{IA}

4. 6

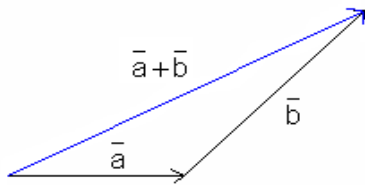
5. a) \overline{PQ}

b) $\overline{0}$

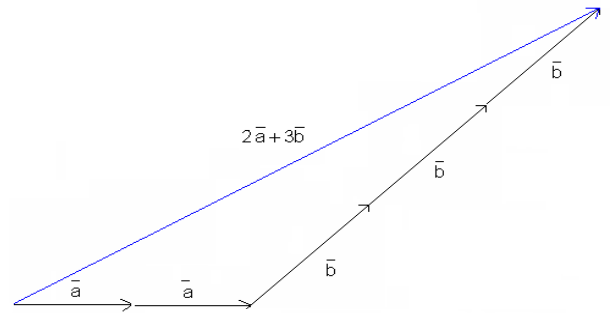
c) \overline{QP}

d) \overline{SQ}

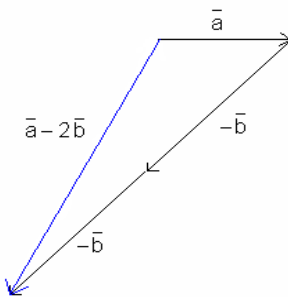
6. a)



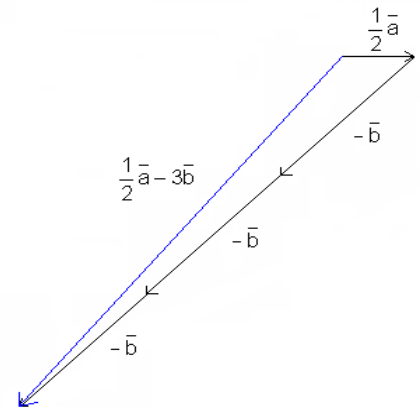
b)



c)



d)



Svör við æfingu 1.2

1a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

2. a) $A = (5, 4)$ b) $A = (-3, -2)$ c) $A = (-4, 7)$ d) $A = (-3, 2)$

3. a) $B = (1, 9)$ b) $B = (-5, 12)$ c) $B = (-1, 2)$

4. a) 10 b) 13 c) 9 d) $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

5. $\overline{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \end{pmatrix}, |\overline{AB}| = \sqrt{85}$

6. $x = \pm 15$ 7. $x = -2$ eða $x = 1$

8. a) $h = -3$ b) $h = \frac{2}{3}$ c) $h = -\frac{1}{4}$ d) $h = 0$

9. a) $x = 2,5$ b) $x = -\frac{5}{8}$ c) $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \approx \begin{cases} 3,56 \\ -0,56 \end{cases}$

10. $x = 2$ 11. a) $A = (0, 0)$ b) $B = \left(-\frac{15}{2}; -\frac{5}{2}\right)$

Svör við æfingu 1.3

1. a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 17 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -19 \\ -16 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -16 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. a) $\begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$ c) $\pm \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ 3. $\pm \begin{pmatrix} 3/\sqrt{34} \\ 5/\sqrt{34} \end{pmatrix}$

4. $\bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$ 5. $\bar{c} = 3\bar{a} + \bar{b}$ 6. $\bar{j} = \frac{1}{8}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{i}$ 7. $\bar{i} = -\frac{1}{4}\bar{a} + 2\bar{j}$

Svör við æfingu 1.4

1. a) $M = (1, 14)$ b) $M = (1,5; 7)$ c) $M = (9, -7)$ d) $M = (7, 3)$

2. a) $A = (0, -28)$ b) $A = (3, 20)$

3. $T = (5, 8)$ 4. $B = (33, -35)$ 5. $D = (10, -16)$

6 a) $M = \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ b) $D = (0, -4)$ c) $h_{\overline{AB}} = -\frac{5}{2}$ og $h_{\overline{AE}} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$ svo þeir eru samsíða.

d) $x_1 \approx 7,12$, $x_2 \approx -1,12$ e) $T = \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$

f) $\overline{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $|\overline{AB}| = \sqrt{29}$ svo s var ið er $\pm \begin{pmatrix} -2/\sqrt{29} \\ 5/\sqrt{29} \end{pmatrix}$

Svör við æfingu 1.5

1a) 23 b) 2 c) - 24

2a) $\sqrt{69} \approx 8,3$ b) $\sqrt{53} \approx 7,28$ c) $\sqrt{376} \approx 19,39$

3a) 4 b) 20 4. $\sqrt{15}$

5a) $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$ svo $\overline{a} \perp \overline{b}$ b) $\overline{a} \cdot \overline{b} = 2$ svo \overline{a} er ekki hornréttur á \overline{b}

c) $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$ svo $\overline{a} \perp \overline{b}$ 6a) $k = -\frac{1}{4}$ b) $k = \pm 4$ c) $x = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2} \approx \begin{cases} 2,22 \\ -0,22 \end{cases}$

7a) $\pm \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\pm \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\pm \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ d) $\pm \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

8a) $\pm \begin{pmatrix} -4/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ b) $\pm \begin{pmatrix} 12/\sqrt{13} \\ 5/\sqrt{13} \end{pmatrix}$ c) $\pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\pm \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

9a) $\pm \begin{pmatrix} -32/\sqrt{5} \\ 24/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ b) $\pm \begin{pmatrix} 96/\sqrt{13} \\ 40/\sqrt{13} \end{pmatrix}$ c) $\pm \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\pm \begin{pmatrix} 16/\sqrt{5} \\ 8/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

10a) $h = -\frac{1}{2}$ b) $h = 3$ c) $h = \frac{3}{2}$ d) $h = 0$

11. $D = (-5, 0)$ 12a) $k = \frac{3}{8}$ b) $k = \frac{7}{2} = 3,5$ c) $k \approx \begin{cases} 6,27 \\ -3,27 \end{cases}$

13a) $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $M = (4, 2)$ c) $\sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6,71$

d) $k = \frac{5}{4} = 1,25$ e) $D = \left(\frac{2}{5}; 0\right)$ f) $E_1 = (0, -3)$, $E_2 = (0, 2)$.

Svör við æfingu 1.6

$$1. \overline{TS} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AC} \quad 2. \overline{AD} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{3}{4}\overline{AC} \quad 3. \overline{AS} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC}.$$

$$4. \overline{OC} = \frac{2}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB} \text{ (Ath. C liggur á strikinu á milli A og B og skiptir því í hlutföllunum 2 : 1.)}$$

$$7. \overline{PQ} = \frac{7}{12}\overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{AC}$$

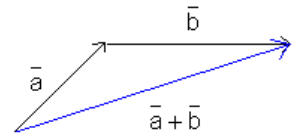
Svör við ýmsum dæmum 1

$$1a) \overline{AB} = \begin{pmatrix} -2-2 \\ 13-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \overline{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad b) \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65} \approx 8,1 \quad c) -\frac{7}{4} = -1,75$$

$$d) \left(\frac{-2+6}{2}; \frac{13+3}{2} \right) = (2,8) \quad e) \left(\frac{2+(-2)+6}{3}; \frac{6+13+3}{3} \right) = (2; 7\frac{1}{3})$$

$$f) \pm \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \quad g) D = (10, -4) \text{ (Höfum að } \overline{AD} = \overline{BC} \Rightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow x=10 \text{ og } y=-4)$$

$$2a) s = 4 \text{ eða } s = -2 \quad b) s = -\frac{1}{3} \quad 3. 3\overline{PQ} \quad 4.$$



5. Höfum að

$$|2\bar{a} - 3\bar{b}|^2 = 4|\bar{a}|^2 - 12\bar{a} \cdot \bar{b} + 9|\bar{b}|^2 \Rightarrow 20^2 = 4 \cdot 8^2 - 12x + 9 \cdot 5^2 \Rightarrow x = 6,75$$

$$6. \overline{PQ} = \overline{PB} + \overline{BQ} = \frac{2}{5}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{BC} = \frac{2}{5}\overline{AB} + \frac{1}{3}(\overline{BA} + \overline{AC}) = \frac{1}{15}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$$

$$7. \bar{c} = s\bar{a} + t\bar{b} \Rightarrow \begin{cases} 2s + 3t = 1 \\ 4s + 8t = -4 \end{cases} \Rightarrow s = 5 \text{ og } t = -3 \Rightarrow \bar{c} = 5\bar{a} - 3\bar{b}$$

$$8. a) \text{ Höfum jöfnuna } \sqrt{9^2 + 24^2} = \sqrt{(x+2)^2 + 20^2} \Rightarrow x \approx 14,03 \text{ eða } x \approx -18,03$$

$$b) \text{ Höfum jöfnuna } \begin{pmatrix} x-3 \\ 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 26 \end{pmatrix} = 14(x-3) + 18 \cdot 26 = 0 \Rightarrow x = -\frac{213}{7} \approx -30,43$$

9. Setjum $C = (0, y)$ og notum að \overline{AC} er hornréttur á \overline{BC} . Fáum þá

$$\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ y-10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ y-6 \end{pmatrix} = -4 \cdot 2 + (y-10) \cdot (y-6) = y^2 - 16y + 52 = 0$$

sem gefur lausnirnar $y \approx 11,5$ eða $y \approx 4,5$ svo $C = (0; 11,5)$ eða $C = (0; 4,5)$.

Svör við æfingu 2.1

1 a) $\angle A = 51,3^\circ$, $\angle B = 38,7^\circ$ b) $\angle A = 17,1^\circ$, $\angle B = 72,9^\circ$
 c) $\angle A = \angle B = 45^\circ$ d) $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$

2 a) 4,45 b) 8,64 c) 1,27 d) 6,73

3. a) 5,3m b) 9,8 m 4 a) $52,5^\circ$ b) $33,6^\circ$ c) $41,4^\circ$

5 i) liggur í fyrsta fjórðungi með stefnuhorn $51,3^\circ$
 ii) liggur í þriðja fjórðungi með stefnuhorn $-143,1^\circ$ (eða $216,9^\circ$)
 iii) liggur í fjórða fjórðungi með stefnuhorn $296,6^\circ$ (eða $-63,4^\circ$)
 iv) liggur í öðrum fjórðungi með stefnuhorn $158,2^\circ$

6 a) $\cos(180^\circ) = -1$ og $\sin(180^\circ) = 0$ (seinni armur hornsins fellur saman við neikvæða x-ásinn)
 b) $\cos(270^\circ) = 0$ og $\sin(270^\circ) = -1$ (seinni armur hornsins fellur saman við neikvæða y-ásinn)

7. 129°

8. 27°

9. 287°

10. 312°

11. $v \approx 70,53^\circ$, $y \approx 0,94$

12. $v \approx 109,47^\circ$, $y \approx 0,94$

13. $v \approx 14,48^\circ$, $x \approx 0,97$

14. $v \approx 165,52^\circ$, $x \approx -0,97$

15 a) $23,6^\circ$, $156,4^\circ$ b) $194,5^\circ$, $345,5^\circ$ c) $36,9^\circ$, $143,1^\circ$

d) $11,5^\circ$, $168,5^\circ$ e) 30° , 150° f) engin lausn

g) $365,7^\circ$, $534,3^\circ$

16 a) $66,4^\circ$, $293,6^\circ$ b) $104,5^\circ$, $255,5^\circ$ c) $53,13^\circ$, $306,9^\circ$

d) $78,5^\circ$, $281,5^\circ$ e) 0° f) engin lausn g) $804,3^\circ$, $995,7^\circ$

17 a) $21,8^\circ$, $201,8^\circ$ b) 166° , 346° c) $30,96^\circ$, $210,96^\circ$

d) $11,3^\circ$, $191,3^\circ$ e) $26,6^\circ$, $206,6^\circ$ f) $53,1^\circ$, $233,1^\circ$ g) $5,7^\circ$, $-174,3^\circ$

18 a) $44,4^\circ$, $135,6^\circ$ b) $63,3^\circ$, $296,7^\circ$ c) $81,9^\circ$, $261,9^\circ$

d) $228,6^\circ$, $311,4^\circ$ e) $413,1^\circ$, $666,9^\circ$ f) $143,1^\circ$

g) $316,9^\circ$

- 19 a) 9,823 newton b) 28,71°
 20. a) 60°, 109,5°, 250,5°, 300° b) 0°, 23,6°, 156,4°, 180° c) 210°, 330°
 d) 81,9°, 135°, 261,9°, 315° e) 69,9°, 143,9°, 249,9°, 323,9°

21 a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

22. $\pm \frac{12}{13}$

23. $\frac{24}{25}$

24. $\frac{\sqrt{15}}{4}$

25. $\bar{a} \approx \begin{pmatrix} 3,44 \\ 4,91 \end{pmatrix}$

26. $\bar{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} \cos(220^\circ) \\ \sin(220^\circ) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,766 \\ -0,643 \end{pmatrix}$

28. 60,26°

29. 71,57°

30. 90°

31. $s \in]-\infty, 1[\cup]5, \infty[$

32. a) $s = 6$, $s = -1$

b) $s \in]-1, 6[$

c) $s = 9$

Svör við ýmsum dæmum 2

1. 261,7 m 2. 75,4 m 3 a) $\tan(x)$ b) $\sin(x) + 6$ c) 1 d) $\sin(x) + \cos(x)$
 4 a) 82,8°, 277,2° b) 26,6°, 206,6° 5 a) 38,7°C, 39,8°C, 40,3°C, 39,8°C, 37,6°C, 37,1°C b) 40,3°C á degi 4 c) 37,1°C á 12. degi 6 a) 8000 km b) 10 mínútur
 7 a) 2 m, 13,1 m, 22,9 m, 30,9 m, 13,1 m, 5,1 m, 2 m b) 2 m c) 34 m eftir 15 sek.
 d) 30 sek. 8 a) 0, 20, 0, -20, 0, 20, 0, -20, 0 b) -20 m og 20 m
 c) 30 m og 150 m 9 a) 9,8, 10,3, 14,3, 11,5 b) á degi 171 c) á degi 354

Svör við æfingu 3.1

- 1 a) 25,7 cm² b) 7,7 cm² 2) 67,8° eða 112,2°
 3 a) 8,4 b) 7,7 c) 3,3 4. 34,4°
 5. a) 24,2° b) 43° c) 55° d) 87,4° eða 92,6° e) engin lausn

6. 8,96 cm 7. 12,34 cm 8. $\angle A = 38,6^\circ$, $B = \angle 92,9^\circ$ og $\angle C = 48,5^\circ$

9. $F = 31,4 \text{ cm}^2$. 10. $31,1^\circ$, $126,3^\circ$ og $18,6$

11. a) $\overline{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overline{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\overline{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $a = \sqrt{65}$, $b = \sqrt{29}$, $c = \sqrt{26}$ c) $\angle A = 100,5^\circ$, $\angle B = 41^\circ$, $\angle C = 38,5^\circ$ d) 13,5

12. a) $AC = 43,2 \text{ m}$ og flatarmálið er $759,1 \text{ m}^2$ b) 35,6 m

13. b) $\angle B = 24,4^\circ$, $\angle H = 20,6^\circ$, $FB = 3,2 \text{ km}$. c) Já. Fjarlægðin til B er 4,7 km.

14. a) $\angle ATB = 19,9^\circ$ og $BT = 135,5 \text{ m}$ b) 92,05 m

15. a) 8,24 m b) $AC = 18,37 \text{ m}$, $BC = 8,95 \text{ m}$, $75,7 \text{ m}^2$ c) $AC = 11,4 \text{ m}$

d) 8,24 m , $AC = 14,9 \text{ m}$ 16. a) 114,4 m b) $14,9^\circ$ c) 135,1 m

17. 69,9 m

Svör við æfingu 4.1

1a) $(x-2)^2 + (y-7)^2 = 3^2$ b) $x^2 + (y-4)^2 = 7^2$ c) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 6^2$

d) $(x+1)^2 + (y+5)^2 = 6,25$ c) $x^2 + y^2 = 1$

2a) $M = (5, 3)$ og $r = 4$ b) $M = (-3, 3)$ og $r = 5$ c) $M = (-1, -2)$ og $r = \sqrt{10}$

d) $M = (0, 0)$ og $r = 2$

3a) Innan hrings b) utan hrings c) innan hrings d) á hringnum

4. $(x-4,5)^2 + (y-3)^2 = 42,25$ 5. $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 25$

6a) 16 b) 36 c) 6,25 d) 1

7a) $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 5^2$, $M = (-2, 5)$ og $r = 5$

b) $(x-6)^2 + y^2 = 7^2$, $M = (6, 0)$ og $r = 7$

c) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 10$, $M = (-1, 3)$ og $r = \sqrt{10}$

d) $(x+2,5)^2 + (y-1,5)^2 = 9,5$, $M = (-2,5, 1,5)$ og $r = \sqrt{9,5} \approx 3,1$

8a) $(0, 5)$ og $(0, -3)$ við y-ás , $(7,9; 0)$ og $(-1,9; 0)$ við x-ás.

b) $(0, -0,27)$ og $(0, -3,73)$ við y-ás , engir skurðpunktar við x-ás.

c) $(0, -1)$ og $(0, 4)$ við y-ás , $(-6,6; 0)$ og $(0,61; 0)$ við x-ás.

9a) $(0, 4)$ og $(-4, 0)$ b) $(2, 4)$ og $(-1, 1)$

10a) $(0, -2)$ og $(0, 2)$ b) $(-\sqrt{7}; -1)$ og $(\sqrt{7}; -1)$

11. $k > -9$ 12. $t = 1$ eða $t = 2$

Svör við æfingu 4.2

1a) $M = (2, 3)$, stóras er 8, skammás 4, brennipunktur: $(2 \pm \sqrt{12}; 3)$, $e = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1b) $M = (-12, 5)$, stóras er 10, skammás 8, brennipunktur: $(-15, 5)$ og $(-9, 5)$, $e = \frac{3}{5}$

1c) $M = (0, -2)$, stóras er 6, skammás 2, brennipunktur: $(0; -2 \pm \sqrt{8})$, $e = \frac{\sqrt{8}}{3}$

1d) $M = (0, 0)$, stóras er $2\sqrt{5}$, skammás 4, brennipunktur: $(\pm 1, 0)$, $e = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

2a) $\frac{(x-4)^2}{10^2} + \frac{(y-1)^2}{8^2} = 1$

2b) $\frac{(x-4)^2}{4^2} + \frac{(y-1)^2}{5^2} = 1$

Svör við ýmsum dæmum 4

1. $M = (3, -5)$ $R = 7$

2. a) $(-1, 2)$ og $(-5, -2)$ b) Innan hrings ($|\overline{MQ}| = \sqrt{20} < \sqrt{26}$)

3. $\frac{(x-3)^2}{5^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1$

4. $e = \frac{4}{5}$ 5. $(9, 3; 0)$ og $(-1, 3; 0)$ 6. $M = (-1, 14)$ og $r = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ 7. 6,4

8. Stóras er 12, skammás er 8 og hringvik $e = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0,745$.

9. $(-3, 2)$ $a = 5$, $b = 2$, topppunktar eru $(-8, 2)$ og $(2, 2)$

10. $\frac{(x-7)^2}{3^2} - \frac{(y-2)^2}{1,5^2} = 1$

Svör við æfingu 5.1

1. a) $2x - y + 2 = 0$
d) $y - 7 = 0$

b) $4x + y + 2 = 0$

c) $2x + 3y - 15 = 0$

2a) $15x + 7y - 11 = 0$
d) $3x - 4y - 6 = 0$

b) $x - y + 4 = 0$

c) $3x + 5y - 15 = 0$

3a) $2x + y - 9 = 0$
d) $x + 3y + 3 = 0$

b) $x - 2y + 8 = 0$

c) $4x - y + 4 = 0$

4a) $\left(\frac{111}{29}, \frac{2}{29}\right)$

b) $\left(-\frac{26}{3}, -\frac{28}{3}\right)$

c) $\left(\frac{1}{3}, \frac{23}{6}\right)$

d) $\left(4, \frac{11}{2}\right)$

$$5a) (3, 2) \quad b) \left(\frac{3}{5}, \frac{26}{5}\right) \quad 6a) (6, 5) \quad b) (4, -4) \quad c) (6, 8; -3, 6)$$

$$d) (4, -6) \quad 7a) \frac{60}{13} \quad b) 5 \quad c) 12 \quad d) 5 \quad e) 5$$

$$f) \frac{119}{13}$$

$$8. 2,6 \quad 9. a) 11x + 7y - 53 = 0 \quad b) \frac{75}{\sqrt{170}} \approx 5,75 \quad c) 37,5$$

$$10. x = -2 \text{ eða } x = -\frac{26}{3} \quad 11. P = (0; 2,2) \text{ eða } P = (0; -2,6)$$

Svör við æfingu 6.1

$$1. a) \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad b) \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \quad c) \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} (= 2 + \sqrt{3})$$

$$d) \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} (= 2 - \sqrt{3})$$

$$2. a) \sin(180^\circ - x) = \sin(180^\circ)\cos(x) - \cos(180^\circ)\sin(x) = 0 \cdot \cos(x) - (-1) \cdot \sin(x) = \sin(x)$$

$$b) \cos(x - x) = \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \sin(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$$

$$c) \tan(180^\circ + x) = \frac{\tan(180^\circ) + \tan(x)}{1 - \tan(180^\circ) \cdot \tan(x)} = \frac{0 + \tan(x)}{1 - 0 \cdot \tan(x)} = \tan(x)$$

$$d) \cos(360^\circ - x) = \cos(360^\circ)\cos(x) + \sin(360^\circ)\sin(x) = 1 \cdot \cos(x) - 0 \cdot \sin(x) = \cos(x)$$

$$3. -\frac{7}{9}$$

$$4. a) \frac{4}{5} \quad b) -\frac{\sqrt{56}}{9} \left(= -\frac{2\sqrt{14}}{9} \right) \quad c) \frac{15 + 4\sqrt{56}}{45} \quad d) \frac{20 - 3\sqrt{56}}{45}$$

$$e) \frac{20 - 3\sqrt{56}}{15 + 4\sqrt{56}}$$

$$5. a) -\frac{24}{25} \quad b) -\frac{336}{625} \quad c) \frac{527}{625} \quad d) -\frac{336}{527}$$

$$6. a) -\frac{41}{50} \quad b) -\frac{99}{125} \quad c) \pm \sqrt{\frac{13}{20}} = \pm \frac{\sqrt{65}}{10}$$

$$7. \angle C \approx 44,4^\circ, \angle A \approx 88,8^\circ, \angle B \approx 46,8^\circ, b \approx 7,3$$

$$8. a) \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$b) \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$c) \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \text{ eða}$$

$$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{(\sqrt{2 - \sqrt{3}})(\sqrt{2 - \sqrt{3}})}{(\sqrt{2 + \sqrt{3}})(\sqrt{2 - \sqrt{3}})} = \frac{(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{4 - 3}} = \frac{(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{1}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$9. a) \pm \sqrt{\frac{\frac{4}{5} + 1}{2}} = \pm \frac{3}{\sqrt{10}} \left(= \pm \frac{3\sqrt{10}}{10} \right)$$

$$b) \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \left(= \pm \frac{\sqrt{10}}{10} \right)$$

$$c) \pm \frac{1}{3}$$

$$10. a) \tan(v) = \frac{10}{x} \quad \text{og} \quad \tan(B) = \frac{60}{x}$$

$$c) 1 = \tan(45^\circ) = \tan(B - v) = \frac{\frac{60}{x} - \frac{10}{x}}{1 + \frac{600}{x^2}} \text{ sem}$$

gefur annars stigs jöfnuna $x^2 - 50x + 600 = 0$ og lausnirnar eru $x = 20$ eða $x = 30$.

Svör við æfingu 6.2

$$1a) \frac{\pi}{9} \approx 0,35 \quad b) 40,89 \quad c) \frac{\pi}{4} \quad d) 5\pi \quad e) \frac{\pi}{90} \approx 0,035$$

$$2. a) 229,2^\circ \quad b) 11,46^\circ \quad c) 540^\circ \quad d) 150^\circ \quad e) -15^\circ$$

$$f) 1163,1^\circ$$

$$3a) 0,23, 2,91 \quad b) 3,99, 5,44 \quad c) \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \text{ (eða } 1,05, 5,24)$$

$$d) 1,21, 4,35 \quad e) 6,93, 11,92$$

Svör við æfingu 6.3

1. a hefur áhrif á útslag fallsins. 2. b hefur áhrif á tíðni fallsins. 3. c hefur áhrif á miðlínu fallsins.
4. a) $y = 2\sin(2x)$ b) $y = 3\sin(x) - 1$ c) $y = 3\sin(2x) + 1$ d) $y = 2\sin(\frac{1}{2}x) - 1$

Svör við æfingu 7.1

1. $\{30^\circ, 150^\circ\}$ 2. $\{90^\circ, 270^\circ\}$ 3. $\{60^\circ, 240^\circ\}$ 4. $\{120^\circ, 240^\circ\}$ 5. $\{60^\circ, 120^\circ\}$
6. $\{52,43^\circ, 232,43^\circ\}$ 7. $\{53,13^\circ, 126,87^\circ\}$ 8. $\{109,47^\circ, 250,53^\circ\}$

9. $\{53,13^\circ, 233,13^\circ\}$ 10. $\{106,60^\circ, 253,40^\circ\}$ 11. $x = \pm 60^\circ + h \cdot 360^\circ$
 12. $x = -45^\circ + h \cdot 180^\circ$ 13. $x = 8,73^\circ + h \cdot 180^\circ$ eða $x = 81,27^\circ + h \cdot 180^\circ$
 14. $x = \pm 42,29^\circ + h \cdot 120^\circ$ 15. $x = -6,42^\circ + h \cdot 180^\circ$ eða $x = 96,42^\circ + h \cdot 180^\circ$
 16. $x = 60^\circ + h \cdot 180^\circ$ 17. $x = \pm 167,24^\circ + h \cdot 720^\circ$
 18. $x = 87,13^\circ + h \cdot 180^\circ$ eða $x = 2,87^\circ + h \cdot 180^\circ$ 19. $x = 37,98^\circ + h \cdot 90^\circ$
 20. $x = 7,5^\circ + h \cdot 90^\circ$ eða $x = 37,5^\circ + h \cdot 90^\circ$
 21. $x = 113,13^\circ + h \cdot 360^\circ$ eða $x = 6,87^\circ + h \cdot 360^\circ$ 22. $x = 90^\circ + h \cdot 360^\circ$
 23. $x = \pm 48,19^\circ + h \cdot 360^\circ$ eða $x = 180^\circ + h \cdot 360^\circ$
 24. $x = 71,57^\circ + h \cdot 180^\circ$ eða $x = 135^\circ + h \cdot 180^\circ$

Svör við æfingu 7.2

- 1a) $\{20,1^\circ, 126,2^\circ, 200,1^\circ, 306^\circ, 2^\circ\}$ b) $\left\{0,46, \frac{\pi}{4}, 3,60, \frac{5\pi}{4}\right\}$
 c) $\{67,5^\circ, 157,5^\circ, 247,5^\circ, 337,5^\circ\}$ d) $x \approx \begin{cases} 0,94 + h \cdot \pi \\ -0,35 + h \cdot \pi \end{cases}, h \in \mathbb{Z}$
 e) $\{45^\circ, 116,57^\circ, 225^\circ, 296,57^\circ\}$
 2a) $x = \begin{cases} -10^\circ + h \cdot 180^\circ \\ 5^\circ + h \cdot 90^\circ \end{cases}, h \in \mathbb{Z}$ b) $x = \begin{cases} h \cdot 360^\circ \\ h \cdot 72^\circ \end{cases} = h \cdot 72^\circ, h \in \mathbb{Z}$
 c) $x = \begin{cases} 10^\circ + h \cdot 360^\circ \\ -3,33^\circ + h \cdot 120^\circ \end{cases}, h \in \mathbb{Z}$ d) $x = \begin{cases} 15^\circ + h \cdot 90^\circ \\ 20^\circ + h \cdot 60^\circ \end{cases}, h \in \mathbb{Z}$
 e) $x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + h \cdot \pi \\ h \cdot \frac{\pi}{2} \end{cases}, h \in \mathbb{Z}$ f) $x = \begin{cases} 26^\circ + h \cdot 72^\circ \\ -50^\circ + h \cdot 360^\circ \end{cases}, h \in \mathbb{Z}$
 g) $\{40^\circ, 100^\circ, 130^\circ, 220^\circ, 280^\circ, 310^\circ\}$ h) $\{30^\circ, 210^\circ\}$
 i) $x = \frac{\pi}{8} + h \cdot \frac{\pi}{2}, h \in \mathbb{Z}$ j) $x = -13^\circ + h \cdot 90^\circ, h \in \mathbb{Z}$
 3a) -5° og $11,5^\circ$ b) 17° í júlí c) -5° í janúar
 4a) 371 mín b) 1130 c) vika 25 d) 17 og 33
 5a) Minnsta hæð er 0 m og mesta hæð er 40 m b) 90 m, 210 m, 330 m og 450 m
 6. a) 104,1 b) 117,9 kr á degi 7 c) 99,5 kr á degi 1 og 13
 d) á degi 4 ($x \approx 4,27$) og á degi 10 ($x \approx 9,73$)

7)

T	P(t)	E(t)	M(t)
6940	-1	-0,78	0,95
6945	-0,27	0,22	0,28
6950	0,89	0,97	-0,62
6955	0,63	0,62	-1
6960	-0,63	-0,43	-0,54
6965	-0,89	-1	0,37
6970	0,27	-0,43	0,97
6975	1	0,62	0,76
6980	0,14	0,97	-0,10
6985	-0,94	0,22	-0,87
6990	-0,52	-0,78	-,91

Þegar þú hefur náð 19 ára aldri virðist hagstætt fyrir þig að fara í próf ca 35-36 dögum eftir afmælisdaginn.