Kafli 7. Algebrubrot á bls. 16 – 22.

Kennslubréf 3

Orðið algebra kemur úr arabísku. Í algebru er reiknað með bókstöfum. Þeir virka t.d. til að tákna mynstur aðgerða og reglur.

Það sem þarf að nota í kaflanum er **samoka reglan.**

Samoka reglan: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Hægt er að þátta í tvo sviga með samoka reglunni ef eftirfarandi þrjú skilyrði eru uppfyllt:

i) liðirnir eru tveir,
ii) annar liðurinn er plús liður en hinn mínus liður,
iii) hvor liður fyrir sig er ferningsstærð (sjá skýringu hér á eftir).

Ferningstala er náttúrleg tala (heilar plús tölur) í öðru veldi (margfölduð með sjálfri sér). Dæmi um ferningstölu er 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 og 64.

$1 = 1 \cdot 1$
$4 = 2 \cdot 2$
$9 = 3 \cdot 3$ og svo framvegis.
Ferningsstærð getur líka verið bókstafur eða svigi í sléttu veldi. Dæmi x^2, x^4 eða $(5x)^2$.

Dæmi. Þáttaðu i) $x^2 - 9$, ii) $4a^2 - 25b^2$, iii) $9x^2 - 1$, iv) $(x+y)^2 - z^2$

Lausn: Skilyrðin þrjú eru greinilega uppfyllt í öllum dæmunum fjórum og því er ávallt hægt að beita samoka reglunni.

i) $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$
ii) $4a^2 - 25b^2 = (2a+5b)(2a-5b)$
iii) $9x^2 - 1 = (3x+1)(3x-1)$
iv) $(x+y)^2 - z^2 = ((x+y)+z)((x+y)-z) = (x+y+z)(x+y-z)$

Ágiskunarleiðin

Hægt er að þátta í tvo sviga ef liðir eru þrír. Plús eða mínus er á milli liða.

Þátta á $\mathbf{x^2 + bx + c}$ þar sem b og c eru einhverjar heilar tölur.

Skref 1. tveir svigar (x   )·(x   ) = x²

Skref 2. Finna tölugildi fyrir r og s þar sem $r \cdot s = c$ og þá er $b = r + s$.

$(x + r)(x + s)$. Sinnum táknið á milli sviga þarf ekki að rita.

Ef c er frumtala þá kemur bara ein samsetning til greina. 1 sinnum c. Þá er r = 1 og s er frumtalan.
Ef c er samsett tala þá koma fleiri tölugildi til greina fyrir r og s.

Dæmi $x^2 - 3x - 10 = (x \quad) (x \quad)$
Tölugildið $-10 = -1\cdot 10 = -2 \cdot 5 = (1\cdot)(-10) = (2)\cdot(-5)$
Vel r og s þannig að $r + s = -3 = b = -5 + 2$

$x^2 - 3x - 10 = (x -5) (x +2)$

Þegar ágiskunaraðferðinni er beitt er best að liðirnir séu ritaðir í ákveðinni röð þannig að fyrsti liðurinn sé sá sem hefur hæsta stigið á x, x^2 og miðliðurinn sá sem hefur eitt stig á x, $x^1 = x$.
Athugaðu að $x^0 = 1$

Dæmi. Þáttaðu $x^2 + 7x + 12$.

Lausn: Finna þarf tvær tölur r og s þannig að $(x + r)(x + s) = x^2 + 7x + 12$.
(Þar eð allir liðir eru jákvæðir verður plús í báðum svigunum.) Tölurnar r og s eru þættir tölunnar 12 því að $r \cdot s = 12$.
Möguleikarnir á að þátta töluna 12 í margfeldi tveggja talna eru eru

$$1 \cdot 12$$
$$2 \cdot 6$$
$$3 \cdot 4$$

Nú sést að 3 og 4 er rétta svarið því að summa talnanna 3 og 4 er 7 sem passar við miðliðinn. Því er $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$.

Dæmi. Þáttaðu $x^2 - 12x + 32$.

Lausn: Síðasti liðurinn er plús liður svo að sama merki verður að vera í báðum svigunum en af því að miðliðurinn er mínusliður verður merkið að vera mínusmerki. Tölurnar í svigunum eru tveir þættir tölunnar 32 og möguleikarnir eru :

$$1 \cdot 32$$
$$2 \cdot 16$$
$$4 \cdot 8$$

og rétta svarið er 4 og 8 því að summan er 12 sem passar við miðliðinn. Því er
$x^2 - 12x + 32 = (x - 4)(x - 8)$.

Dæmi. Þáttaðu $x^2 - 7x - 18$.

Lausn: Síðasti liðurinn er mínusliður og þá verður mínusmerki í öðrum sviganum en plúsmerki í hinum. Möguleikarnir á að þátta töluna 18 í tvo þætti eru

$$1 \cdot 18$$
$$2 \cdot 9$$
$$3 \cdot 6$$

og nú er rétta svarið 2 og 9 því að **mismunur** talnanna er 7 sem passar við miðliðinn. Mínusmerkið er á hærri tölunni því að miðliðurinn er mínusliður.
Því er $x^2 - 7x - 9 = (x-9)(x+2)$.

Lengin og stytting brota

Brotið $\frac{x}{x}$ er ávallt jafnt 1 ef $x \neq 0$. Af þessu leiðir að margföldun með tölu og síðan deiling með sömu tölu (sem er ekki 0) breytir ekki gildi útkomu. Það kallast stytting að spara sér slíka vinnu. Stytting brots er í því fólgin að stytta í burtu sameiginlegan þátt og því verður að breyta teljara og nefnara í þáttastærð (þátta teljara og nefnara) áður en brotið er stytt. Ef þú fylgir eftirfarandi leiðbeiningum ertu á grænni grein í styttingu!

1. skref. Settu sviga utan um þá teljara og nefnara sem innihalda fleiri en einn lið.
2. skref. Þáttaðu teljara ef hægt er
3. skref. Þáttaðu nefnara ef hægt er.
4. skref. Styttu út þá þætti sem eru eins í teljara og nefnara.

Athugaðu að $(a-b) = -(b-a)$ og því má einnig stytta sviga á móti gagnstæðum sviga en út úr þeirri styttingu fæst útkoman -1 eða bara mínusmerki sem best er setja fyrir framan brotið.

Dæmi. Styttu brotið $\frac{5x^3yz^2}{10xy^2z^3}$.

Lausn: Hér eru engar liðastærðir og hægt að stytta beint:

$$\frac{5x^3yz^2}{10xy^2z^3} = \frac{5 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot z \cdot z}{2 \cdot 5 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z \cdot z} = \frac{x \cdot x}{2 \cdot y \cdot z} = \frac{x^2}{2yz}.$$

Það þarf ekki að leysa dæmið í svona mörgum skrefum en nauðsynlegt er að sýna einhverja útreikninga.

Skoðum sýnidæmi í textahefti á bls. 7 þar sem þarf að þátta.

(Í dæmi 2 í skilaverkefni 4 þarf að þátta.)

Dæmi. Styttu $\frac{x^2-3x}{x^2-9}$.

Lausn:

1. skref. Teljari og nefnari eru liðastærðir og því er settur svigi utan um teljara og nefnara: $\frac{(x^2-3x)}{(x^2-9)}$

2. og 3. skref. Teljari og nefnari eru þáttaðir: $\frac{(x^2-3x)}{(x^2-9)}=\frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)}$

4. skref. Sviginn $(x-3)$ er þáttur bæði í teljara og nefnara og hann er styttur burt:

$$\frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{x}{(x+3)}$$

Margföldun brota

Þegar tvö brot eru margfölduð saman eru teljarnir margfaldaðir saman og nefnararnir margfaldaðir saman:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Þegar algebrubrot eru margfölduð saman er mjög mikilvægt að stytta fyrst og margfalda svo.

1. skref. Settu sviga utan um alla teljara og nefnara sem innihalda fleiri en einn lið.
2. skref. Þáttaðu alla teljara og nefnara sem hægt er að þátta.
3. skref. Styttu.
4. skref. Margfaldaðu brotin saman.

Dæmi. Margfaldaðu $\frac{3x}{a}\cdot\frac{x^2}{5a}$.

Lausn: Hér eru engar liðastærðir og ekkert hægt að stytta svo að við höldum beint yfir í skref 4 og margföldum brotin saman:

$$\frac{3x}{a}\cdot\frac{x^2}{5a}=\frac{3x^3}{5a^2}$$

Deiling brota

Þegar deilt er með broti er hægt að reikna út úr deilingunni með því að snúa brotinu sem deilt er með við og breyta deilingarmerkinu í margföldunarmerki:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Seinna brotið snýst við og deilingarmerkið breytist í margföldunarmerki.

Dæmi. Deildu $\frac{a}{a-2} : \frac{a^2}{a^2-4}$.

Lausn: Breytum í margföldunardæmi $\frac{a}{a-2} \cdot \frac{a^2-4}{a^2}$ og fylgjum síðan leiðbeiningum um margföldun:

$$\frac{a}{(a-2)} \cdot \frac{(a^2-4)}{a^2} = \frac{a}{(a-2)} \cdot \frac{(a+2)(a-2)}{a^2} = \frac{(a+2)}{a}.$$

Samlagning brota

Ef finna á summu eða mismun brota verða brotin að hafa sama nefnara. Ef brot með sama nefnara eru lögð saman skal leggja teljarana saman en nefnarinn helst óbreyttur:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Sama gildir í frádrætti, teljari dregst frá teljara en nefnari helst óbreyttur:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Dæmi. Reiknaðu $\frac{5x}{y} + \frac{2x}{y} - \frac{3x}{y}$.

Lausn: $\frac{5x}{y} + \frac{2x}{y} - \frac{3x}{y} = \frac{5x+2x-3x}{y} = \frac{4x}{y}$.

Dæmið fyrir ofan er sýnidæmi bls. 18 í textahefti.

Sýnidæmi

$$\text{b)} \quad \frac{3x-1}{4} + \frac{2x+3}{2} - \frac{x+1}{3}$$

b) Fyrst þarf að finna samnefnara sem er talan 12 og lengja brotin. Við setjum líka sviga utan um liðastærðir:

$$\frac{3x-1}{4}+\frac{2x+3}{2}-\frac{x+1}{3}=\frac{3\cdot(3x-1)}{3\cdot 4}+\frac{6\cdot(2x+3)}{6\cdot 2}-\frac{4\cdot(x+1)}{4\cdot 3}$$

$$=\frac{9x-3+12x+18-4x-4}{12}$$

$$=\frac{17x+11}{12}$$