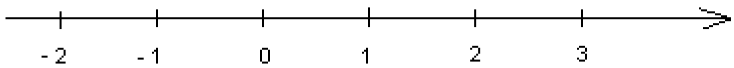
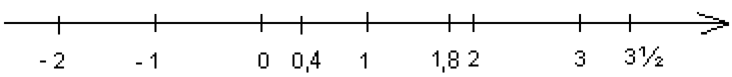
1. Nokkur algeng talnamengi

N = $\{1,2,3,4,...\}$ er mengi náttúrlegra talna. Náttúrlegu tölurnar skiptast í frumtölur og samsettar tölur að tölunni 1 undanskilinni sem er hvorki frumtala né samsett tala. Frumtölurnar eru þær tölur sem bara 1 og talan sjálf gengur upp í. Tíu fyrstu frumtölurnar eru $\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$. Ef tala er hins vegar samsett þá er hægt að finna a.m.k. þrjár tölur sem ganga upp í henni. T.d. ganga 1, 2, 3 og 6 upp í tölunni 6 sem er samsett tala.
Z = $\{... -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 \ , 3 ,...\}$ er mengi heilla talna. Hægt er að gera sér mynd af tölunum með því að merkja þær inn á talnalínu.
Talan 0 er merkt einhvers staðar á línuna og talan 1 hægra megin við 0. Þá er búið að ákvarða hver lengdareiningin er. Aðrar tölur er síðan hægt að merkja inn í stækkandi röð frá vinstri til hægri sem er stefna talnalínunnar.



Q er mengi ræðra talna en ræðar tölur eru allar þær tölur sem hægt er að rita sem almenn brot . Hér eru nokkur dæmi um ræðar tölur: $\frac{9}{17}$, $\frac{-42}{7}$, $\frac{19}{1}$, $\frac{9842}{-571}$. Allar heilu tölurnar eru ræðar tölur því hægt er að rita þær sem brot.
Til dæmis er $9 = \frac{36}{4}$ og $-12 = \frac{-36}{3}$. Öll endanleg tugabrot eru líka ræðar tölur. Til dæmis er $2{,}3 = \frac{23}{10}$ og $-5{,}283 = \frac{-5283}{1000}$.
Þegar almennu broti eru breytt í tugabrot (með því að deila nefnaranum upp í teljarann) fæst annað hvort út endanlegt tugabrot eða óendanlegt tugabrot sem kallast lotubundið tugabrot. T.d. er $\frac{1}{4} = 0{,}25$ en $\frac{1}{3} = 0{,}333...$ og $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857...$
Sagt er að tugabrotið 0,333... séu lotubundið með lotuna 3 og tugabrotið 0,142857142857... sé lotubundið með lotuna 142857. Til að tákna að tugabrot sé endalaust og lotubundið er notað strik yfir lotuna þ.e. 0,333... er ritað $0{,}\overline{3}$ og 0,142857142857...er ritað $0{,}\overline{142857}$.
Á milli heilu talnanna eru óendanlega margar ræðar tölur og virðist lítið pláss fyrir fleiri tölur.



Sú er þó ekki raunin því að ræðu tölurnar eru aðeins lítill hluti allra talnanna á talnalínunni. Flestar tölurnar á talnalínunni eru óræðar. Í þeim flokki eru tölur eins og $\sqrt{2}, \sqrt{3}$,π , 2π,... Séu þær ritaðar sem tugabrot eru þær óendanlega löng tugabrot sem eru ekki lotubundin. Óræðu tölurnar fylla upp það pláss sem eftir er á talnalínunni. Ræðu og óræðu tölurnar til samans kallast rauntölur og eru táknaðar með R.
R = mengi rauntalna = mengi ræðra og óræðra talna (öll tugabrot endanleg og óendanleg.)
Í daglegu lífi notum við bara ræðar tölur.

Um þessi talnamengi gildir að $N \subset Z \subset Q \subset R$.

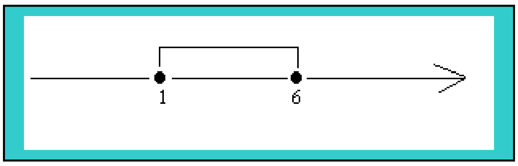
2. Talnabil

Talnabil eru algeng talnamengi. Talnabil (bil) er mengi allra talna milli tveggja talna á talnalínunni ásamt eða án endatalnanna. Bil er lokað ef endatölurnar eru með í bilinu, en bil er opið ef endatölurnar eru ekki með í bilinu. Bil er hálfopið ef önnur endatalan er með í bilinu en ekki hin. Bil getur líka verið endalaust í annan endann.

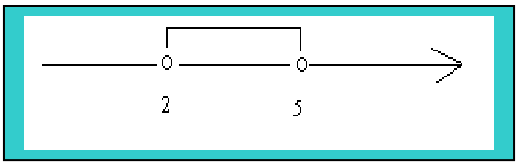
Ef bil er lokað er það gefið til kynna með því að nota hornklofa sem snýr að endatölunum. $[1,6]$ er semsagt mengi talnanna frá og með 1 til og með 6. Ef bil er opið eru hornklofarnir látnir snúa út. $]1,6[$ er semsagt mengi talnanna frá 1 til 6 en hvorki 1 né 6 er í bilinu.Við getum líka sýnt þessi bil á talnalínu. Við notum auðan hring ef bil er opið en dökkan hring ef það er lokað.

Dæmi 2.1 Sýndu bilin i) $[1,6]$, ii) $]2,5[$ og iii) $[-2,3[$ á talnalínu.

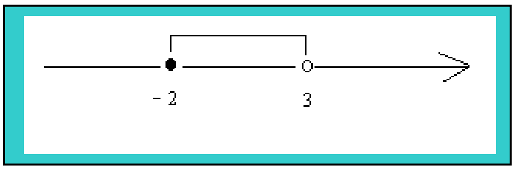
Lausn: i)



ii)



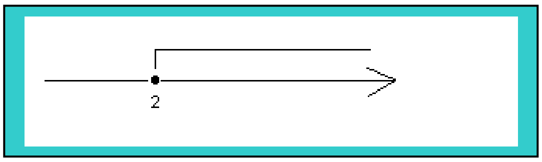
iii)



Þessir auðu hringir hljóta að vera auðhringir.

Í dæmunum hér á undan voru öll bilin endanleg það er að segja billengdin var endanleg. Hins vegar eru óendanlega margar tölur í hverju talnabili því í bilinu eru ekki bara heilar tölur heldur öll brot á milli talnanna og þau eru mörg. Talnabil geta líka verið óendanleg. Ekki er til nein óendanlega stór tala svo táknið ∞ (lesið óendanlegt) er notað til að gefa til kynna að bilið haldi áfram endalaust. Þannig er bilið $[2,\infty[$ mengi allra talna sem eru stærri eða sama sem 2. Athugaðu að táknið ∞ er ekki tákn fyrir tölu.

Svona lítur bilið $[2,\infty[$ út á talnalínu:

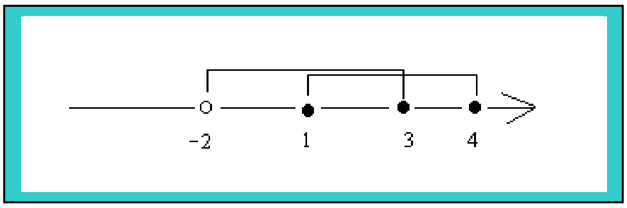


Það er einnig hægt að nota mengjaframsetningu til að rita talnabil. Bilið $[1,6]$ er hægt að rita $\{x \in R \mid 1 \leq x \leq 6\}$ (lesið x er rauntala og $1 \leq x \leq 6$), bilið $]2\ ,5[= \{x \in R \mid 2 < x < 5\}$ og bilið $[2,\ \infty[= \{x \in R \mid x \geq 2\}$.

Þar sem bilin eru mengi er hægt að finna sniðmengi, sammengi, mismengi og fyllimengi þeirra. Niðurstöðurnar eru þá líka bil, sammengi bila eða tómamengi. Það getur verið þægilegt að leysa slík dæmi með því að merkja bilin inn á eina talnalínu og liggur þá svarið oftast ljóst fyrir.

Dæmi 2.2 $A = [1,4]$ og $B =]-2,3]$. Finndu $A \cap B$, $A \cup B$, A' og $A \setminus B$

Lausn: Merkjum bilin A og B inn á talnalínu.



Nú sést að mengi þeirra talna sem eru bæði í A og B, þ.e. $A \cap B$ er bilið $[1,3]$.
Bilin A og B til samans, það er $A \cup B =]-2,4]$.
Stökin sem eru ekki í A eru í tveimur talnabilum: $A' =]-\infty,1[\cup]4,\infty[$
og $A \setminus B =]3,4]$ er mengi talna sem eru í A en ekki B.

3. Ójöfnur

Í þessum kafla er fjallað um fyrsta stigs ójöfnur en við byrjum á að rifja upp hvernig leysa á fyrsta stigs jöfnur.

Skref 1: Ef brot eða svigar koma fyrir í jöfnunni skaltu eyða brotunum (lengdu öll brotin svo þau verði samnefnd og margfaldaðu alla liði með samnefnara brotanna) og margfalda upp úr svigunum. Gættu þess að formerki breytist ef mínus er fyrir framan sviga sem margfaldað er upp úr.

Skref 2: Færðu nú alla x – liði í aðra hlið jöfnunnar og aðra liði í hina hlið jöfnunnar. Þegar liður er færður úr annarri hlið jöfnu yfir í hina hliðina breytast plúsliðir í mínusliði og mínusliðir í plúsliði. (Hvers vegna?)

Skref 3: Einfaldaðu hvora hlið. Ef x-stuðlarnir eru ekki tölur skaltu taka x-ið út fyrir sviga.

Skref 4: Deildu nú með x-stuðlinum í báðar hliðar jöfnunnar. Þá stendur x-ið eitt í annarri hliðinni en svarið við dæminu í hinni hliðinni. (Ath. x-stuðullinn sem deilt er með getur verið svigi).

Dæmi 3.1 Leystu jöfnuna $\frac{x+1}{3} - \frac{14-2x}{4} + 2 = \frac{3x-9}{2}$

Lausn: $\frac{(x+1)}{3} - \frac{(14-2x)}{4} + \frac{2}{1} = \frac{(3x-9)}{2}$ (Svigar settir og heilum liðum breytt í brot.)

$\frac{4(x+1)}{12} - \frac{3(14-2x)}{12} + \frac{12\cdot 2}{12} = \frac{6(3x-9)}{12}$ (Samnefnari fundinn og brotin lengd.)

$4(x+1) - 3(14-2x) + 12\cdot 2 = 6(3x-9)$ (Margfaldað með samnefnara.)

$4x + 4 - 42 + 6x + 24 = 18x - 54$ (Margfaldað upp úr svigum.)

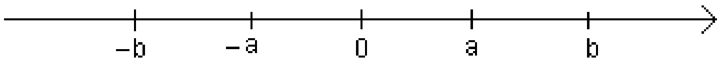
$4x + 6x - 18x = -54 + 42 - 4 - 24$ (x-liðir í aðra hlið og aðrir liðir í hina hlið jöfnunnar.)

$-8x = -40$ (Báðar hliðar einfaldaðar.)

$x = \frac{-40}{-8} = 5$ (Deilt með x-stuðli og jafnan leyst.)

Snúum okkur nú að ójöfnunum. Táknin $<$, $\leq$, $>$ og $\geq$ kallast ójöfnumerki.

Táknið < er lesið “minna en” , $\leq$ „minna eða jafnt og“, > „stærra en“ og $\geq$ “stærra eða jafnt og“. Ef ójöfnumerki er sett í stað samasemmerkis í fyrsta stigs jöfnu fæst fyrsta stigs **ójafna**. Hún er leyst á hliðstæðan hátt og fyrsta stigs **jafna**. Tvennt er þó frábrugðið. Skipta má um formerki beggja vegna jafnaðarmerkis í jöfnu án þess að það raski jöfnunni því að ef a = b þá er $-a = -b$. Sama gildir ekki fyrir ójöfnu. Ef a < b þá er $-a > -b$ (sjá mynd).



Til dæmis er 2 < 3 en $-2 > -3$. Á hliðstæðan hátt gildir að ef a > b þá er $-a < -b$. Því þarf að snúa ójöfnumerki við ef margfalda þarf ójöfnu með mínustölu eða ef deila þarf í báðar hliðar ójöfnu með mínustölu.

Seinna atriðið varðar lausn ójöfnunnar. Í stað þess að fá eitt ákveðið svar eins og t.d. x = 2 er lausnin oftast talnabil þar sem í öðrum enda bilsins er annað hvort táknið $-\infty$ eða ∞ (mínus óendanlegt eða óendanlegt).

Dæmi 3.2 Leystu ójöfnuna $3x + 5 > x - 7$.

Lausn: $3x + 5 > 5x - 7$

svo $3x - 5x > -5 - 7$ (færum x-liði í aðra hlið og aðra liði í hina hlið)

svo $-2x > -12$ (einföldum hvora hlið)

svo x < 6 (deilum með x-stuðli og snúum ójöfnumerki við)

Lausnin er allar tölur lægri en 6, þ.e. talnabilið $]-\infty, 6]$.

Við hefðum getað valið þá leið að færa x-in í hægri hlið:

$3x + 5 > 5x - 7$

svo $7 + 5 > 5x - 3x$ (færum x-liði í aðra hlið og aðra liði í hina hlið)

svo $12 > 2x$ (einföldum hvora hlið)

svo $6 > x$ (deilum með x-stuðli)

Í seinna lausninni var x-stuðullinn jákvæður svo ójöfnumerkið hélst óbreytt þegar deilt var með x-stuðli. Ef þú færir x-in í þá hlið ójöfnunnar þar sem x-stuðullinn er hærri endar þú með jákvæðan x-stuðul og þá helst ójöfnumerkið óbreytt þegar deilt er með x-stuðlinum.

4. Algebrubrot

Við byrjum á að rifja upp þáttun. Það kallast þáttun að breyta liðastærð í margfeldi.
Í þáttun skal ávallt byrja á því að reyna að taka út fyrir sviga. Það er hægt ef liðirnir hafa sameiginlegan þátt sem getur verið tala og/eða bókstafur (eða jafnvel svigi).
Sé ekki hægt að taka út fyrir sviga skal reyna að þátta í tvo sviga. Ef liðirnir eru tveir, annar liðurinn plúsliður og hinn mínusliður reynum við að nota samoka regluna:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Ef liðirnir eru fleiri en tveir notum við ágiskunaraðferðina.

Dæmi 4.1 Þáttaðu a) $9ab + 6a^2b$ b) $x^2 - 25$ c) $x^2 + 8x + 12$

Lausn: a) $9ab + 6a^2b = 3ab(3 + 2a)$

b) $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$

c) $x^2 + 8x + 12 = (x + 2)(x + 6)$

Stundum er bæði hægt að taka út fyrir sviga og þátta í tvo sviga og skal þá ávallt byrja á að taka út fyrir sviga og reyna svo að þátta það sem eftir er í tvo sviga.

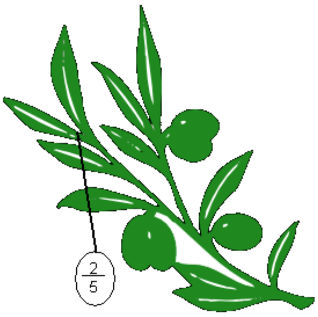
Dæmi 4.2 Þáttaðu $x^3 - 9x$.

Lausn: $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x + 3)(x - 3)$.

Lenging og stytting

Brot er hægt að lengja og stytta án þess að gildi brotsins breytist. Lenging er í því fólgin að margfalda teljara og nefnara með sömu tölunni:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \qquad \text{brotið } \frac{a}{b} \text{ lengt með c.}$$



Stytting brots er í því fólgin að stytta í burtu sameiginlegan þátt:

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \qquad \text{brotið } \frac{ac}{bc} \text{ stytt með c.}$$

Aðeins má stytta þætti og því verður að breyta teljara og nefnara í þáttastærð (þátta teljara og nefnara) áður en brotið er stytt. Ef þú fylgir eftirfarandi leiðbeiningum ertu á grænni grein í styttingu!

1. skref. Settu sviga utan um teljara og nefnara sem eru fleiri en einn liður.
2. skref. Þáttaðu teljara ef hægt er
3. skref. Þáttaðu nefnara ef hægt er.
4. skref. Styttu í burtu þá þætti sem eru eins í teljara og nefnara.

Í styttingunni er tala stytt á móti tölu, bókstafur á móti bókstaf og svigi á móti sviga.
Stytta má sviga á móti sviga ef svigarnir eru eins (þá kemur 1 út úr styttingunni) og ef þeir eru gagnstæðir, en þá kemur -1 út úr styttingunni. Til dæmis er

$\frac{(a + b)}{(a + b)} = 1$ og $\frac{(a - b)}{(b - a)} = -1$. Við fáum -1 út úr seinna dæminu vegna þess að

$(a - b) = -(b - a)$ svo $\frac{(a - b)}{(b - a)} = \frac{-(b - a)}{(b - a)} = -1$. Svigarnir styttast út en ekki mínusinn.

Dæmi 4.3 Styttu brotin a) $\frac{5x^3yz^2}{10xy^2z^3}$ b) $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$

Lausn: a) Þar sem engar liðastærðir eru í teljara og nefnara förum við beint í skref 4 og styttum:

$$\frac{5x^3yz^2}{10xy^2z^3} = \frac{1x^2}{2yz} = \frac{x^2}{2yz}.$$

b) Fylgjum leiðbeiningunum:

$\frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{(x^2-3x)}{(x^2-9)}$ 1. Setjum sviga utan um liðastærðir.

$= \frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)}$ 2. og 3. Þáttum teljara og nefnara .

$= \frac{x}{(x+3)}$ 4. Styttum brotið (sviga á móti sviga).

Margföldun og deiling

Þegar tvö brot eru margfölduð saman eru teljararnir margfaldaðir saman og nefnararnir margfaldaðir saman:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Þegar algebrubrot eru margfölduð saman er mjög mikilvægt að stytta fyrst og margfalda svo.

1. skref. Settu sviga utan um alla teljara og nefnara sem innihalda fleiri en einn lið.
2. skref. Þáttaðu alla teljara og nefnara sem hægt er að þátta.
3. skref. Styttu.

Þegar deilt er með broti er hægt að reikna út úr deilingunni með því að snúa brotinu sem deilt er með við og breyta deilingarmerkinu í margföldunarmerki:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

og síðan er fylgt leiðbeiningum um margföldun.

Dæmi 4.4 Reiknaðu og skilaðu sem fullstyttu broti.

a) $\frac{3x}{a}\cdot\frac{x^2}{5a}$ b) $\frac{a}{a-2} : \frac{a^2}{a^2-4}$

Lausn: a) Hér eru engar liðastærðir og ekkert hægt að stytta svo að við höldum beint yfir í skref 4 og margföldum brotin saman:

$$\frac{3x}{a}\cdot\frac{x^2}{5a} = \frac{3x^3}{5a^2}$$

b) Breytum í margföldunardæmi $\frac{a}{a-2} : \frac{a^2}{a^2-4} = \frac{a}{a-2}\cdot\frac{a^2-4}{a^2}$ og fylgjum síðan leiðbeiningum um margföldun:

$$\frac{a}{a-2}\cdot\frac{a^2-4}{a^2} = \frac{a}{(a-2)}\cdot\frac{(a^2-4)}{a^2} = \frac{a}{(a-2)}\cdot\frac{(a+2)(a-2)}{a^2} = \frac{(a+2)}{a}.$$

Þegar reiknað er með heilum tölum er samlagning og frádráttur einfaldari en margföldun og deiling. Þessu er öfugt farið þegar reiknað er með brotum.

Samlagning og frádráttur
Ef finna á summu eða mismun brota verða brotin að hafa sama nefnara. Ef brot með sama nefnara eru lögð saman skal leggja teljarana saman en nefnarinn helst óbreyttur:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

Sama gildir í frádrætti, teljari dregst frá teljara en nefnari helst óbreyttur:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

Ef brot hafa ekki sama nefnara þarf að finna samnefnara og lengja brotin, síðan má leggja þau saman (eða finna mismun þeirra.) Mikilvægt er að hafa samnefnarann sem minnstan.
Dæmi 4.5 Reiknaðu

a) $\frac{5x}{y}+\frac{2x}{y}-\frac{3x}{y}$

b) $\frac{3x-1}{4}+\frac{2x+3}{2}-\frac{x+1}{3}$

Lausn: a) $\frac{5x}{y}+\frac{2x}{y}-\frac{3x}{y}=\frac{5x+2x-3x}{y}=\frac{4x}{y}$

b) Fyrst þarf að finna samnefnara sem er talan 12 og lengja brotin. Við setjum líka sviga utan um liðastærðir:

$$\frac{3x-1}{4}+\frac{2x+3}{2}-\frac{x+1}{3}=\frac{3\cdot(3x-1)}{3\cdot 4}+\frac{6\cdot(2x+3)}{6\cdot 2}-\frac{4\cdot(x+1)}{4\cdot 3}$$

$$=\frac{9x-3+12x+18-4x-4}{12}$$

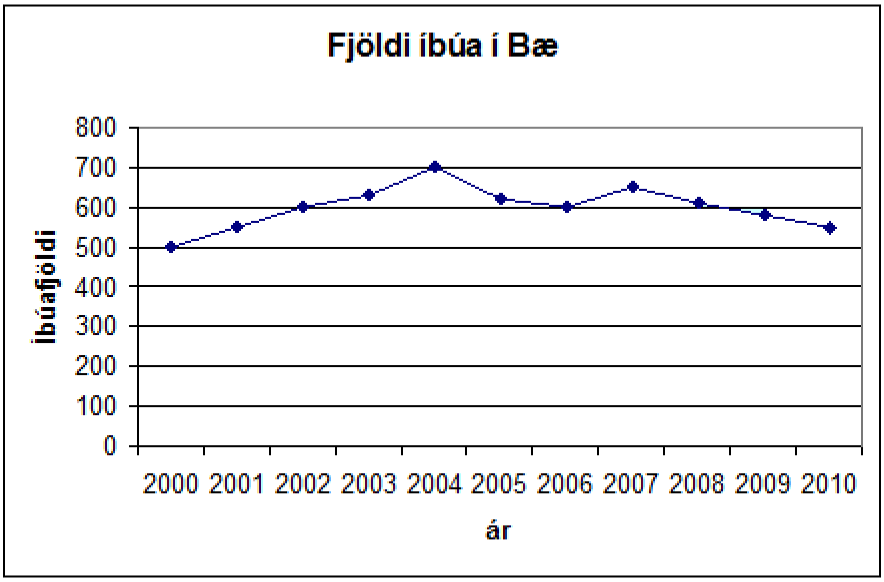
$$=\frac{17x-11}{12}$$

Taktu eftir að mínusinn fyrir framan síðasta brotið breytir merkinu í sviganum þegar sviginn er felldur.

5. Myndlæsi

Í nútímasamfélagi er algengt að upplýsingar séu settar fram á myndrænan hátt til dæmis með línuritum. Það er því mikilvægt að vera læs á slíka framsetningu. Lítum á dæmi.

Dæmi 5.1 Á eftirfarandi línuriti sést fjöldi íbúa í bæ einum á árunum 2000 til 2010. Notaðu myndina til að svara eftirfarandi spurningum.



a) Hver er mesti íbúafjöldinn og hvaða ár er það?

b) Hver er minnsti íbúafjöldinn og hvað ár er það?

c) Á hvaða tímabili fækkar íbúunum?

d) Á hvaða tímabili fjölgar íbúunum?

Lausn:

Við lesum af grafinu:

a) Íbúafjöldinn er mestur þar sem hæsti punktur er. 700 árið 2004.

b) Íbúafjöldinn er minnstur þar sem lægsti punktur er. 500 árið 2000.

c) Íbúum fækkar þegar ferillinn fer minnkandi. Þetta gerist á árunum 2004 til 2006 og einnig á árunum 2007 til 2010.

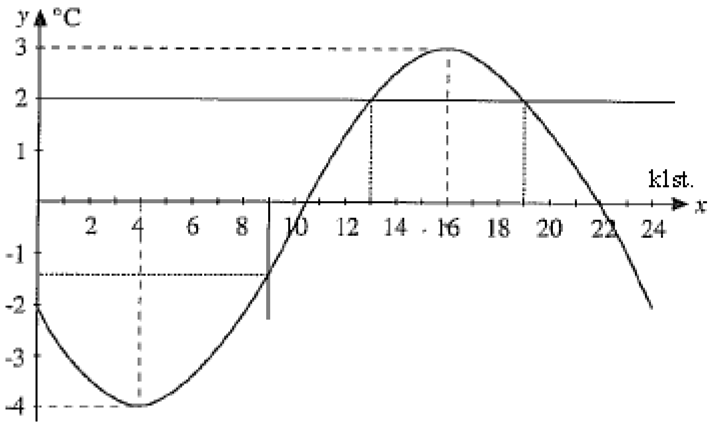
d) Íbúunum fjölgar þegar ferillinn fer vaxandi. Þetta gerist á árunum 2000 til 2004 og frá 2006 til 2007.

6. Fall

Í daglegu lífi tölum við oft um tvær stærðir á sama tíma. Það á til dæmis við þegar sagt er að 2 kg af eplum kosti 460 kr, að það þurfi 2 l af málningu til að mála 20 fermetra, að það sé 12°C stiga hiti klukkan 2 og svona mætti lengi upp telja. Lítum nánar á dæmi. Í töflunni hér fyrir neðan er hitastig mælt á tveggja tíma fresti í sólarhring.

x, klst	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
y, °C	–2,0	–3,5	–4,0	–3,5	–2,2	–0,5	1,2	2,6	3,0	2,5	1,5	0,0	–2,0

Ef við merkjum tilsvarandi punkta inn í hnitakerfi þannig að tíminn sé á x-ásnum og hitastigið á y-ásnum og tengjum punktana með ferli fæst eftirfarandi graf.



Við getum fundið svör við margs konar spurningum út frá grafinu.
T.d. getum við séð að hitastigið var um það bil $-1{,}4°C$ kl. 9. Lægsta hitastigið var $-4°C$ kl 4 um nótt og hæsta hitastigið var 3°C kl. 16. Við getum einnig fundið út klukkan hvað hitastigið var 2°C en það var bæði kl. 13 og kl.19.

Á hverjum tíma er ákveðið hitastig, með öðrum orðum fyrir hvert x-gildi er eitt y-gildi. Til dæmis er tíminn x = 13 þegar hitastigið y = 19. Sagt er að hitastigið sé fall af tíma og hitastigið, þ.e. y-gildið, er kallað **fallgildi.**
Venja er að nota bókstafi sem heiti á föllum og þá oft bókstafina f, g og h.
Við getum til dæmis skýrt hitastigsfallið h og ritað h(x) í stað y.

Aflesturinn y = 19 þegar x = 13 yrði þá ritaður

$$h(13) = 19$$

og á hliðstæðan hátt er $h(9) = -1{,}4$ og h(16) = 3.

Hitastigsmælingin er gerð á tímabilinu 0 til 24 svo tíminn, þ.e. x-ið er í bilinu frá og með 0 til og með 24. Mengi allra x-anna kallast **skilgreiningarmengi** (eða formengi) fallsins.

Hitastigið y sem mælt er breytist frá því að vera lægst – 4° C upp í hæst 3° C svo y getur verið allar tölur frá og með – 4 til og með 3. Mengi allra y-anna kallast **myndmengi** (eða varpmengi) fallsins.

Í dæminu hér á undan fékkst hitastigsfallið út frá mælingum en í stærðfræðinni er fall oftast gefið upp með reiknireglu.

Reiknireglan f(x) = 3x + 4 er dæmi um fall. Í stæðunni 3x + 4 felast fyrirmæli um hvernig reikna skuli fallgildi þegar valið er gildi á x. Fallgildið er fundið með því að margfalda x-gildið með 3 og bæta svo 4 við. Fyrir hvert x-gildi fæst nákvæmlega eitt y-gildi eða fallgildi samkvæmt reiknireglunni.

Dæmi 6.1 Reiknum út fallgildi fyrir x = 2 og x = -3 ef f(x) = 3x + 4.

Lausn: Fyrst setjum við 2 í staðinn fyrir x og fáum

$$f(2) = 3 \cdot 2 + 4 = 10.$$

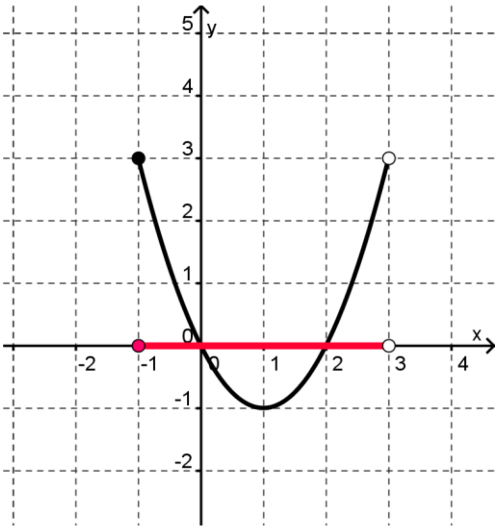
Við finnum svo fallgildið af -3 með því að setja -3 í stað x og fáum
$f(-3) = 3 \cdot (-3) + 4 = -5.$

Ef við táknum fallgildin í reiknireglunni með y í stað f(x) fæst jafnan y = 3x + 4. Þetta er jafna á forminu y = hx + m og í STÆ103 kom fram að graf hennar er bein lína. Hér er formleg skilgreining á hugtakinu fall:

Skilgreining

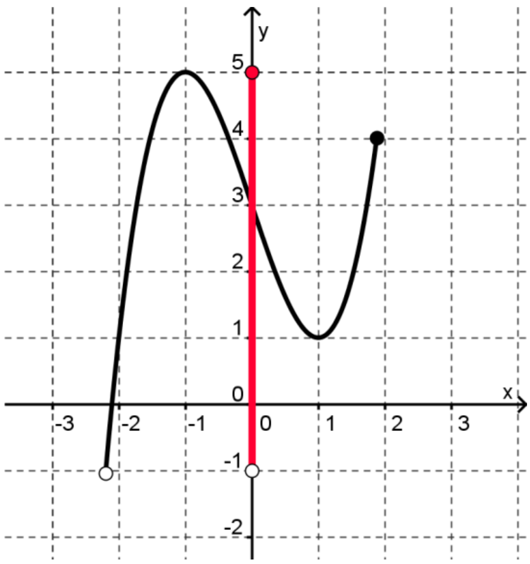
Sagt er að y sé fall af x ef fyrir hvert x-gildi er nákvæmlega eitt y-gildi. y-gildin kallast fallgildi og eru oft táknuð með f(x), g(x), h(x), ... Mengi allra x-gildanna kallast skilgreiningarmengi fallsins (táknað D_f) og mengi allra y-gildanna kallast myndmengi fallsins (táknað V_f).

Skilgreiningarmengi fallsins er það mengi á x-ásnum sem er beint fyrir neðan eða ofan grafið.



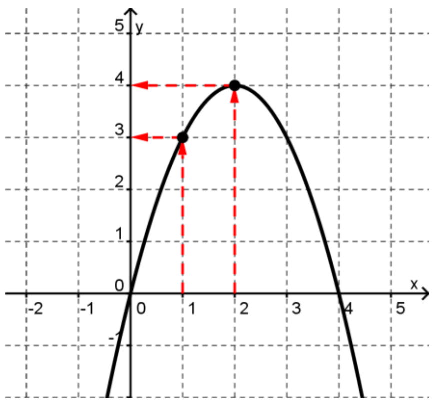
Skilgreiningarmengið er bilið $[-1, 3[$ á x-ásnum.

Myndmengið er það mengi á y-ásnum sem er beint til hliðar (hægri eða vinstri) miðað við grafið.



Myndmengið er bilið $]-1,5]$ á y-ásnum.

Fallgildin (þ.e. y-gildin) eru lesin af y-ásnum en x-gildin af x-ásnum. Ef lesa á fallgildi f(x) af grafi þarf að finna þann punkt á grafinu sem er á móts við töluna x á x-ásnum og lesa síðan tilsvarandi y-tölu af y-ásnum.
Ef fallgildi er gefið og finna á tilsvarandi x-gildi þarf að finna þann punkt eða þá punkta sem eru á móts við tilsvarandi tölu á y-ásnum og lesa af tilsvarandi x-gildi.

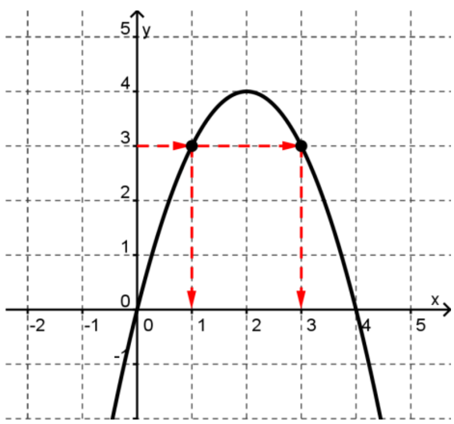


Dæmi 6.2 Á myndinni sést graf falls f(x). Notaðu myndina til að að finna f(1) og f(2).

Lausn: Við leitum að punktinum á grafinu sem hefur x-hnitið 1og lesum y-hnit hans af y-ásnum. Það reynist vera talan 3 svo f(1) = 3.
Á hliðstæðan hátt sést að f(2) = 4.

Dæmi 6.3 Notaðu myndina í síðasta dæmi til að finna x ef f(x) = 3.

Lausn: Við leitum að punktum á grafinu sem hafa y-hnitið 3 og lesum x-hnit þeirra af
x-ási. Punktarnir reynast vera tveir og x hnit þeirra eru 1 og 3 svo jafnan hefur tvær lausnir sem eru x = 1 , x = 3.

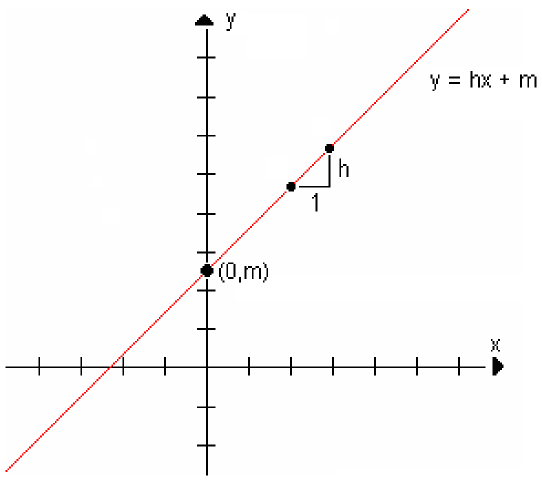


Dæmi 6.4 Gefið er fallið f(x) = 4x + 3.
a) Reiknaðu f(1) og f(5).
b) Leystu jöfnuna f(x) = 17.

Lausn: a) $f(1) = 4 \cdot 1 + 3 = 7$ og $f(5) = 4 \cdot 5 + 3 = 23$.
b) Leysa þarf jöfnuna 17 = 4x + 3 sem er fyrsta stigs jafna.
Nú er 14 = 4x svo $x = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$ (eða 3,5).

Við endum þennan kafla á að rifja upp atriði úr fyrri áfanga um beinar línur.

Regla 6.1 Sérhver lína sem er ekki lóðrétt á sér jöfnu á forminu y = hx + m þar sem h er hallatala línunnar og m er seinna hnit skurðpunkts línunnar við y –ás. Jafnan y = hx + m kallast **skurðhallajafna** beinnar línu.



Með því að nota fallarithátinn er hægt að rita f(x) = hx + m í stað y = hx + m. Fallið f(x) = hx + m kallast fyrsta stigs fall (ef h $\neq$ 0) eða fyrsta stigs margliða.
Hallatala línu (sem er ekki lóðrétt) er gefin með formúlunni

$$h = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

þar sem $P = (x_1 , y_1)$ og $Q = (x_2 , y_2)$ eru einhverjir tveir punktar á línunni.

Skurðhallajafna línu sem liggur í gegnum punktinn $P = (x_1 , y_1)$ og hefur hallatölu h er gefin með formúlunni

$$y - y_1 = h(x - x_1)$$

Lóðréttar línur hafa jöfnu á forminu x = c þar sem c er einhver tala. Lóðrétt lína er ekki graf falls.

7. Annars stigs jöfnur

Leið fótbolta er gefin með formúlunni $y = 0{,}75x - 0{,}02x^2$ þar sem y er hæð boltans í metrum yfir jörðu og x er lárétt fjarlægð frá sparkstað í metrum.
Hversu langt frá sparkstað lendir boltinn ?
Þegar boltinn lendir er hæð hans yfir jörðu $y = 0$. Til að svara þessari spurningu þarf því að leysa jöfnuna $0{,}75x - 0{,}02x^2 = 0$. Þetta er annars stigs jafna því að óþekkta stærðin, þ.e. x-ið, er í öðru veldi. Hér eru nokkur önnur dæmi um annars stigs jöfnur:

i) $x^2 - 4x + 7 = 0$ ii) $x^2 = 16$ iii) $x^2 - 9x = 0$ iv) $7x^2 - 15x = -2$

Séu allir liðir færðir í aðra hlið í dæmunum hér að ofan sést að allar jöfnurnar falla undir almenna formið

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

þar sem a, b og c eru tölur sem kallast stuðlar og $a \neq 0$.

Dæmi 7.1. Ritaðu stuðlana a, b og c í jöfnunum hér að ofan.

Lausn:
i) $x^2 - 4x + 7 = 0$ má rita $1 \cdot x^2 + (-4)x + 7 = 0$ svo a = 1 , b = – 4 og c = 7.
ii) $x^2 = 16$ má rita $1 \cdot x^2 + (-16) = 0$. Hér er enginn x-liður svo a = 1 , b = 0 og c = –16.
iii) $x^2 - 9x = 0$ má rita $1 \cdot x^2 + (-9)x = 0$ svo a = 1, b = – 9 og c = 0.
iv) $7x^2 - 15x = -2$ má rita $7x^2 - 15x + 2 = 0$ og stuðlarnir eru a = 7, b = – 15 og c = 2.

Í almennri annars stigs jöfnu er óþekkta stærðin (venjulega x) bæði í fyrsta veldi og öðru veldi. Það eru því tvær gerðir af óþekktum liðum, x-liður og x^2-liður, og því er ekki hægt að einangra x-ið á sama hátt og í fyrsta stigs jöfnu. Hvernig eru annars stigs jöfnur þá leystar? Aðalaðferðin (og sú sem alltaf er hægt að nota) er formúla, en með henni er hægt að reikna lausnirnar út frá stuðlunum þremur a, b og c. En fyrst skulum við athuga tvær einfaldari aðferðir sem duga á sumar annars stigs jöfnur.

Tilvik 1. Ef enginn x-liður (þ.e. b = 0) er í annars stigs jöfnunni er hægt að einangra x^2- liðinn.

Dæmi 7.2 Leystu jöfnuna $x^2 = 16$.
Lausn: Dragðu ferningsrót báðum megin jafnaðarmerkisins. Þá fæst x = $\sqrt{16}$ = 4 en x = $-\sqrt{16} = -4$ er líka lausn. Lausnirnar eru tvær og við getum skrifað þær í einu lagi:
x = $\pm\sqrt{16} = \pm 4$.

Dæmi 7.3 Leystu jöfnuna $9x^2 - 36 = 0$.

Lausn: Fyrst einangrum við x^2- liðinn með því að færa 36 yfir jafnaðarmerkið og síðan deilum við með 9 til að eyða stuðlinum við x^2:
$9x^2 = 36$ svo $x^2 = 4$
Nú leysum við jöfnuna með því að draga rót og munum eftir mínuslausninni:
$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

Dæmi 7.4 Leystu jöfnuna $x^2 = -9$.

Lausn: Þessi jafna hefur ekki rauntölulausn því að ekki er hægt að draga ferningsrót af mínustölu (engin rauntala í öðru veldi er mínustala). Jafnan hefur því enga lausn.

Dæmi 7.5 Leystu jöfnuna $(x+2)^2 = 25$.
Lausn: Fyrst er dregin ferningsrót (bæði plús og mínusmerki) og þá fæst
$x+2 = \pm 5$.
Þetta gefur okkur tvær fyrsta stigs jöfnur $x+2=5$ og $x+2=-5$,
sem við leysum á venjulegan hátt; þ.e. með því að einangra x-ið.
Fyrri jafnan hefur lausnina x = $5-2=3$ en seinni jafnan hefur lausnina $x=-5-2=-7$.

Ekki hafa allar annars stigs jöfnur lausnir sem eru heilar tölur. Til dæmis hefur jafnan
$x^2 = 3$ lausnirnar $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}73$.
Almennt gildir að annars stigs jafnan $x^2 = p$ þar sem talan p er ekki mínustala hefur lausnirnar $x = \pm\sqrt{p}$. Taktu eftir að lausnirnar eru tvær. Ef p er mínustala hefur jafnan enga lausn.
Tilvik 2. Hægt er að þátta liðastærðina í jöfnunni.
Þessi aðferð byggist á eftirfarandi staðreynd: Ef margfeldi tveggja talna er 0 þá hlýtur a.m.k. önnur talan að vera 0.
Það er mjög mikilvægt að taka eftir að til að hægt sé að beita aðferðinni sem nú verður lýst þá þurfa **allir liðir jöfnunnar að vera í sömu hlið jöfnunnar**.
Dæmi 7.6 Leystu jöfnuna $x^2 - 5x + 6 = 0$.
Lausn: Þáttaðu vinstri hlið jöfnunnar:
$(x-2)\cdot(x-3) = 0$
Nú verður annar hvor þátturinn að vera 0 fyrst margfeldið er 0 og það gefur tvær jöfnur
$x-2=0$ og $x-3=0$
Við leysum hvora jöfnu fyrir sig (einangrum x-ið) og svarið verður
x = 2 eða x = 3

Dæmi 7.7 Leystu jöfnuna $x^2 = -6x$.
Lausn: Höfum liðina sömu megin: $x^2 + 6x = 0$.
Þáttum vinstri hliðina: $x\cdot(x+6) = 0$.
Þá fást tvær jöfnur: x = 0 og x + 6 = 0.
Þetta gefur okkur lausnirnar x = 0 eða $x = -6$.
Þær tvær aðferðir sem nú hefur verið lýst eru einfaldar og fljótlegar en oftast er annars stigs jafnan flóknari en svo að hægt sé að nota þær. Lítum á eitt dæmi áður en við skoðum annars stigs formúluna.
Dæmi 7.8 Leystu jöfnuna $4x^2 + 12x + 9 = 5$
Lausn: Tökum eftir að vinstri hliðina má rita sem $(2x + 3)^2$
svo $(2x+3)^2 = 5$
þá er $2x+3 = \pm\sqrt{5}$ drögum ferningsrót og munum eftir bæði plús- og mínusmerki
svo $2x = -3 \pm \sqrt{5}$ einangrum x-liðinn
svo $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ deilum með x-stuðli.
Sé þessari aðferð beitt við almennu annars stigs jöfnuna $ax^2 + bx + c = 0$ fæst eftirfarandi formúla

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

þar sem a, b og c eru stuðlarnir í jöfnunni og x er lausnin á jöfnunni.
Taktu eftir að talan $-b$ í lausnarformúlunni er gagnstæð við töluna b í jöfnunni. Taktu líka eftir að talan b^2 (sem er fyrri liðurinn í ferningsrótinni) er alltaf plústala.
Hér kemur svo lýsing á notkun lausnarformúlunnar skref fyrir skref:

1. Færðu alla liði jöfnunnar í aðra hlið og einfaldaðu ef hægt er.

2. Skráðu gildi stuðlanna a, b og c.

3. Reiknaðu stærðina $b^2 - 4ac$. Ef þú færð út mínustölu þá hættir þú og skrifar engin lausn og snýrð þér að næsta dæmi, annars heldur þú áfram í skref 4.

4. Settu gildin á stuðlunum a og b inn í lausnarformúluna $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ og gildi tölunnar $b^2 - 4ac$ inn í ferningsrótina. Mundu eftir að talan – b í formúlunni er gagnstæð tala við b-stuðulinn í dæminu og reiknaðu samkvæmt formúlunni bæði svörin. Ef þú reiknar á vasareikni skaltu venja þig á að setja sviga utan um bæði teljara og nefnara og stærðina í rótinni.

Lítum á nokkur dæmi.
Dæmi 7.9 Leystu jöfnuna $7x^2 - 15x = -2$.
Lausn:

1. Færum alla liði í aðra hlið: $7x^2 - 15x + 2 = 0$

2. Ritum stuðlana: a = 7 , b = –15 og c = 2.

3. Reiknum næst stærðina inni í rótarmerkinu: $b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = 169$.

4. Setjum nú inn í lausnarformúluna og reiknum:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{15 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 7} = \frac{15 \pm 13}{14} = \begin{cases} \dfrac{28}{14} = 2 \\ \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7} \end{cases}$$

Dæmi 7.10 Leystu jöfnuna $2x^2 + 3x - 4 = 0$.
Lausn:

1. Allir liðir eru sömu megin.

2. a = 2 , b = 3 , c = – 4.

3. $b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 41$

4. Lausnirnar eru þá $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4} \approx \begin{cases} 0{,}851 \\ -2{,}351 \end{cases}$

Dæmi 7.11 Leystu jöfnuna $x^2+18x+81=0$.
Lausn:

1. Allir liðir eru sömu megin.
2. a = 1 , b = 18 og c = 81.
3. $b^2-4ac=18^2-4\cdot 1\cdot 81=0$.
4. x = $\dfrac{-18\pm\sqrt{0}}{2\cdot 1}=\dfrac{-18}{2}=-9$ (ferningsrótin af 0 er 0). Jafnan hefur bara eina lausn.

Dæmi 7.12 Leystu jöfnuna $x^2-4x+7=0$.
Lausn:

1. Allir liði eru sömu megin.
2. a = 1 , b $=-4$, c = 7
3. $b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 7=-12$. Talan í ferningsrótinni er mínustala svo jafnan hefur enga lausn .

Dæmi 7.13 Leystu jöfnuna $4x^2=6-10x$

1. $4x^2+10x-6=0$ (allir liðir í aðra hlið)
2. a = 4, b = 10 og c = – 6 (stuðlar skráðir)
3. $b^2-4ac=10^2-4\cdot 4\cdot(-6)=196$ (stærðin b^2-4ac reiknuð)
4. $x=\dfrac{-10\pm\sqrt{196}}{2\cdot 4}=\dfrac{-10\pm 14}{8}=\begin{cases}\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}\\[2ex]\dfrac{-24}{8}=-3\end{cases}$ Gildi stuðla sett inn og talan 196 inn í ferningsrótina og reiknað samkvæmt formúlu.

Svörum að lokum spurningunni í upphafi kaflans um hversu langt boltinn lendir frá sparkstað með því að leysa jöfnuna $0{,}75x-0{,}02x^2=0$.

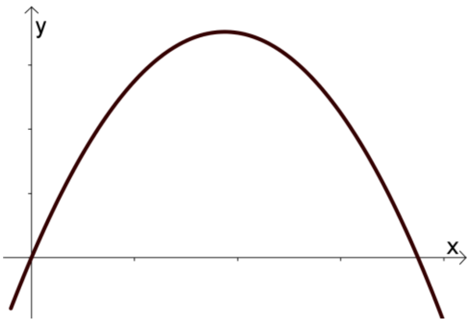
1. Allir liðir eru sömu megin.
2. Gildi stuðla er a = – 0,02 , b = 0,75 og c = 0
3. Reiknum næst $b^2-4ac=(0{,}75)^2-4\cdot(-0{,}02)\cdot 0=0{,}5625$.
4. Setjum inn í lausnarformúluna:

$$x = \frac{-0{,}75 \pm \sqrt{0{,}5625}}{2\cdot(-0{,}02)} = \frac{-0{,}75 \pm 0{,}75}{-0{,}04} = \begin{cases} \dfrac{-1{,}5}{-0{,}04} = 37{,}5 \text{ m} \\ \dfrac{0}{-0{,}04} = 0 \text{ m} \end{cases}$$

Fyrri lausnin er sú sem við leitum að en þar sem boltinn er á jörðunni áður en honum er sparkað (þ.e. y = 0 fyrir sparkið) fæst einnig lausnin x = 0.

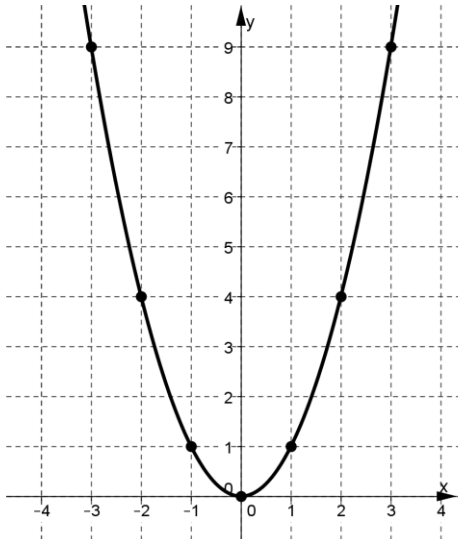
8. Fleygbogar

Ef við teiknum graf formúlunnar $y = 0{,}75x - 0{,}02x^2$ sem lýsir leið boltans í dæminu í upphafi síðasta kafla fæst myndin hér til hliðar. Grafið kallast fleygbogi. Sá hluti grafsins sem er yfir x-ásnum er ferill boltans.

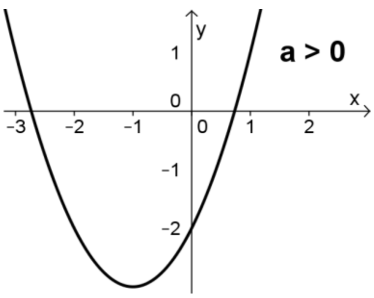


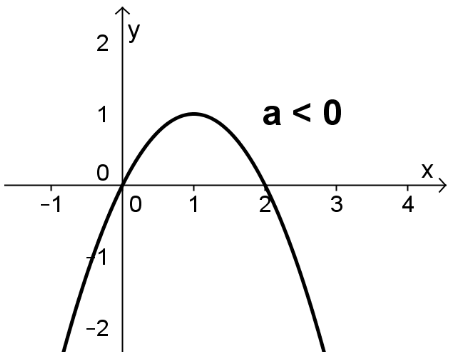
Formúlan $y = 0{,}75x - 0{,}02x^2$ er dæmi um annars stigs fall en formúla af gerðinni $f(x) = ax^2 + bx + c$ kallast annars stigs fall og graf hennar heitir fleygbogi.
Einfaldasta annars stigs fallið er $f(x) = x^2$ (eða $y = x^2$).
Í töflunni hér fyrir neðan eru reiknaðir nokkrir punktar á grafinu. Nokkur x-gildi eru valin og y-gildin reiknuð með formúlunni.

x	y
– 3	9
– 2	4
– 1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

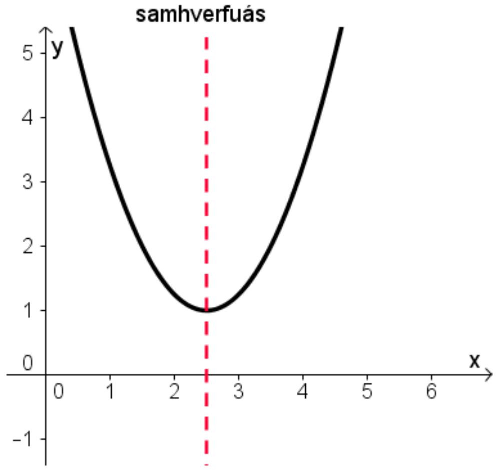


Punktarnir eru síðan merktir inn í hnitakerfi og tengdir með ferli (sjá mynd). Ef b-stuðullinn í formúlu fleygbogans er núll er miðja fleygbogans á y-ásnum og hægt að teikna fleygbogann út frá gildistöflu en ef ekki þá förum við aðra leið. Stuðlarnir a, b og c ákvarða lögun fleygbogans og staðsetningu hans í hnitakerfinu eins og nú verður gerð grein fyrir.
Fleygboginn opnast upp ($\cup$ brosandi graf) og hefur botnpunkt ef a-stuðullinn er plústala en opnast niður ($\cap$ fýlugraf) og hefur topppunkt ef a-stuðullinn er neikvæður. a-stuðulinn ákvarðar einnig hvort fleygboginn er breiður eða mjór.





Fleygboginn hefur samhverfuás en það er lóðrétt lína sem skiptir grafinu í tvo helminga sem eru spegilmyndir hvors annars og er botn-eða topppunkturinn á samhverfuásnum. Á venjulegum fleygboga eru fjórir lykilpunktar (sem geta þó fallið saman og verið færri), en þetta eru skurðpunktur fleygbogans við y-ás (P_1), topppunktur (botnpunktur) fleygbogans (P_2) og skurðpunktar fleygbogans við x-ásinn (P_3 og P_4). Hnit þessara punkta ákvarðast af stuðlunum þremur a, b og c.



1. c-stuðullinn segir til um hvar fleygboginn fer í gegnum y-ás. Hnitin á punkti P_1 = (0 , c).

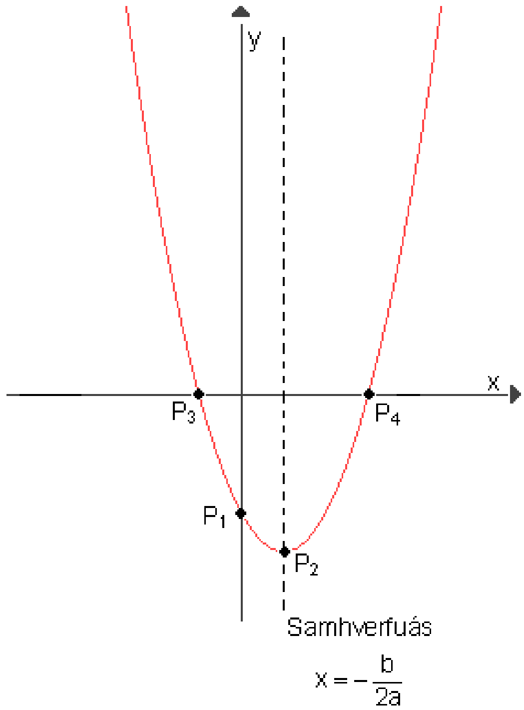
2. Formúlan $x = \frac{-b}{2a}$ gefur staðsetningu samhverfuássins og er jafnframt x-hnitið í P_2 , þ.e. x-hnit topppunktsins (botnpunktsins), svo $P_2 = \left(\frac{-b}{2a}, y\right)$.

y-hnitið í P_2 er svo reiknað með formúlu fleygbogans.

3. x-hnitin í punktum P_3 og P_4 fást með því að leysa jöfnuna $ax^2 + bx + c = 0$ en y-hnit þeirra eru 0 (allir punktar á x-ásnum hafa y-hnit 0) svo

P_3 og P_4 = $\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right)$ og $\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right)$

Séu hnit þessara fjögurra punkta reiknuð út og þeir merktir inn í hnitakerfi nægir það yfirleitt til að rissa graf fleygbogans. Ef þeir falla saman og verða færri en fjórir er hægt að bæta við fleiri punktum með því að gera gildistöflu. Þetta er alls ekki eins flókið og það virðist vera við fyrstu sýn. Lítum á dæmi.



Dæmi 8.1 Teiknaðu fleygbogann $y = x^2 - 6x + 5$ en reiknaðu fyrst út lykilpunktana fjóra og segðu til um hvernig grafið snýr.

Lausn: Skráum stuðlana: a = 1, b = – 6 og c = 5. Grafið opnast upp ($\cup$ brosandi graf) þar sem a-stuðullinn er plústala.

1. c-stuðullinn er 5 svo P_1 = (0 , 5)

2. Samhverfuásinn er $x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3$ svo P_2 = (3 , y). Finnum y-hnitið með því að setja 3 fyrir x í formúlu fleygbogans: $y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$ svo P_2 = (3 , – 4).

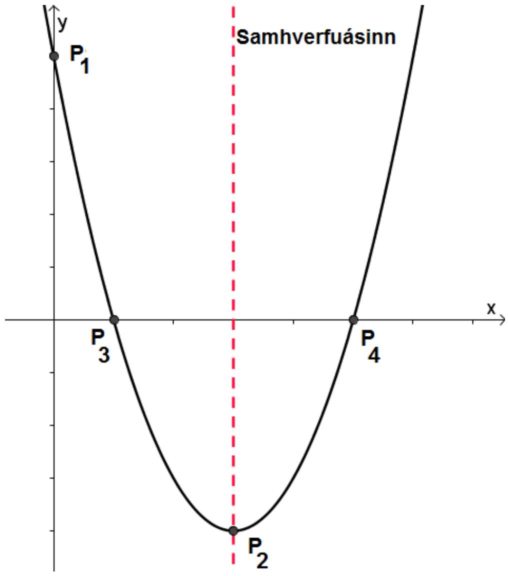
3. Reiknum loks x-hnit punktanna P_3 og P_4 með því að leysa jöfnuna $x^2 - 6x + 5 = 0$ en hana er hægt að leysa með þáttun:

$$x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5) = 0$$

svo x – 1 = 0 eða x – 5 = 0.

Lausnirnar eru 1 og 5 og þar með er P_3 = (1 , 0) og P_4 = (5, 0).

4. Við merkjum að lokum punktana fjóra inn í hnitakerfi og tengjum með ferli.



Stundum nægir að reikna út einhverja af lykilpunktunum til að leysa dæmi. Lítum aftur á dæmið um fótboltasparkið í upphafi kaflans.

Dæmi 8.2 Hversu hátt fer boltinn ?

Lausn: Til að svara spurningunni nægir að reikna út y-hnit punktsins P_2 það er topppunktsins.
Formúlan fyrir sparkinu var y = 0,75x – 0,02x^2 svo a = – 0,02 , b = 0,75 og c = 0.
Við finnum x-hnitið með formúlunni :

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0{,}75}{2\cdot(-0{,}02)} = 18{,}75$$

og síðan fæst y-hnitið með því að setja 18,75 inn í formúlu fleygbogans og þá fæst

$$y = 0{,}75\cdot 18{,}75 - 0{,}02\cdot 18{,}75^2 \approx 7{,}03\text{ m}$$

Ef reikna á hversu langt útsparkið er þarf aðeins að reikna x-hnit punktsins P_4.

Dæmi 8.3 Veiðimaður skaut kúlu í átt að fugli á flugi. Hæð byssukúlunnar y í metrum yfir jörðu x sekúndum eftir að hleypt var af er gefin með formúlunni $y = -50x^2 + 200x + 60$. Fuglinn flýgur í 270 m hæð. Er mögulegt að skotið hæfi fuglinn ?

Lausn: Við leysum dæmið með því að reikna hnit topppunktsins til að sjá hversu hátt kúlan fer. Stuðlarnir eru a = – 50, b = 200 og c = 60.
x-hnit topppunktsins er $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{2\cdot(-50)} = 2$ og þá er $y = -50\cdot 2^2 + 200\cdot 2 + 60 = 260\text{ m}$
Mesta hæð kúlunnar er 260 metra hæð svo hún getur ekki hæft fuglinn.

9. Að finna jöfnu fleygboga út frá mynd

Eins og fram kom í kafla 8 er graf formúlunnar $y = ax^2 + bx + c$ fleygbogi. Auðvelt er að teikna fleygbogann þegar búið er að reikna út hnit nokkurra lykilpunkta og merkja inn í hnitakerfi. Gagnstæða vandamálið er einnig viðráðanlegt: Finna má jöfnu fleygbogans út frá mynd hans með því að lesa hnit skurðpunkta hans við hnitaásana (P_1, P_3 og P_4) af myndinni. Athugum fyrst tengslin á milli róta annars stigs jöfnu og þátta hennar.

Dæmi 9.1 Þáttaðu $x^2 - 5x - 6$ og finndu síðan lausnir jöfnunnar $x^2 - 5x - 6 = 0$.

Lausn: Með ágiskun finnst að $x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$.

Leysum næst jöfnuna $x^2 - 5x - 6 = 0$ með því að þátta hana:

$$x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1) = 0$$

svo $x - 6 = 0$ eða $x + 1 = 0$

svo $x = 6$ eða $x = -1$

Lausnir jöfnunnar reynast vera gagnstæðar við tölurnar í svigunum.

Í dæminu hér á undan var $a = 1$. Lítum á annað dæmi þar sem $a = 3$.

Dæmi 9.2 Þáttaðu $3x^2 + 12x - 15$ og finndu síðan lausnir jöfnunnar $3x^2 + 12x - 15 = 0$.

Lausn: $3x^2 + 12x - 15 = 3(x^2 + 4x - 5) = 3(x + 5)(x - 1)$.

Leysum næst jöfnuna $3x^2 + 12x - 15 = 0$ með þáttun:

$$3x^2 + 12x - 15 = 3(x + 5)(x - 1) = 0$$

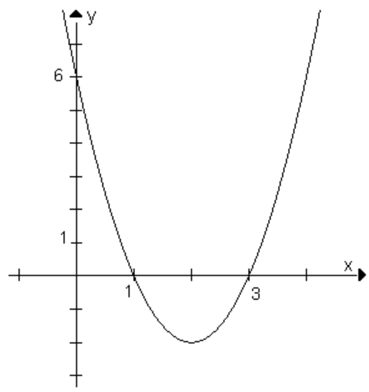
svo $x + 5 = 0$ eða $x - 1 = 0$

svo $x = -5$ eða $x = 1$

Með hliðsjón af dæmunum hér á undan fæst eftirfarandi regla:

Regla: $ax^2 + bx + c = a(x - r)(x - s)$

þar sem r og s eru lausnir jöfnunnar $ax^2 + bx + c = 0$.



Notum nú þessa niðurstöðu til að finna formúlu fleygbogans á myndinni hér til hliðar.

Við sjáum að fleygboginn sker x-ásinn í (1 , 0) og (3 , 0) svo r = 1 og s = 3. Samkvæmt reglunni hér á undan er

$$y = a(x - 1)(x - 3)$$

en eftir er að finna a - stuðulinn.

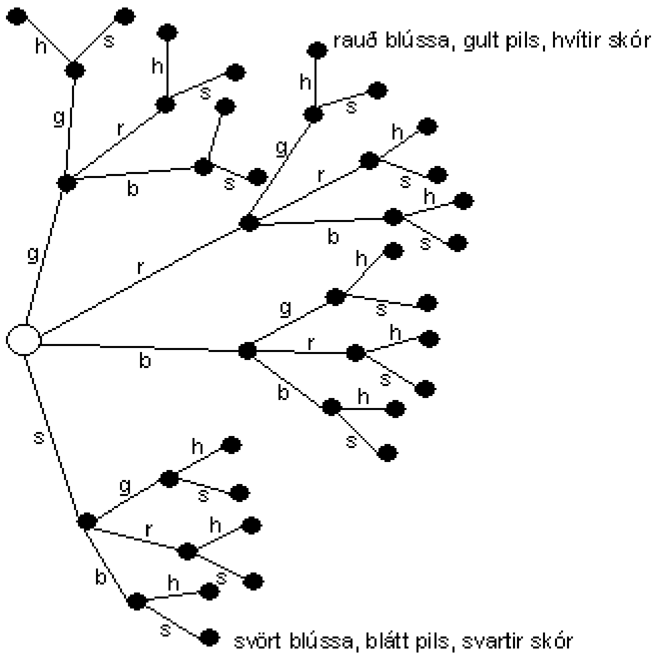
Fleygboginn sker y-ásinn í $P_1 = (0 , 6)$ svo punkturinn (0 , 6) þarf að passa inn í jöfnuna $y = a(x - 1)(x - 3)$.

Við setjum 0 í stað x og 6 í stað y og þá fæst $6 = a(-1)(-3)$ svo $6 = 3a$ svo $a = 2$.

Niðurstaðan er þá $y = 2(x - 1)(x - 3) = 2(x^2 - 4x + 3) = 2x^2 - 8x + 6$.

10. Talningarfræði

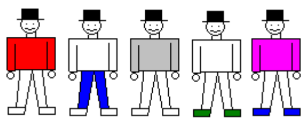
Dæmi 10.1 Jóna ætlar á ball og þarf að velja sér föt. Hún á 4 mismundi litar blússur (gula, rauða, bláa og svarta), 3 mismunandi pils (gult, rautt og blátt) og tvö pör af skóm (hvíta og svarta). Hvað getur Jóna klætt sig á marga mismunandi vegu?
Lausn: Jóna þarf að velja þrisvar sinnum. Hún þarf að velja blússu, hún þarf að velja pils og hún þarf að velja skó. Við getum gert eftirfarandi mynd, sem kallast trélínurit, af valmöguleikum Jónu. Hún hefur 4 möguleika á að velja blússu svo út úr trénu koma fjórar greinar, út úr hverri grein koma 3 aðrar greinar sem eru möguleikarnir á að velja pils og þær greinast svo hver um sig í tvær greinar sem eru möguleikarnar á að velja skóna. Endapunktur greina trésins eru mismunandi samsetningar klæðnaðar. Fjöldi þeirra er $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

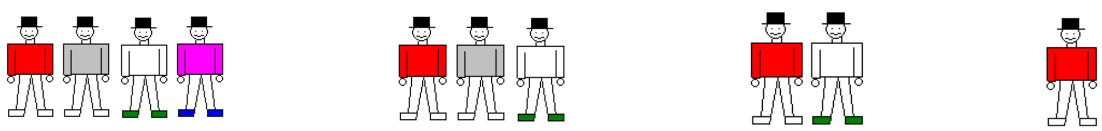


Með hliðsjón af dæminu hér á undan setjum við fram eftirfarandi reglu sem heitir margföldunarreglan:

Margföldunarreglan: Ef velja þarf oftar en einu sinni margfaldast valmöguleikarnir saman.

Dæmi 10.2 Hvað er hægt að raða 5 mönnum upp á marga ólíka vegu?
Lausn: Við byrjum á að velja mann í sæti eitt og höfum 5 möguleika á því. Þegar hann hefur verið valinn eru 4 menn eftir svo við höfum 4 möguleika á að velja mann í sæti tvö. Þá eru 3 menn eftir svo það eru 3 möguleikar á að velja mann í sæti þrjú. Þá eru 2 menn eftir svo það eru 2 möguleikar á að velja mann í fjórða sæti og loks aðeins 1 möguleiki á að velja mann í fimmta sæti. Samkvæmt margföldunarreglunni er heildarfjöldi möguleika þá $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.





Með sömu röksemdafærslu fæst að fjöldi möguleika á að raða n mönnum (eða n ólíkum hlutum) er $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$. Þessi tala, þ.e. margfeldi náttúrulegu talnanna frá 1 og upp í n, er táknuð $n!$ (lesið: n hrópmerkt). Reikniaðgerðin n! er innbyggð í flesta vasareikna.

Regla: Fjöldi möguleika á að raða n ólíkum hlutum er n!

Dæmi 10.3 Hvað eru margir möguleikar á að velja og raða 3 mönnum úr hópi 10 manna?

Lausn: Það eru 10 möguleikar á að velja mann í sæti eitt, 9 möguleikar að velja mann í sæti tvö og 8 möguleikar að velja mann í sæti þrjú og samkvæmt margföldunarreglunni er svarið $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ sem einnig má rita $\frac{10!}{7!}$.

Á hliðstæðan hátt fæst að möguleikarnir á að velja og raða r mönnum úr hópi n manna er $\frac{n!}{(n-r)!}$ (gert er ráð fyrir að $r \leq n$). Þessi formúla er innbyggð í flesta vasareikna og er táknuð með ${}_nP_r$.

Regla. Fjöldi möguleika á að velja og raða r hlutum af n ólíkum hlutum er ${}_nP_r \left(= \frac{n!}{(n-r)!}\right)$.

Dæmi 10.4 Hvað er hægt að búa til margar fjögurra stafa tölur úr tölustöfunum 1, 2, 3, 4, 5, 6 ef aðeins má nota hvern tölustaf einu sinni?

Lausn: Velja á 4 tölustafi af 6 og raða svo svarið er ${}_6P_4 = 360$. Einnig hefði verið hægt að finna svarið með margföldunarreglunni og þá fæst $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.
Oft skiptir röð ekki máli þegar valið er. Það á til dæmis við velja á tölur í lottó og þegar gefið er á hendi í bridds og póker.

Dæmi 10.5 Hvað eru margir möguleikar á að velja 3 nemendur í skemmtinefnd ef 20 nemendur eru í bekknum? Svarið við spurningunni sem er táknað $\binom{20}{3}$ er hægt að reikna beint á vasareikni með takkanum ${}_nC_r$ og er ${}_{20}C_3 = 1140$.

Við getum fengið svarið á eftirfarandi hátt. Fyrst veljum við 3 af tuttugu og röðum og þá eru möguleikarnir ${}_{20}P_3$ en þá er hver þriggja manna nefnd talin upp 6 sinnum því hægt er að raða hverrri þriggja manna nefnd upp á 3! = 6 vegu. Svarið við spurningunni er því $\frac{{}_{20}P_3}{3!} = \frac{6840}{6} = 1140$.
Með hliðsjón af dæminu hér á undan fæst eftirfarandi reglu:

Regla: Fjöldi möguleika á að velja r hluti af n ólíkum hlutum er ${}_nC_r \left(= \frac{{}_nP_r}{r!}\right)$ og er táknað $\binom{n}{r}$.

Dæmi 10.6 Hvað eru margir möguleikar á að velja 5 spil úr spilastokki?

Lausn: Það eru 52 spil í spilastokki svo velja á 5 hluti af 52. Svarið er því

$\binom{52}{5} = {}_{52}C_5 = 2\,598\,960$.

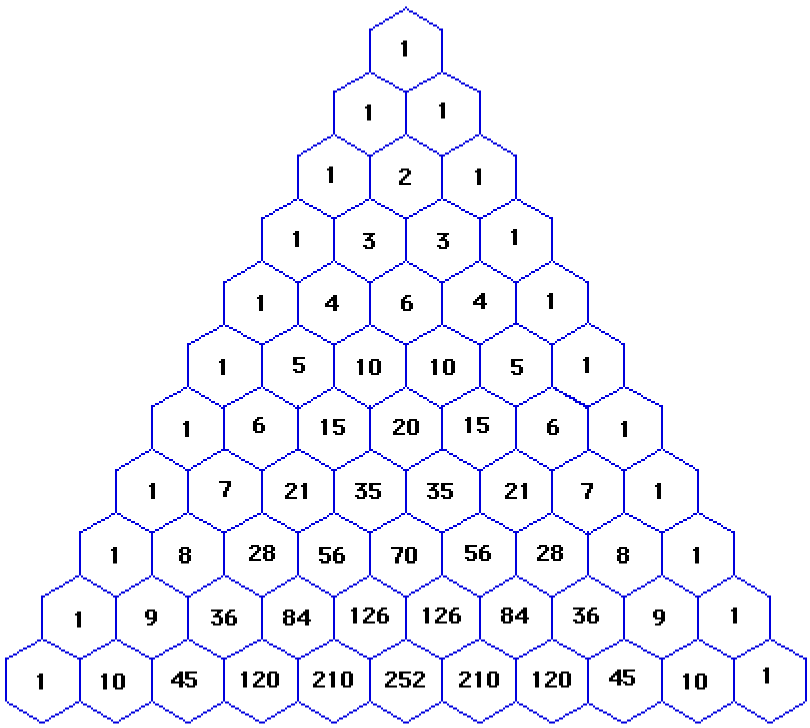
Dæmi 10.7 Hvað eru margir möguleikar á að velja 3 konur og 2 karla í nefnd ef úr 10 konum og 8 körlum er að velja?

Lausn: Möguleikarnir á að velja konurnar eru $\binom{10}{3} = {}_{10}C_3 = 120$.

Möguleikarnir á að velja karlana eru $\binom{8}{2} = {}_{8}C_2 = 28$ og þar sem velja þarf tvisvar (velja konur og velja karla) margfaldast möguleikarnir saman samkvæmt margföldunarreglunni og er ${}_{10}C_3 \cdot {}_{8}C_2 = 120 \cdot 28 = 3360$.

11. Pascal þríhyrningurinn

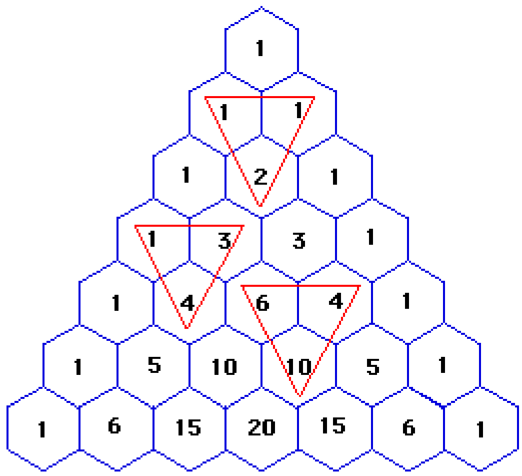
Reglurnar $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ og $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ kallast ferningsreglur og flýta fyrir útreikningum ef hefja á sviga í annað veldi. En eru til hliðstæðar reglur til að hefja sviga í þriðja, fjórða eða hærra veldi? Svarið við spurningunni er já og þá kemur við sögu þríhyrningur sem heitir Pascal þríhyrningurinn í höfuðið á franska stærðfræðingnum og heimspekingnum Blaise Pascal (1623-1662). Kínverjar (og eflaust fleiri) munu þó hafa þekkt þennan þríhyrning löngu áður en Pascal fæddist.
Svona lítur Pascal þríhyrningurinn út



Og þannig áfram endalaust.

Í Pascal þríhyrningnum má finna fjölmörg mynstur. Til dæmis er sérhver tala inni í þríhyrningnum summan af tölunum tveimur sem eru næst fyrir ofan.

Með því að notfæra sér þetta mynstur ásamt því að sérhver lína byrjar og endar á 1 má bæta við nýjum línum endalaust. Talan 1 myndar topp þríhyrningsins en línurnar þar fyrir neðan eru númeraðar þannig að fyrsta lína neðan við toppinn er númer 1 og svo framvegis.
Önnur regla er sú að summa talnanna í sérhverri línu er veldi af 2. Reyndu að finna fleiri mynstur.



Nú skulum við sjá hvernig hægt er að nota Pascal þríhyrninginn til að reikna $(a+b)^n$ þar sem n er heil tala frá og með 0.

$(a + b)^0 = \mathbf{1}$

$(a + b)^1 = \mathbf{1}a + \mathbf{1}b$

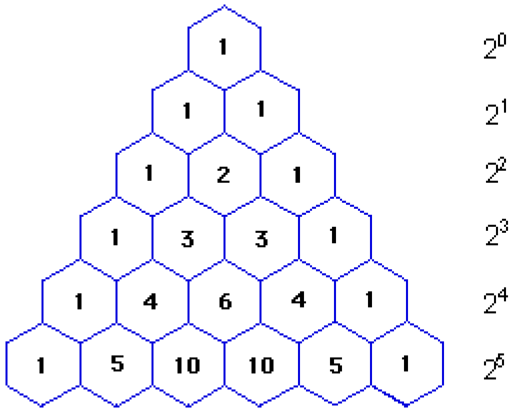
$(a + b)^2 = \mathbf{1}a^2 + \mathbf{2}ab + \mathbf{1}b^2$

$(a + b)^3 = \mathbf{1}a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + \mathbf{1}b^3$

$(a + b)^4 = \mathbf{1}a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + \mathbf{1}b^4$

$(a + b)^5 = \mathbf{1}a^5 + \mathbf{5}a^4b + \mathbf{10}a^3b^2 + \mathbf{10}a^2b^3 + \mathbf{5}ab^4 + \mathbf{1}b^5$

o.s.frv.



Við sjáum á niðurstöðunum hér á undan að ef reiknað er upp úr sviganum $(a + b)^n$ er sérhver liður í útkomunni margfeldi af veldi a og b þar sem veldisvísirinn á a fer lækkandi en veldisvísirinn á b hækkandi, summa veldisvísanna á a og b er jöfn veldi svigans (þ.e. n) og síðan eru tölurnar í línu n í Pascal þríhyrningnum stuðlar.

Dæmi 11.1 Notaðu Pascal þríhyrninginn til að reikna $(x + y)^3$.

Lausn: Við setjum a = x og b = y og notum tölurnar í línu 3 sem stuðla:
$(x + y)^3 = \mathbf{1}(x)^3 + \mathbf{3}(x)^2(y)^1 + \mathbf{3}(x)^1(y)^2 + \mathbf{1}(y)^3 = x^3 + \mathbf{3}x^2y + \mathbf{3}xy^2 + y^3$

Dæmi 11.2 Notaðu Pascal þríhyrninginn til að reikna $(2x + 3y)^4$.

Lausn: Við setjum a = (2x) og b = (3y) og notum tölurnar í línu 4 sem stuðla:
$(2x + 3y)^4 = \mathbf{1}(2x)^4 + \mathbf{4}(2x)^3(3y) + \mathbf{6}(2x)^2(3y)^2 + \mathbf{4}(2x)(3y)^3 + \mathbf{1}(3y)^4$
Nú þarf að reikna hvern lið fyrir sig og þá fæst lokaniðurstaðan sem er
$(2x + 3y)^4 = 16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4$
Við getum líka notað Pascal þríhyrninginn til að reikna $(a – b)^n$ með því að nota umritunina

$$(a - b)^n = (a + (-b))^n$$

þ.e. (–b) er sett inn í stað b. Þá haldast liðirnir þar sem b er í sléttu veldi óbreyttir en liðirnir þar sem b er í oddaveldi verða mínusliðir.

Dæmi 11.3 Notaðu Pascal þríhyrninginn til að reikna $(a – b)^5$.

Lausn: $(a - b)^5 = 1a^5 + 5a^4(-b) + 10a^3(-b)^2 + 10a^2(-b)^3 + 5a(-b)^4 + 1(-b)^5$
$= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$

12. Brot sem veldisvísar - rætur

Við byrjum þennan kafla á að rifja upp skilgreininguna á veldi, þar sem veldisvísarnir eru heilar tölur, ásamt nokkrum veldareglum.
Ef n er náttúrleg tala þá er

$$\underbrace{a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ þættir}} \quad , \quad a^0 = 1 \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Veldareglur:

V 1 $\quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

V 2 $\quad \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, ef $a \neq 0$.

V 3 $\quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$.

Á venjulegum vasareikni er til dæmis veldatakki og með honum er hægt að reikna veldi þar sem veldisvísarnir eru almenn brot eða tugabrot. En hver er merking veldis þegar veldisvísirinn er brot eins og til dæmis ½ ? Veldareglurnar gilda fyrir öll veldi og með hjálp þeirra getum við skilið veldi þar sem veldisvísar eru brot.

Dæmi 12.1 Reiknaðu $25^{\frac{1}{2}}$ á vasareikni og útskýrðu niðurstöðuna.

Lausn: Ef $25^{\frac{1}{2}}$ er reiknað með veldatakkanum á vasareikninum fæst útkoman 5. Reynum að útskýra niðurstöðuna.

Ef talan $25^{\frac{1}{2}}$ er sett í annað veldi og dæmið reiknað með **V 3** er útkoman 25:

$$\left(25^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 25^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 25^1 = 25$$

svo talan $25^{\frac{1}{2}}$ (sem er jákvæð) hefur þann eiginleika að sé hún sett í annað veldi þá fæst út talan 25 en það er nákvæmlega sá eiginleiki sem $\sqrt{25}$ hefur svo niðurstaðan er að $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25}$.

Á sama hátt sést að um allar jákvæðar tölur a og einnig töluna 0 gildir að

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \; .$$

Lítum á fleiri dæmi. Ef talan $64^{\frac{1}{3}}$ er sett í þriðja veldi fæst út 64:

$$\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 64^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 64^1 = 64$$

svo talan $64^{\frac{1}{3}}$ hefur nákvæmlega sama eiginleiki og $\sqrt[3]{64}$ ($\sqrt[3]{64}$ er tala sem í þriðja veldi er 64) svo $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64}$. Sama gildir fyrir allar tölur a:

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

Og þannig heldur þetta áfram $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$ er tala sem í 4. veldi er a, $a^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a}$ er tala sem í 5. veldi er a og almennt gildir um allar tölur a þar sem $a \geq 0$ að

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{er tala sem í n-ta veldi er a.}$$

$\sqrt[n]{a}$ er lesið n-ta rót af a. Talan n er kölluð rótarvísir en a rótarstofn. Þegar n = 2 er venja að sleppa rótarvísinum og kalla rótina ferningsrót (eða kvaðratrót) sem er þá sama og önnur rót. Þriðja rót er líka kölluð teningsrót.
Þegar þú reiknar veldi á vasareikni þar sem veldisvísirinn er almennt brot skaltu setja sviga utan um veldisvísinn.

Dæmi 12.2 Reiknaðu $8^{\frac{4}{3}}$ á vasareikni og útskýrðu niðurstöðuna.

Lausn: Ef $8^{\frac{4}{3}}$ er reiknaðu með veldatakkanum á vasareikninum fæst útkoman 16. Reynum að útskýra niðurstöðuna. Við getum einnig reiknað dæmið með veldareglunum:

$$8^{\frac{4}{3}} = \left((8)^{\frac{1}{3}}\right)^4 = \left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 2^4 = 16$$

Þar með sést að þegar talan 8 er sett í veldið $\frac{4}{3}$ þá dregur nefnari veldisvísisins þriðju rót af 8 og teljari veldisvísisins setur rótina í 4. veldi. Á hliðstæðan hátt má skilja töluna $a^{\frac{m}{n}}$. Nefnari veldisvísisins dregur n-tu rót af tölunni a og teljari veldisvísisins setur svo rótina í veldið m það er að segja $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

Dæmi 12.3 Í gerlaræktun fjölgar gerlunum um ákveðna prósentutölu á klukkustund. Í upphafi eru gerlarnir 50 en 10 klukkustundum síðar eru þeir 17 500. Hver er prósentubreytingin á klukkustund?

Lausn: Köllum breytiþátt prósentubreytingarinnar x. Á hverri klukkustund margfaldast upphaflegur fjöldi gerlanna með x svo

$$50 \cdot x^{10} = 17500$$

$$\text{svo} \quad x^{10} = \frac{17500}{50} = 350 \qquad \text{(deilum með } x^{10}\text{-stuðli)}$$

$$\text{svo} \quad x = \sqrt[10]{350} \approx 1{,}796 \qquad \text{(drögum tíundu rót (á vasareikni))}$$

Þar sem breytiþátturinn er 1,796 er prósentubreytingin 79,6%.

13. Vísisvöxtur, vísisföll og lograr

Dæmi 13.1 Jón og Gunna fá hvort um sig 200 000 krónur í mánaðarlaun. Jóni er boðin 10 000 króna launahækkun á ári en Gunnu 5% launahækkun á ári. Reiknaðu mánaðarlaun þeirra eftir 1 ár, 2 ár, 10 ár og x-ár.

Lausn: Laun Jóns eftir 1 ár eru 210 000 krónur, eftir 2 ár 220 000 krónur, eftir 10 ár eru þau 300 000 krónur og eftir x ár eru þau 200 000 + 10 000x. Hækkunin á launum Jóns kallast línulegur vöxtur.
Reiknum næst laun Gunnu. Breytiþátturinn sem leiðir af 5% hækkun er 1,05. Í hvert sinn sem laun Gunnu hækka um 5% margfaldast þau með 1,05 svo laun hennar eftir 1 ár eru $200\,000 \cdot 1{,}05 = 210\,000\ \text{kr}$, eftir 2 ár $200\,000 \cdot 1{,}05^2 = 220\,500\ \text{kr}$, eftir 10 ár $200\,000 \cdot 1{,}05^{10} = 325\,778\ \text{kr}$ og eftir x ár $200\,000 \cdot 1{,}05^x\ \text{kr}$.
Breytingin á launum Gunnu kallast vísisvöxtur og fallið f(x) = $1{,}05^x$ vísisfall.

Dæmi 13.2 Fólki í bæ einum fækkar um 3% á ári. Nú búa 18 000 manns í bænum. Hvað verða þeir margir eftir 1 ár, 10 ár, x ár ?

Lausn: Breytiþátturinn er 0,97 svo fjöldinn eftir 1 ár er $18\,000 \cdot 0{,}97 = 17\,460$, eftir 2 ár $18\,000 \cdot 0{,}97^2 = 16\,936$ og eftir x ár er íbúafjöldinn $18\,000 \cdot 0{,}97^x$.
Dæmin hér á undan leiða til eftirfarandi skilgreiningar:
Formúlan $f(x) = C \cdot a^x$ þar sem a er jákvæð tala kallast vísisvöxtur og lýsir jafnri prósentubreytingu, prósentuhækkun ef a > 1 en prósentulækkun ef a < 1. (Ef a = 1 á engin breyting sér stað). Talan a í formúlunni er breytiþátturinn sem leiðir af prósentubreytingunni. Fallið f(x) = a^x, a > 0 kallast vísisfall.

Dæmi 13.3 Halldór leggur 50 000 krónur inn í banka sem greiðir 6% ársvexti. Eftir hve mörg ár verður upphæðin orðin tvöfalt hærri?

Lausn: Breytiþátturinn sem leiðir af 6% hækkun er 1,06 svo formúlan fyrir upphæðinni eftir x ár er $f(x) = 50000 \cdot 1{,}06^x$.
Til að svara spurningunni þarf að leysa jöfnuna

$$50000 \cdot 1{,}06^x = 100\,000.$$

Fyrst deilum við með 50 000 í báðar hliðar og fáum

$$1{,}06^x = 2.$$

Þessi jafna kallast vísisjafna. Með því að þreifa sig áfram á vasareikni má finna að svarið er u.þ.b. 12 ár en til að þú áttir þig á hvernig leysa á vísisjöfnu þarftu að læra svolítið um tíulogrann.

Tíulogrinn

Vísisfallið 10^x er að finna á venjulegum vasareikni. Á sama stað er einnig að finna tíulogrann. Á flestum vasareiknum heitir tíulogrinn **log.**

x	y
-3	0,001
-1	0,1
$-0,5$	0,316
0	1
0,3	1,995
1	10
2,477	299,9
3	1000
4	10000

Fallið f(x) = 10^x setur töluna 10 í veldi. Hér til hliðar er gildistafla með nokkrum fallgildum sem eru reiknuð á vasareikni.Tölurnar í y-dálknum (fallgildin) fást með því að reikna 10^x þar sem x er talan í x-dálknum. Útkoman getur verið hvaða jákvæða tala sem til er en af því leiðir að sérhverja jákvæða tölu er hægt að rita sem veldi af 10. Veldisvísirinn kallast tíulogri útkomunnar (tölurnar í x-dálknum eru kallaðar tíulograr talnanna í y-dálknum). Á formlegri hátt lítur þetta svona út:

Um allar jákvæðar tölur x gildir að $x = 10^{\log(x)}$.

Dæmi 13.4 Ritaðu töluna 5 sem veldi af 10.

Lausn: Finnum tíulogra tölunnar 5 á vasareikni:

$$\log(5) \approx 0{,}699$$

svo $5 = 10^{\log(5)} \approx 10^{0{,}699}$.

Dæmi 13.5 Leystu jöfnuna $10^x = 17{,}78$.

Lausn: Veldisvísirinn er tíulogri útkomunnar svo $x = \log(17{,}78) \approx 1{,}25$.

Dæmi 13.6 Leystu jöfnuna log(x) = 1,78

Lausn: Notum að $x = 10^{\log(x)} = 10^{1{,}78} \approx 60{,}26$.

Um logra gilda reglur sem kallast lograreglur. Lítum á dæmi.

Dæmi 13.7 Reiknaðu log(2), log(4), log(8) og log(16) á vasareikni. Reyndu að finna samband á milli útkomanna. Hafðu fjóra aukastafi í svörunum.

Lausn: $\log(2) \approx 0{,}3010$, $\log(4) \approx 0{,}6020$, $\log(8) \approx 0{,}9030$, $\log(16) \approx 1{,}2040$. Sé nánar að gáð sést að log(4), log(8) og log(16) eru allar margfeldi af log(2) en jafnframt eru tölurnar 4, 8 og 16 veldi af 2. Það gildir sem sé að

$\log(4) = \log(2^2) = 2\log(2)$, $\log(8) = \log(2^3) = 3\log(2)$ og $\log(16) = \log(2^4) = 4\log(2)$. Þessi niðurstaða er afleiðing af eftirfarandi lograreglu:

Lograregla: $\log(a^x) = x \cdot \log(a)$, $a > 0$.

Nú búum við yfir þekkingu til að leysa vísisjöfnur.

Dæmi 13.8 Leystu vísisjöfnuna $1{,}06^x = 2$.

Lausn: $1{,}06^x = 2$

þá er $\log\left(1{,}06^x\right) = \log(2)$ (við finnum logra beggja stærðanna)

þá er $x \cdot \log(1{,}06) = \log(2)$ (samkvæmt lograreglunni)

svo $x = \dfrac{\log(2)}{\log(1{,}06)} \approx \dfrac{0{,}3010}{0{,}0253} \approx 11{,}9$ ár (deilum með x-stuðli og reiknum á vasareikni.)

Á sama hátt er hægt að leysa almennt vísisjöfnuna $a^x = b$ þar sem a og b eru jákvæðar tölur: $a^x = b$

þá er $\log\left(a^x\right) = \log(b)$ (við finnum logra beggja stærðanna) þá er $x \cdot \log(a) = \log(b)$ (samkvæmt lograreglunni)

svo $x = \dfrac{\log(b)}{\log(a)}$ (deilt með x-stuðli.)

Regla: Ef a og b eru jákvæðar tölur þá hefur jafnan $a^x = b$ lausnina $x = \dfrac{\log(b)}{\log(a)}$.

14. Jöfnur og ójöfnur leystar á grafi

Ef gröf tveggja (eða fleiri) falla eru teiknuð inn í sama hnitakerfi er hægt að lesa af myndinni hvar föllin gefa sömu útkomur eða hvar annað fallið gefur stærri eða minni útkomu en hitt fallið. Svarið getur þó orðið nokkuð ónákvæmt. Föllin f(x) og g(x) eru jöfn þar sem gröf fallanna skerast. Ef annað fallið gefur stærri útkomu en hitt fallið t.d. f(x) > g(x) þá eru y-hnit punktanna á grafi fallsins f(x) stærri en y-hnitin á grafi fallsins g(x) og þá liggur graf fallsins f(x) yfir grafi fallsins g(x). Á tilsvarandi hátt liggur graf fallsins f(x) undir grafi g(x) ef f(x) < g(x).

i) Lausn jöfnunnar f(x) = g(x) er x-hnit skurðpunkta grafanna.

ii) Lausnin á ójöfnunni f(x) > g(x) er það bil á x-ási þar sem graf f(x) liggur yfir grafi g(x). Ef ójafnan er $f(x) \geq g(x)$ er x-ið í skurðpunkti (skurðpunktum) grafanna með í svarinu og bilið er lokað í þann enda.

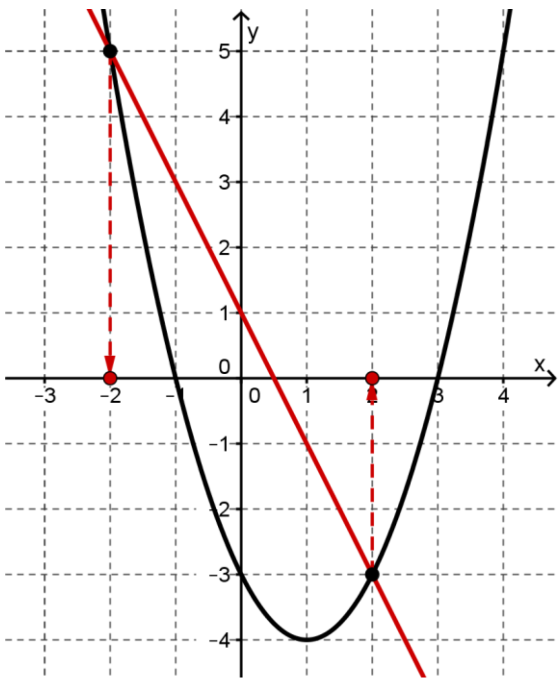
iii) Lausnin á ójöfnunni f(x) < g(x) er það bil á x-ási þar sem graf f(x) liggur undir grafi g(x). Ef ójafnan er $f(x) \leq (x)$ er x-ið í skurðpunkti grafanna með í svarinu og bilið er lokað í þann enda.

Ekki er ráðlegt að nota þessa aðferð nema búið sé að teikna upp gröf fallanna.

Dæmi 14.1 Á meðfylgjandi mynd sést fleygboginn $f(x) = x^2 - 2x - 3$ og línan g(x) = – 2x + 1. Notaðu myndina til að leysa

i) jöfnuna $x^2 - 2x - 3 = -2x + 1$

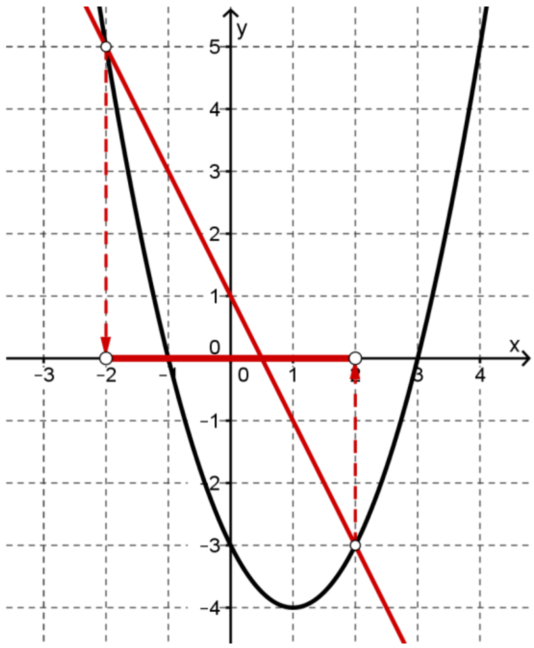
ii) ójöfnuna $x^2 - 2x - 3 < -2x + 1$.



Lausn:

i) x-hnit skurðpunktanna eru x = – 2 og x = 2.
svo lausnamengið er $\{-2, 2\}$.

ii) Fleygboginn liggur undir línunni á milli skurðpunktanna. Bilið á x-ási sem samsvarar þeim hluta fleygbogans er opna bilið $]-2\ ,\ 2[$.



15. Mismunarunur og raðir

Hér í rammanum eru nokkur dæmi um talnarunur:

Þetta er myndaruna!

1, 2, 3, 4, 5, ...
2, 4, 6, 8, 10
1, 4, 9, 16, 25, ...
7, 3, 5, −8, 17, 11
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Tölur sem ritaðar eru hver á eftir annarri með kommu á milli mynda talnarunu. Tölurnar kallast **liðir** rununnar og hver tala á sér númerað sæti í rununni. Í rununni geta verið endanlega margir liðir eða óendanlega margir liðir. Liðirnir í rununni geta fylgt ákveðnu kerfi eða engu sérstöku kerfi. Venja er að tákna liði runu með $\mathbf{a_n}$ (eða b_n, c_n, ..) þar sem n er númer sætis sem liðurinn skipar í rununni. Þannig er fyrsta talan í runu táknuð með a_1, önnur talan með a_2 og svo framvegis.
Í sumum talnarunum er hægt að finna formúlu til að reikna liði runu út frá sætisnúmeri þeirra. Lítum á dæmi:

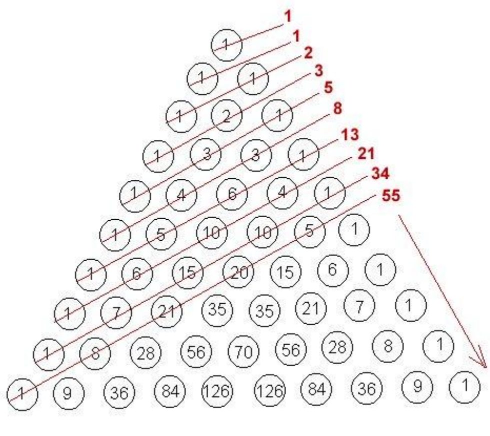
Í rununni 1, 2, 3, 4, 5, ... er sérhver liður jafnframt númerið á sætinu sem hann skipar þ.e. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ og almennt gildir að $a_n = n$.

Í rununni 2, 4, 6, 8, 10 er sérhver liður jafn tvöföldu númeri sætis sem hann skipar. Þannig er fyrsti liðurinn $a_1 = 2 = 2\cdot 1$, annar liðurinn er $a_2 = 4 = 2\cdot 2$, þriðji liðurinn er $a_3 = 6 = 2\cdot 3$ o.s. frv.

Í rununni 1, 4, 9, 16, 25, ... er sérhver liður númerið á sætinu sem hann skipar í öðru veldi. Þannig er fyrsti liðurinn $a_1 = 1 = 1^2$, annar liðurinn er $a_2 = 4 = 2^2$, þriðji liðurinn er $a_3 = 9 = 3^2$, fjórði liðurinn er $a_4 = 16 = 4^2$, ... almennt er n-ti liðurinn er $a_n = n^2$.

Í rununni 7, 3, 5, −8, 17, 11 er ekkert samband á milli liðanna og númer sætisins sem þeir skipa.

Runan 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... er hin fræga Fibonacci-runa sem m.a. kemur við sögu í spennusögunni Da Vinci lykillinn. Frá og með þriðja lið fæst sérhver liður með því að leggja saman tvo næstu liði á undan. Hún kemur einnig fram í Pascal þríhyrningnum með því að leggja saman skáhallt eins og sýnt er á myndinni hér til hliðar.



Í fyrstu þremur dæmunum hér á undan var auðvelt að finna formúlu sem tengir n-ta lið rununnar, a_n, við númer sætisins sem hann skipar. Við munum aðeins beina sjónum okkar að slíkum runum.

Dæmi 15.1 Reiknaðu fimm fyrstu liði rununnar sem gefin er með formúlunni $a_n = 2n+3$, $n \in N$.

Lausn: Setjum tölurnar 1, 2, 3, 4 og 5 í stað n og reiknum: $a_1 = 2\cdot 1+3 = 5$, $a_2 = 2\cdot 2+3 = 7$, $a_3 = 2\cdot 3+3 = 9$, $a_4 = 2\cdot 4+3 = 11$ og $a_5 = 2\cdot 5+3 = 13$.

Mismunarunur

Runurnar 1,2,3,4, ... , 2, 4, 6, 8,10, ... , og 4,7,10,13,16, ... hafa allar þann eiginleika að alltaf fæst sama útkoma ef einhver liður í rununni er dreginn frá liðnum sem kemur næst á eftir. Þannig gildir um fyrstu rununa að

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ ... \ = a_{n+1} - a_n = ... = 1.$$

Fyrir rununa 2, 4, 6, 8, 10, ... er þessi mismunur 2 og fyrir rununa 4, 7, 10, 13, 16 er hann 3. Einnig mætti orða þennan eiginleika að það sé alls staðar jafnt bil á milli samliggjandi liða. Runur með þessi einkenni kallast **mismunarunur** (eða jafnmunarunur). Mismunurinn á milli liðanna verður framvegis táknaður með **d**.

Auðvelt er að finna samband á milli sérhverra tveggja liða í mismunarunu. Lítum á dæmi:

Dæmi 15.2 Í mismunarunu er annar liðurinn a_2 = 8 og mismunurinn á milli liðanna er 5. Reiknaðu a_{12}.

Lausn: Á milli annars og tólfta liðar eru 10 bil (sjá mynd)

$$a_2 \overset{d}{\frown} a_3 \overset{d}{\frown} a_4 \overset{d}{\frown} a_5 \overset{d}{\frown} a_6 \overset{d}{\frown} a_7 \overset{d}{\frown} a_8 \overset{d}{\frown} a_9 \overset{d}{\frown} a_{10} \overset{d}{\frown} a_{11} \overset{d}{\frown} a_{12}$$

og hvert bil er d að lengd svo $a_{12} - a_2 = 10d$. Setjum inn þekktar stærðir og þá fæst að $a_{12} - 8 = 10\cdot 5$ svo $a_{12} = 8+50 = 58$.

Dæmi 15.3 Í mismunarunu er fjórði liðurinn a_4 = 10 og tíundi liðurinn a_{10} = − 2. Reiknað a_1 og finndu formúlu fyrir rununni.

Lausn: Við byrjum á að finna mismuninn d. Á milli a_4 og a_{10} eru 6 bil (sjá mynd)

svo $a_{10} - a_4 = 6d$.

$$a_4 \overset{d}{\frown} a_5 \overset{d}{\frown} a_6 \overset{d}{\frown} a_7 \overset{d}{\frown} a_8 \overset{d}{\frown} a_9 \overset{d}{\frown} a_{10}$$

Setjum inn þekktar stærðir og fáum að $-2-10 = 6d$ svo d = − 2.
Reiknum næst fyrsta liðinn a_1.
Á milli a_1 og a_4 eru þrjú bil (sjá mynd)
svo $a_4 - a_1 = 3d$.

$$a_1 \overset{d}{\frown} a_2 \overset{d}{\frown} a_3 \overset{d}{\frown} a_4$$

Setjum inn þekktar stærðir og fáum að
$10 - a_1 = 3\cdot(-2)$ og þá er $10+6 = a_1$ svo a_1 = 16.

Á milli a_1 og a_n eru (n−1) bili svo $a_n - a_1 = (n-1)d$. Setjum inn þekktar stærðir og fáum að $a_n - 16 = (n-1)\cdot(-2)$ svo $a_n - 16 = -2n + 2$ svo $a_n = -2n + 18$.
Með því að beita sömu röksemdafærslu og í dæmunum hér á undan má fá fram eftirfarandi reglu sem gildir fyrir allar mismunarunur:

Regla 15.1
Ef a_n og a_k eru einhverjir tveir liðir í mismunarunu þar sem bilið á milli liðanna (þ.e. mismunurinn) er talan d þá gildir að

$$\boxed{a_n - a_k = (n-k)\cdot d}$$

Sér í lagi gildir að ef k = 1 þá fæst að

$$a_n - a_1 = (n-1)\cdot d \quad \text{eða } a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

Dæmi 15.4 Í mismunarunu er a_1 = 8 og d = 6. Finndu n ef gefið er að a_n = 134.

Lausn: Það eru (n – 1) bil á milli a_1 og a_n svo $a_n - a_1 = (n-1)d$. Setjum inn þekkt gildi og fáum að $134 - 8 = (n-1)\cdot 6$ svo $126 = (n-1)\cdot 6$ svo $21 = (n-1)$ svo $n = 22$.

Mismunaraðir

Ef lagðir eru saman liðir runu kemur fram stæðan $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ sem er kölluð **röð** og verður hún táknuð með $\mathbf{s_n}$ ef n er liðafjöldinn í summunni. Þannig merkir til dæmis
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ og
$s_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}$ og
$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots. + a_n$
og $s_1 = a_1$.
Ef runan er mismunaruna kallast stæðan $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ mismunaröð.
Hægt er að finna einfalda leið til að reikna summu mismunaraðar. Lítum á dæmi.

Dæmi 15.5 Reiknaðu 1 + 2 + 3 +.... + 50

Lausn: Tölurnar sem á að leggja saman 1, 2, 3, 4, ... , 50 eru liðir í mismunarunu með d = 1. Í stað þess að leggja þær saman í réttri röð styttum við okkur leið.
Köllum útkomuna úr samlagningunni S.
Svo S = 1 + 2 + 3 + ... + 48 + 49 + 50.
Skrifum nú stæðuna upp aftur en höfum liðina í öfugri röð og leggjum saman tölurnar í hægri hlið tvær og tvær eins og sést hér fyrir neðan og þá fæst allaf útkomuna 51 alls 50 sinnum.

$$\begin{array}{l} S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 48 + 49 + 50 \\ S = 50 + 49 + 48 + \cdots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S = 51 + 51 + 51 + \ldots + 51 + 51 + 51 \end{array}$$

Svo niðurstaðan er: $2S = 50\cdot 51$ og þá er $S = \dfrac{50\cdot 51}{2} = 1275$.

Ástæðan fyrir því að ávallt fæst sama útkoma (hér 51) er sú að lækkunin sem verður á liðunum þegar þeir eru ritaðir í öfugri röð vegur upp hækkunina sem verður á liðunum þegar þeir eru ritaðir í réttri röð og því fæst allaf sama summan. Tökum eftir að talan 51 er summan á fyrsta lið og síðasta lið.

Útkomuna má einnig rita $S = \dfrac{(1+50)}{2} \cdot 50 = 1275$ og túlka sem meðaltalið af fyrsta og síðasta lið margfaldað með fjölda liðanna.

Með sömu röksemdafærslu má fá fram eftirfarandi almenna reglu:

Regla 15.2
Ef a_1, a_2, a_3, ... er mismunaruna þá er

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

Í orðum hljóðar reglan svona: Summa n fyrstu liða mismunarunu er meðaltalið af fyrsta og síðasta lið margfaldað með fjöldi liðanna.

Dæmi 15.6 Reiknum summu 10 fyrstu liða í mismunarunu þar sem $a_1 = 8$ og $d = 4$.

Lausn: Byrjum á að reikna tíunda liðinn a_{10}. Höfum að $a_{10} = a_1 + 9d$ svo $a_{10} = 8 + 9 \cdot 4 = 44$ og þá er summan $s_{10} = \dfrac{(8+44)}{2} \cdot 10 = 260$

Dæmi 15.7 Reiknaðu summu mismunaraðarinnar $-1 + 2 + 5 + ... + 149$

Lausn: Fyrst þarf að finna liðafjöldan, þ.e. töluna n . Við vitum að $a_1 = -1$ og sjáum að d = 3. Auk þess vitum við að $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$. Setjum inn þekkt gildi og fáum að $149 = -1 + (n-1) \cdot 3$ svo $(n-1) \cdot 3 = 150$ svo $(n-1) = 50$ svo $n = 51$.

Þá fæst að $-1 + 2 + 5 + ... + 149 = s_{50} = \dfrac{(-1+149)}{2} \cdot 51 = 3774$.

Dæmi 15.8 Finndu summu allra þriggja stafa talna sem 6 gengur upp í.

Lausn: Lægsta þriggja stafa talan sem 6 gengur upp í er 102 og sú hæsta er 996 (finnst með prófun).
Þessar tölur mynda mismunarunu með mismuninn 6 svo $a_1 = 102$, $d = 6$ og $a_n = 996$. Fjöldi talnanna finnst á sama hátt og í dæminu hér á undan það er $996 = 102 + (n-1) \cdot 6$ svo n = 150 svo summan er $s_{150} = \dfrac{(102+996)}{2} \cdot 150 = 82\,350$.

Lítum að lokum á dæmi úr hversdagslífinu.

Dæmi 15.9 Jóna kaupir tölvu á 150 000 krónur. Hún semur um að greiða upphæðina með 12 jöfnum afborgunum. Vextir og afborganir greiðast einu sinni í mánuði og er fyrsta greiðsla mánuði eftir kaupin. Vextir greiðast eftir á og eru mánaðarvextirnir 1%.
Reiknaðu fyrstu, aðra og þriðju greiðslu af láninu og hversu mikið er greitt í vexti alls af láninu.

Lausn: Fyrsta greiðsla samanstendur af afborgun sem er $\dfrac{150000}{12} = 12500$ kr og vöxtum sem eru $150\,000 \cdot 0{,}01 = 1\,500$ kr. Samtals er því fyrsta greiðslan $12500 + 1500 = 14000$ kr.

Reiknum næsta aðra greiðslu:
Afborgun er 12 500 kr. Eftirstöðvar af láninu eftir fyrstu greiðslu eru 137 500 krónur og af þeim eru borgaðir 1% vextir sem eru 1375 kr. Svo önnur greiðsla er 13 875 kr.
Reiknum næst þriðju greiðslu.
Afborgun er 12 500 krónur. Eftirstöðvar af láninu eftir aðra greiðslu eru 125 000 krónur og af þeim eru borgaðir 1% vextir sem eru 1250 kr. Svo þriðja greiðsla er 13 750 kr.
Reiknum að lokum heildarvaxtagreiðslu. Vextirnir mynda mismunarunu með $a_1 = 1500$, $d = -125$ og fjöldi liða er 12.
Síðasta vaxtagreiðslan er $a_{12} = a_1 + 11d = 1500 + 11 \cdot (-125) = 125$ 100 krónur og vaxtagreiðslan alls er þá

$$1500 + 1375 + 1250 + \ldots + 125 = \frac{(1500+125)}{2} \cdot 12 = 9750 \text{ kr.}$$