



Video 3 Um Evklíð

1. KAFLI, EVKLÍÐ

Evklíð (e. Euclid) hét maður sem uppi var um 300 f.Kr. Hann var grískur að uppruna en starfaði lengstum við hið mikla bókasafn í Alexandríu í Egyptalandi.

Í bókasafni þessu er talið að hafi verið um 700.000 bækur (rollur), sem innihéldu mestallan þann ritaða fróðleik fornaldar sem þá var til. Bókasafnið brann í

óeirðum á fyrstu öld f.Kr. þegar sjálfur Sesar Rómarkeisari var þar með ófriði.

Ævistarf Evklíðs fólst í að safna saman allri vitneskju sem hann gat komist yfir varðandi stærðfræði.

Ekki er vitað hve mikið hann lagði til af eigin uppgötvunum en afrek hans fólust í því að samræma og skilgreina þekktar staðreyndir.

Með því lagði hann grunninn að allri stærðfræði flatarmáls og rúmfræði sem notast er við í dag og er hann því kallaður „faðir rúmfræðinnar“.



Skilgreiningar Evklíðs

Ritverk Evklíðs nefnast „Frumsendur“. Verkið samanstendur af samtals 13 bókum sem hver um sig fjallar um aðgreint viðfangsefni stærðfræðinnar.

Í fyrstu bókinni koma fram 23 skilgreiningar sem mynda grunn að rúmfræði- og flatarmálsfræðum.



Þessar skilgreiningar eru staðreyndir, sem ekki verður um deilt og ekki þarf að sanna. Við köllum þær frumsendur (e. *axiom*). Hér á eftir koma nokkrar af mikilvægustu frumsendum Evklíðs.



Video 4 Punktur

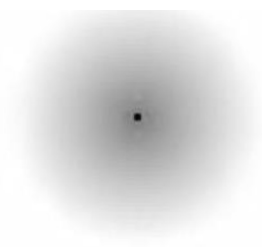
1.1 Punktur

„Punktur er það sem ekki er hægt að skipta,“ sagði Evklíð.

Punktur hefur enga breidd, enga lengd og enga lögun. Því er í raun ekki hægt að teikna punkt, hann hefur enga stærð. Öll rúmfræði byggist þó á því að hann sé til og ef við hugsum um hann sem tiltekna

„staðsetningu“ frekar en fyrirbæri þá gengur allt upp.

Punktur er merktur með stórum staf, t.d. A, B eða P o.s.frv. (Ath. rétt er að nota aðeins enska stafrófið).



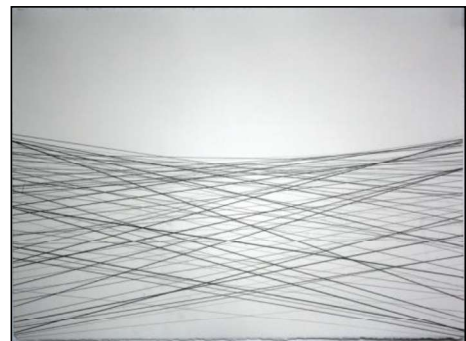
1.2 Lína

„Lína er lengd án breiddar,“ sagði E.

Hún er endalaus í báðar áttir, liggur í gegnum endalaust marga punkta, sem hver um sig hefur enga þykkt. Lína hefur því enga þykkt, aðeins lengd.

Þegar talað er um línu í þessari bók er alltaf átt við beina línu. En línur geta auðvitað verið hlykkjóttar, sbr. línurit.

Lína er merkt með litlum staf, l , m , n o.s.frv.

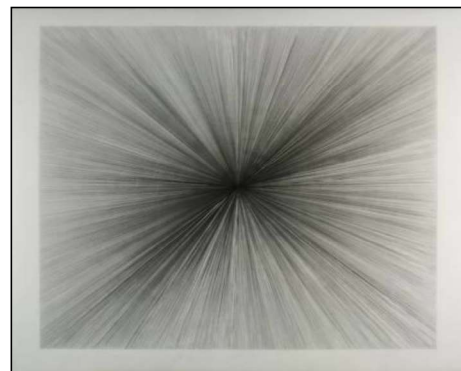


Video 5 Lína, háflína & flr

1.3 Háflína (geisli)

Háflína er lína sem á sér upphaf í punkti og er endalaus í eina átt. Hún er einnig kölluð geisli, sbr. sólargeisli.

Háflína er merkt með litlum staf eins og allar aðrar línur.

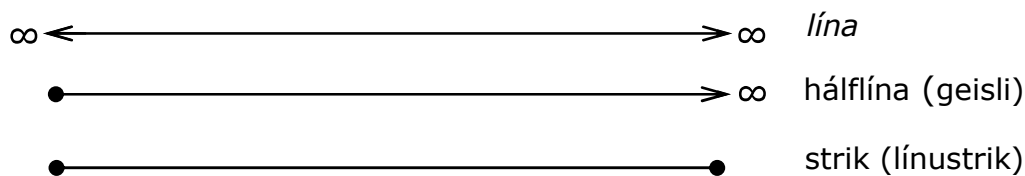
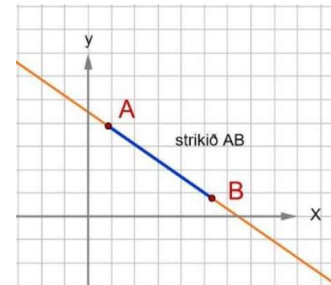


1.4 Strik (línustrik)

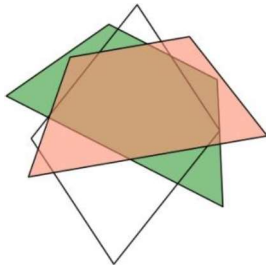
Strik liggur milli tveggja punkta á línu.

Það er því hluti línunnar en hefur takmarkaða lengd.

Strik eru merkt með litlum staf eða það nefnt eftir endapunktum sínum, t.d. strikið AB sem liggur á milli punktanna A og B á tiltekinni línu.



1.5 Flötur (slétta)



Flötur er lengd og breidd en hefur enga þykkt.

Endimörk flatar (ef einhver eru) er lína.

Hægt er að hugsa sér endalaust marga fleti, samsíða fleti og fleti sem skerast á alla hugsanlega vegu. Nærtækasta dæmið um flöt er blaðið eða skjárin sem þú horfir á.

1.6 Hringur

Hringur er mengi punkta sem allir eru í sömu fjarlægð (radíus) frá tilteknum punkti O

(miðpunkti hringins, stundum merktur með M).



Satúrnus

Við notum orðið hringur bæði um hringferilinn og svæðið innan hans, þ.e. hringflötinn. En það veldur sjaldan nokkrum misskilningi.



Video 6
Hringurinn

Frumsendur Evklíðs eru 5 talsins.

Afrek Evklíðs felst ekki síst í því að búa til sameiginlegan skilning manna á grundvallarhugtökum rúmfræðinnar. Vegna hans orða eru menn t.d. sammála um að „öll rétt horn eru jafn stór“.



Hann byggir skilgreiningar sínar upp á svo einfaldan og skýran hátt að um þær þarf ekki að efast.

Fimm frumsendur Evklíðs eru þessar:

1. Hægt er að teikna beint strik milli sérhverra tveggja punkta.
2. Hægt er að framlengja sérhvert beint strik í óendanlega langa beina línu.
3. Hringur er miðpunktur og radíus.
4. Öll rétt horn eru eins.
5. Fyrir gefna línu (l) og gefinn punkt (P), sem ekki er á línunni, er til ein og aðeins ein lína sem fer í gegnum punktinn og sker ekki línuna (skilgr. á samsíða línunum).



Hugtakasafn í
rúmfræði

Hvaða línur eru samsíða?

Tvær línur í sama fleti (sléttu) sem hafa engan sameiginlegan punkt eru sagðar vera samsíða. Þannig liggja samsíða línur út í hið óendanlega (∞) án þess að skerast. Jafnframt er sérhver lína sögð samsíða sjálfri sér.

Ef línurnar m og n eru samsíða þá er það táknað með $m \parallel n$.

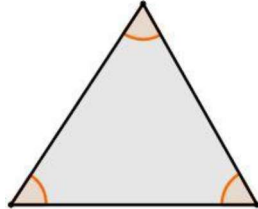


Vatnsflötur Flosagjár á Þingvöllum

1.7 Marghyrningar

Einfaldasta form marghyrnings er þríhyrningur.

Summa allra horna hans er 180° (sönnnum það síðar).



Hornasumma ferhyrnings er hins vegar

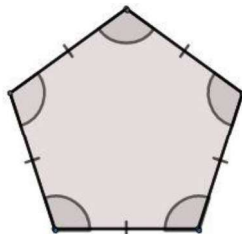
360° . Það er augljóst því fjögur horn rétthyrnings,

sem hvert um sig er 90° , gefur okkur 360° samtals.



Fimmhyrningur hefur hins

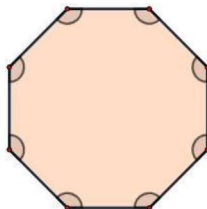
vegar hornasummuna 540° og sexhyrningur 720° .



Þetta skoðum við seinna og

finnum aðferð til

að reikna út hornasummur hvaða marghyrnings sem er.



Á vísindavefnum er að finna þennan texta um Evklíð:

„Bækurnar þrettán varðveittust í arabískum þýðingum.

Frumþættir hafa verið grundvöllur margra

kennslubóka um flatarmáls- og rúmfræði og í Englandi voru

bækurnar þrettán til dæmis

sums staðar kenndar óbreyttar allt fram á 20. öld.

Á Íslandi höfðu Frumþættir Evklíðs mest áhrif í gegnum Kennslubók í

rúmfræði eftir Julius Petersen, sem fyrst var kennd á Íslandi á

dönsku árið 1877 og var

höfuð-kennslubókin í þessari grein í íslenskum framhalds-

skólum fram til um 1970.

Sigurkarl Stefánsson þýddi

bókina 1943 þegar ekki var

lengur hægt að kaupa bækur frá Danmörku vegna

heimsstyrjaldarinnar síðari

1939-1945.”

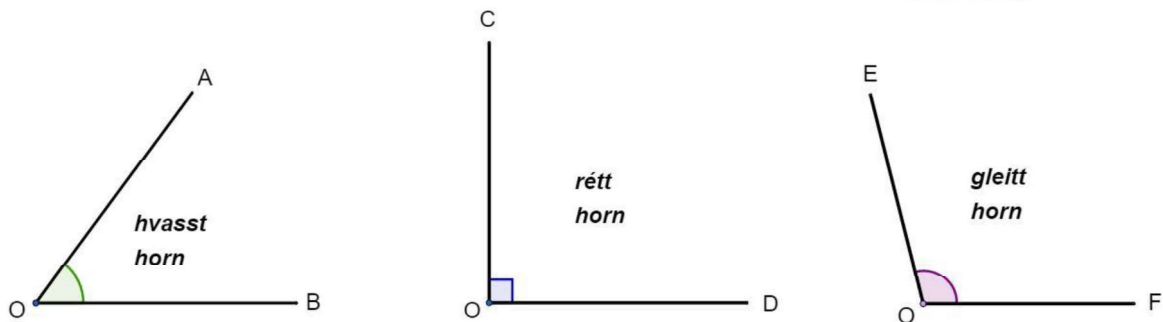


Video 7
Marghyrningar



1.8 Horn

Tvær háflínur með sama upphafspunkt mynda horn. Upphafspunktur háflínanna kallast oddpunktur (merktur O) hornsins og háflínurnar kallast armar þess, hægri eða vinstri miðað út frá O.



Heiti horns er yfirleitt myndað út frá þeim þrem bókstöfum sem afmarka hornið. Þá er oddpunkturinn *alltaf* hafður í miðjunni. Hvassa hornið hér að ofan er því hornið AOB, með O sem oddpunkt. Rétt hornið heitir þá hornið COD o.s.frv.

Horn eru misstór (gleið):

Hvasst horn $< 90^\circ$

Rétt horn $= 90^\circ$

Gleitt horn $> 90^\circ$

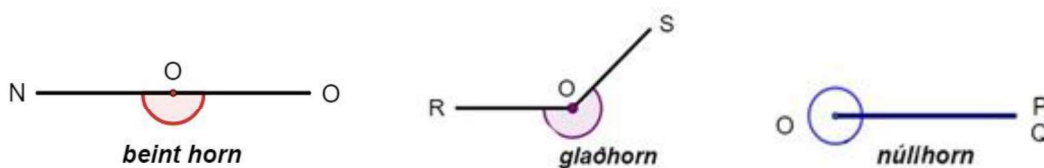
Beint horn $= 180^\circ$ (armar mynda beina línu)

„Glaðhorn“

Núllhorn $= 0^\circ$ (armar liggja hvor á öðrum)



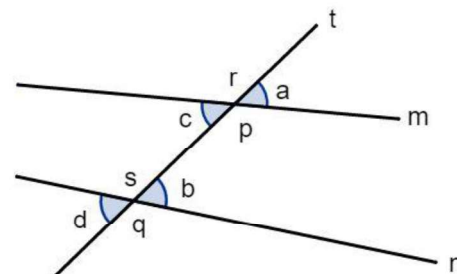
Video 8 Horn



1.9 Einslæg horn

Þar sem tvær línur (m og n) eru skornar af þriðju línunni (t) myndast alls átta horn, fjögur við hvorn skurðpunkt.

Horn sem hafa línuna t sameiginlega, ýmist sem vinstri arm eða sem hægri arm, nefnast einslæg horn. Þannig eru hornin a og b einslæg í þessari mynd því línan t er vinstri armur hjá báðum. Hornin c og d hafa einnig t sem sinn vinstri arm svo að öll þessi horn eru einslæg.



Hornin r , s , t , p og q hafa línuna t sem sinn hægri arm svo þau eru einslæg. Hornin a og r eða a og q o.s.frv. eru hins vegar mismislæg því línan t er ýmist vinstri eða hægri armur þeirra.

Til að átta sig á hvor armurinn er vinstri og hvor hægri er best að staðsetja sig í oddpunkti hornsins og horfa inn í hornið út frá honum.

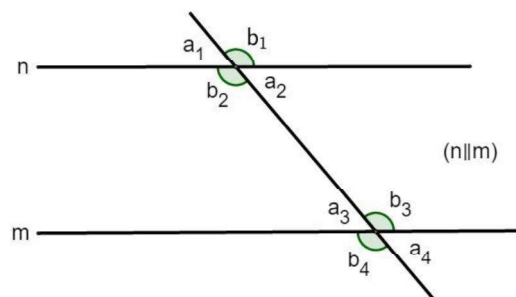


Video 9 Einslæg horn

1.10 Einslæg horn við samsíða línur

Allar vangaveltur um horn og tengsl þeirra má rekja beint til frumsenda Evklíðs og skilgreininga hans. Svo er einnig um tvær mikilvægar reglur sem tengjast einslægum hornum við samsíða línur.

1. Ef einslæg horn eru jafn stór þá eru línurnar m og n samsíða.
2. Ef línurnar m og n eru samsíða þá eru einslæg horn jafn stór.



Takið eftir því að einslæg horn eru ekki jafn stór nema línurnar tvær, sem skornar eru af þeirri þriðju, séu samsíða og öfugt. Línurnar eru samsíða ef einslæg horn eru jafn stór.



Video 10 Einslæg horn við samsíða línur

1.11 Hornapör

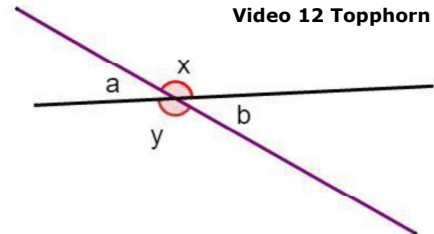
Tophorn

Þar sem tvær línur skerast myndast fjögur horn. Þau horn sem liggja hvort á móti öðru kallast tophorn.

Þau eru alltaf jafn stór.

Hérna eru x og y tophorn hvors annars. Því er víst að $x = y$.

Sama gildir um hornin a og b . $a = b$.

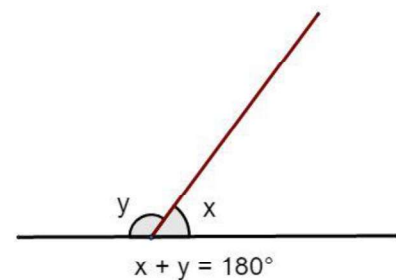


Video 11 Hornapör

Video 12 Tophorn

Grannhorn

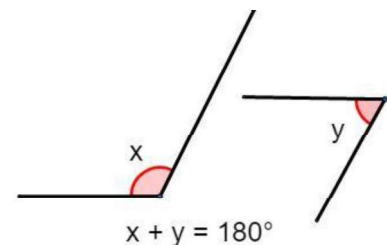
Horn sem hafa einn sameiginlegan arm og hinir armarnir mynda beina línu eru nefnd grannhorn. Summa þeirra er þá 180° (bein lína).



Frændhorn

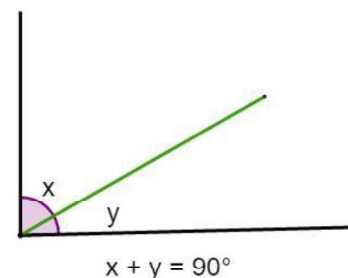
Tvö horn sem samanlögð eru 180° nefnast frændhorn.

Þau þurfa ekki að liggja saman í fletinum.



Lagshorn

Tvö hvöss horn sem samtals eru 90° .



Video 13 Grannhorn, frændhorn og lagshorn

VERKEFNI 1

Notaðu reglustiku og/eða gráðuboga. Gott er að rissa upp allar myndir. Þær þurfa ekki að vera nákvæmlega teiknaðar.

1. Dragðu strikið $AE = 8$ cm.



Merktu punktana B, C og D á línuna á milli A og E (sama hvar á línunni punktarnir lenda). Tilgreindu þau 10 mismunandi strik, sem þú getur lesið út úr myndinni.

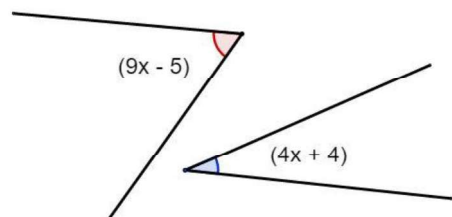
2. Teiknaðu grannhornin x og y þar sem $x = 56^\circ$.
Hve stórt er hornið y ?



3. Hver er oddpunktur horns sem merkt er svona: STP?
Teiknaðu hornið og merktu.



4. Hve stór eru grannhorn ef annað hornið er þrefalt stærra en hitt?



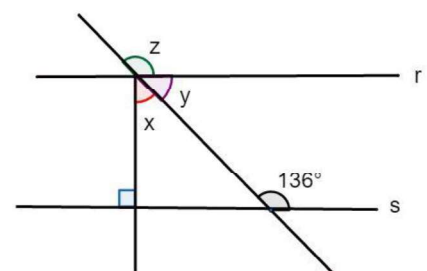
5. Myndin sýnir lagshorn.
Hve stórt er hvort þeirra?



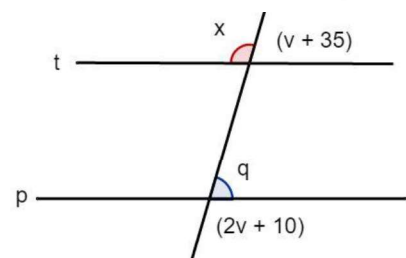
6. Teiknaðu topphorn þar sem eitt hornið er 24° . Hve stór eru hin hornin í hornafernunni?



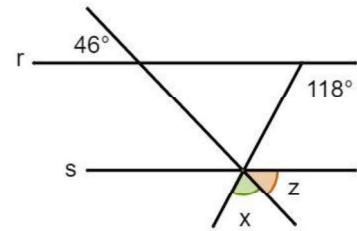
7. Hve stór eru hornin x , y , og z ef línurnar r og s eru samsíða?



8. Línurnar t og p eru samsíða.
Reiknaðu v og stærðirnar á hornunum x og q ?

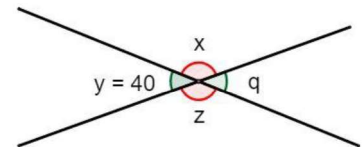


9. Línurnar r og s eru samsíða. Reiknaðu stærðir hornanna x og z .

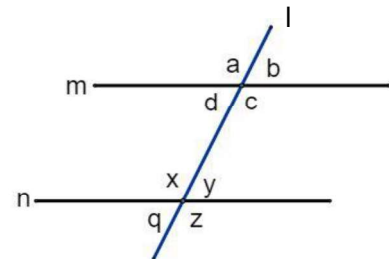


10. Líttu á myndina hér til hliðar.

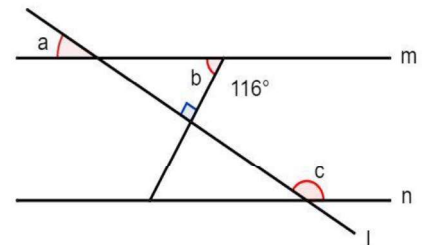
- a) Hve stórt er hornið x ?
 b) Hvað nefnist hornaparið x og y ?
 c) Hve stórt er hornið z ?
 d) Hvað nefnist hornaparið x og z ?
 e) Hvað nefnist hornaparið x og q ?



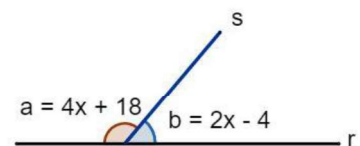
11. Línurnar m og n eru samsíða ($m \parallel n$) og skornar af línunni l . Hvaða horn eru einslæg horninu x (og þá um leið jafn stór og x)?



12. Línurnar m og n eru samsíða og báðar skornar af línunni l . Reiknaðu hornin a , b og c ?



13. Hve stór eru hornin a og b ?



14. Hornin y og z eru lagshorn. Hve stór eru hornin x , y og z ?

