

## 8. kafli

### Einföldun rökrása með aðferðum Boole, DeMorgan og Karnaugh

Efni kaflans:

Jöfnu breytt á SAM (SOP) form með hjálp DeMorgan.

Einföldun rása með hjálp Karnaugh-korta.

Einfaldaða rásin teiknuð eftir jöfnunni úr Karnaugh-kortinu.

**Ath: SAM (Summa Af Margefldum), SOP (Sum Of Products)**

### 8.1 Boole-jöfnu breytt fyrir Karnaugh-kort:

Í verkefnum hér á undan kom í ljós að til að geta sett jöfnu inn í sannleikstöflu eða Karnaugh-kort þarf jafnan að vera á ákveðnu formi, svokölluðu SAM formi, Summa Af Margfeldum.

Þessi jafna  $X = \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC\overline{C}$  er á SAM formi.

Þetta form byggir á AND-OR rásum, en það er ekki oft sem þær rásir sem við erum að skoða eru á þessu formi. Þess vegna þurfum við að kunna að breyta forminu yfir á SAM.

Jafnan  $A \cdot (B + C)$  er ekki á þessu formi. Við verðum að eyða sviganum og það gerum við með því að margfalda upp úr honum:  $A \cdot B + A \cdot C$ . Þessi jafna er einmitt á SAM formi.

Í þessari jöfnu þurfum við að margfalda svigana saman eins og í venjulegri algebru:  $(A + B) \cdot (A + C) = A \cdot A + A \cdot C + A \cdot B + B \cdot C$ . Þar sem  $A \cdot A = A$  verður SAM jafnan svona:

$A + A \cdot C + A \cdot B + B \cdot C$  og sleppum nú að skrifa margföldunarpunktinn:

$A + AC + AB + BC$ .

Nú þekkjum við formið sem smellur inn í sannleikstöfluna og kortið.

Prófið að setja þessa jöfnu inn í Karnaugh-kort.

Jafnan  $\overline{(A + B)} + C$  er ekki á SAM formi, yfirstrikin binda liðina saman og til að breyta jöfnunni á SAM form verðum við að brjóta strikin niður með DeMorgan reglunni sem sagði að ef við skiptum striki niður þá verðum við að breyta plús í margföldun og margföldun í plús.

Byrjum á lengstra strikinu, skiptum því í tvennt og breytum + fyrir framan cið í ×:

$\overline{(A + B)} \cdot \overline{C}$ . Síðan fellum við tvöfalda strikið yfir sviganum niður því þau eru jafnlöng

og upphefja þess vegna hvort annað. Þá stendur eftir:  $(A + B) \cdot \overline{C}$  og nú getum við

margfaldað inn í svigan:  $A\overline{C} + B\overline{C}$  og hér er jafnan komin á SAM form.

Prófið að setja þessa jöfnu inn í Karnaugh-kortið.

|      | C |   |
|------|---|---|
| AB \ | 0 | 1 |
| 00   |   |   |
| 01   |   |   |
| 11   |   |   |
| 10   |   |   |

**Verkefni 8.1:**

Teiknið rásinnar sem jafnan lýsir, breytið síðan jöfnunum á SAM form, teiknið rásinnar sem SAM formið lýsir og setjið SAM jöfnuna inn í Karnaugh-kort.

**8.1.1:**  $(\overline{A}B + CD)(AC + BD)$  Ath. að  $A \cdot A = A$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      |    |    |    |    |
| 01      |    |    |    |    |
| 11      |    |    |    |    |
| 10      |    |    |    |    |

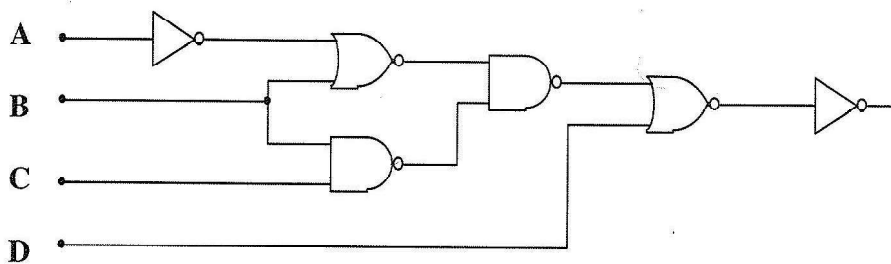
**8.1.2:**  $\overline{A}\overline{B}(C + \overline{D})$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      |    |    |    |    |
| 01      |    |    |    |    |
| 11      |    |    |    |    |
| 10      |    |    |    |    |

8.1.3:  $\overline{AB}(C \oplus D) + \overline{ABCD}$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      |    |    |    |    |
| 01      |    |    |    |    |
| 11      |    |    |    |    |
| 10      |    |    |    |    |

8.1.4: Skrifðu upp jöfnu rásarinnar hér að neðan, breytið henni á SAM form og setjið SAM jöfnuna inn í Karnaugh-kort



| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      |    |    |    |    |
| 01      |    |    |    |    |
| 11      |    |    |    |    |
| 10      |    |    |    |    |

## 8.2 Einföldun rása með Karnaugh-korti:

Eins og við höfum séð, þá eru rökrásir stundum óþarflega flóknar og við sjáum að við getum hent út hliðum sem ekki breyta neinu.

Tilgangur Karnaugh-korta er einmitt að finna út einföldustu rás sem möguleg er. Þetta er gert myndrænt með því að ramma saman Hi í kortinu.

Kortið hér til hliðar sýnir 4ra innganga OR með fjórum AND hliðum.

Jafnan í kortinu:  $X = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + ABC$ .

Skoðum síðustu 2 liðina. Þar er greinilegt að C skiptir ekki máli því það getur verið hvort sem er Hi eða Lo. Það er því hægt að sleppa C í þessum tveim liðum og skrifa jöfnuna svona:

$X = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B + AB$ . Svona einfaldanir eru gerðar í kortinu með því að ramma saman samliggjandi Hi og skrifa þá innganga sem ekki breytast innan rammans.

|    |    | C |   |
|----|----|---|---|
|    |    | 0 | 1 |
| AB | 00 | 1 |   |
|    | 01 |   | 1 |
|    | 11 | 1 | 1 |
|    | 10 |   |   |

### Skoðum þetta betur:

Reglur: Það má ramma saman:

2, 4 eða 8 reiti þar sem Hi liggur saman og myndar ferning.

Það á að hafa rammanna eins stóra og eins fáa og mögulegt er.

Nota má saman Hi eins oft og þurfa þykir.

Kortið getur hugsast sem hólkur, bæði lárétt og lóðrétt, og þannig myndast möguleikar til að ramma reiti sem liggja sitt hvorum megin við samskeytin á hólkunum.

Það má hugsa sér að hornin leggist saman og því má ramma hornin saman sé 1 í þeim öllum.

|    |    | C |   |
|----|----|---|---|
|    |    | 0 | 1 |
| AB | 00 | 1 |   |
|    | 01 |   | 1 |
|    | 11 | 1 | 1 |
|    | 10 |   |   |

Í kortinu hér til hliðar er hægt að ramma saman 110 og 111.

Það má samtímis ramma saman 011 og 111, en reiturinn 000 er stakur og getur ekki tengst neinum.

Síðan lesum við liði jöfnunnar út úr hverjum ramma fyrir sig.

Skráðir eru þeir inngangar sem ekki breytast innan rammans:

Ramminn með 110 og 111: Það er AB sem ekki breytist: AB+

Ramminn með 111 og 011: Þar er það B og C sem ekki breytast: AB+BC

Síðast verður að skrifa alla innganga í 000 og þá lítur jafnan svona út:

$X = AB + BC + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ . Við yfirstrikum þar sem inngangurinn er í Lo, en ekki ef hann er í Hi. Jafnan sem var  $X = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + ABC$  einfaldaðist í kortinu niður í  $X = AB + BC + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$

**Skoðum fleiri:**

Hér er 4ra innganga rás með 8 Hi.

|           |    |           |    |    |    |
|-----------|----|-----------|----|----|----|
|           |    | <i>CD</i> |    |    |    |
|           |    | 00        | 01 | 11 | 10 |
| <i>AB</i> | 00 | 1         | 1  |    |    |
|           | 01 | 1         | 1  | 1  | 1  |
|           | 11 |           |    |    |    |
|           | 10 |           | 1  | 1  |    |

SAM jafnan er:

$$X = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BCD$$

Nú römmum við Hi reitina saman samkvæmt reglunum og við þurfum aðeins 3 ramma:

Lesum út úr römmunum og skrifum breyturarnar sem breytast ekki innan hvers ramma:

Ramminn efst til vinstri:  $\overline{A}\overline{C}$

Miðramminn:  $\overline{A}B$

Neðsti ramminn:  $A\overline{B}$

Einfaldaða jafnan:  $X = \overline{A}\overline{C} + \overline{A}B + A\overline{B}$

|           |    |           |    |    |    |
|-----------|----|-----------|----|----|----|
|           |    | <i>CD</i> |    |    |    |
|           |    | 00        | 01 | 11 | 10 |
| <i>AB</i> | 00 | 1         | 1  |    |    |
|           | 01 | 1         | 1  | 1  | 1  |
|           | 11 |           |    |    |    |
|           | 10 |           | 1  | 1  |    |

Takið eftir hve mikið jafnan skrapp saman.

**Einföldum meira:**

Kortið hér til hliðar sýnir 11 innganga OR hlið.

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      | 1  |    |    | 1  |
| 01      | 1  | 1  |    | 1  |
| 11      | 1  | 1  |    | 1  |
| 10      | 1  |    | 1  | 1  |

Römmum inn Hi reitina:

Nú nýtast reglurnar um hólkin. Reglan um hornin er óþörf þar sem hólkreglan nær öllum reitunum á köntunum.

Skrifum upp það sem **ekki** breytist innan hvers ramma:

Ramminn á köntunum:  $\overline{D}$

Ramminn í miðjunni:  $B\overline{C}$

Ramminn neðst:  $A\overline{B}C$

Og einfaldaða jafnan:  $X = A\overline{B}C + B\overline{C} + \overline{D}$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      | 1  |    |    | 1  |
| 01      | 1  | 1  |    | 1  |
| 11      | 1  | 1  |    | 1  |
| 10      | 1  |    | 1  | 1  |

Rásin einfaldaðist úr 11 innganga OR niður í 3ja innganga OR.

## Verkefni 8.2:

Einfaldið með Karnaugh og teiknið einfölduðu rásina með DIN staðli:

8.2.1:  $X = \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C$

| AB \ C | 0 | 1 |
|--------|---|---|
| 00     |   |   |
| 01     |   |   |
| 11     |   |   |
| 10     |   |   |

8.2.2:  $X = \overline{A}(BC + B\overline{C}) + A(BC + B\overline{C})$

| AB \ C | 0 | 1 |
|--------|---|---|
| 00     |   |   |
| 01     |   |   |
| 11     |   |   |
| 10     |   |   |



8.2.3:  $X = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC$

| AB \ C | 0 | 1 |
|--------|---|---|
| 00     |   |   |
| 01     |   |   |
| 11     |   |   |
| 10     |   |   |

8.2.4:  $X = (\overline{A}\overline{B} + A\overline{B}) \cdot (CD + C\overline{D})$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      |    |    |    |    |
| 01      |    |    |    |    |
| 11      |    |    |    |    |
| 10      |    |    |    |    |

**Verkefni 8.2.5:** Einfaldið sannleikstöfluna með Karnaugh og skráið svarið inn í sannleikstöflu.

| Inputs |   |   | Output |
|--------|---|---|--------|
| A      | B | C | X      |
| 0      | 0 | 0 | 1      |
| 0      | 0 | 1 | 1      |
| 0      | 1 | 0 | 0      |
| 0      | 1 | 1 | 1      |
| 1      | 0 | 0 | 1      |
| 1      | 0 | 1 | 1      |
| 1      | 1 | 0 | 0      |
| 1      | 1 | 1 | 1      |

| AB \ C | 0 | 1 |
|--------|---|---|
| 00     |   |   |
| 01     |   |   |
| 11     |   |   |
| 10     |   |   |

| A | B | C | X |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |   |
| 0 | 0 | 1 |   |
| 0 | 1 | 0 |   |
| 0 | 1 | 1 |   |
| 1 | 0 | 0 |   |
| 1 | 0 | 1 |   |
| 1 | 1 | 0 |   |
| 1 | 1 | 1 |   |

**Verkefni 8.2.6:** Einfaldið sannleikstöfluna með Karnaugh og skráið svarið inn í sannleikstöflu.

| Inputs |   |   |   | Output |
|--------|---|---|---|--------|
| A      | B | C | D | X      |
| 0      | 0 | 0 | 0 | 0      |
| 0      | 0 | 0 | 1 | 1      |
| 0      | 0 | 1 | 0 | 1      |
| 0      | 0 | 1 | 1 | 0      |
| 0      | 1 | 0 | 0 | 0      |
| 0      | 1 | 0 | 1 | 0      |
| 0      | 1 | 1 | 0 | 1      |
| 0      | 1 | 1 | 1 | 1      |
| 1      | 0 | 0 | 0 | 1      |
| 1      | 0 | 0 | 1 | 0      |
| 1      | 0 | 1 | 0 | 1      |
| 1      | 0 | 1 | 1 | 0      |
| 1      | 1 | 0 | 0 | 1      |
| 1      | 1 | 0 | 1 | 1      |
| 1      | 1 | 1 | 0 | 0      |
| 1      | 1 | 1 | 1 | 1      |

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      |    |    |    |    |
| 01      |    |    |    |    |
| 11      |    |    |    |    |
| 10      |    |    |    |    |

| A | B | C | D | X |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |   |
| 0 | 0 | 0 | 1 |   |
| 0 | 0 | 1 | 0 |   |
| 0 | 0 | 1 | 1 |   |
| 0 | 1 | 0 | 0 |   |
| 0 | 1 | 0 | 1 |   |
| 0 | 1 | 1 | 0 |   |
| 0 | 1 | 1 | 1 |   |
| 1 | 0 | 0 | 0 |   |
| 1 | 0 | 0 | 1 |   |
| 1 | 0 | 1 | 0 |   |
| 1 | 0 | 1 | 1 |   |
| 1 | 1 | 0 | 0 |   |
| 1 | 1 | 0 | 1 |   |
| 1 | 1 | 1 | 0 |   |
| 1 | 1 | 1 | 1 |   |

Ræðið niðurstöðurnar við kennarann.

**Aukaverkefni:**

Einfaldið með hjálp Karnaugh og teiknið einfölduðu rásina með ANSII.

1

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C}$$

|    |    |   |   |
|----|----|---|---|
|    |    | C |   |
|    |    | 0 | 1 |
| AB | 00 |   |   |
|    | 01 |   |   |
|    | 11 |   |   |
|    | 10 |   |   |

2

$$AB(\overline{B} + C)$$

|    |    |   |   |
|----|----|---|---|
|    |    | C |   |
|    |    | 0 | 1 |
| AB | 00 |   |   |
|    | 01 |   |   |
|    | 11 |   |   |
|    | 10 |   |   |

3

$$\overline{A}(BC + B\overline{C}) + A(BC + B\overline{C})$$

|    |    |   |   |
|----|----|---|---|
|    |    | C |   |
|    |    | 0 | 1 |
| AB | 00 |   |   |
|    | 01 |   |   |
|    | 11 |   |   |
|    | 10 |   |   |

Einfaldið með Karnaugh, skrifið upp einfölduðu jöfnuna og teiknið rásina með DIN.

4  $A + B\bar{C} + CD$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      |    |    |    |    |
| 01      |    |    |    |    |
| 11      |    |    |    |    |
| 10      |    |    |    |    |

5  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + ABCD + ABC\bar{D}$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      |    |    |    |    |
| 01      |    |    |    |    |
| 11      |    |    |    |    |
| 10      |    |    |    |    |

6  $\bar{A}B(\bar{C}\bar{D} + \bar{C}D) + AB(\bar{C}\bar{D} + \bar{C}D) + A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      |    |    |    |    |
| 01      |    |    |    |    |
| 11      |    |    |    |    |
| 10      |    |    |    |    |

7  $(\overline{A}\overline{B} + A\overline{B})(CD + C\overline{D})$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      |    |    |    |    |
| 01      |    |    |    |    |
| 11      |    |    |    |    |
| 10      |    |    |    |    |

8  $\overline{A}\overline{B} + A\overline{B} + \overline{C}\overline{D} + C\overline{D}$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      |    |    |    |    |
| 01      |    |    |    |    |
| 11      |    |    |    |    |
| 10      |    |    |    |    |

