2018

Hagnýt stærðfræði 1

Guðrún Hafdís Eiríksdóttir

Hilmar Friðjónsson endurbætti

Flensborg - Verkmenntaskólinn á Akureyri

1/1/2018

Efnisyfirlit

Hugleiðingar

Síminn sem við eigum er mikið og öflugt snjalltæki. Miklu öflugra og snjallara en t.d. tölvan sem notuð var árið 1969 til að koma manni fyrir á tunglinu og aftur til baka til jarðar.

Yfirleitt hefur síminn verið skilgreindur sem tæki sem truflar skólastarf og nemendur því verið beðnir að setja hann niður í tösku eða í vasa svo truflun verði ekki af.

Í þessari bók er þessu snúið við.

Síminn er allt að því nauðsynlegt tæki svo að bókin virki sem skyldi.

Í bókinni er verið að nota svokallaða QR kóða sem vísa nemendum á hjálparmyndbönd sem hafa þann tilgang að ef kennari nær ekki að útskýra efnið til hlýtar þá geti myndband mögulega gert það. Einnig er það svo að nemendur vilja eða þora kannski ekki að spyrja kennarann um sama atriðið oft og mörgum sinnum. Hér gæti það verið úr sögunni því hægt er að horfa á myndböndin aftur og aftur.

Hægt er að skoða bókina í síma, spjaldtölvu eða fartölvu og smella á viðkomandi QR kóða en einnig er hægt að prenta þessa bók út og skanna þá kóðanna með þar til gerðu símaforriti og þá birtist myndbandið á skjá símans. Hægt er að sjá líka svör við dæmunum með því að smella á ljósaperuna

En öll snjalltæki hafa tvær hliðar. Þau geta verið hjálpleg og stutt mann í námi, en einnig geta þau unnið gegn manni þegar maður tekur lausnirnar gagnrýnislaust og án skoðunnar.

Það er nefnilega í höndunum á okkur sjálfum hvernig við notum þessi tæki.

Til eru ótrúlegur fjöldi forrita sem geta verið hjálpleg, ef rétt er að farið. Hér er listi yfir nokkur. Að sjálfsögðu er þessi listi ekki tæmandi og ný forrit eru alltaf að koma út. Einnig geta tenglarnir úrelst.

Forrit:	IOS	Android	Windows
QR lesforrit	Itunes	Playstore	Microsoft
My script calculator	Itunes	Playstore	Ekki í boði
Photomath	Itunes	Playstore	Microsoft
Wolfram alpha	Itunes	Playstore	Microsoft

Önnur forrit sem áhugavert er að skoða eru t.d. Algebra touch, Mathpapa, Desmos o.flr o.flr.

Ráðleggingar:

- Leitaðu leiða til að nota símann á skynsaman og uppbyggilegan hátt í námi þínu
- Vertu áhugasamur/áhugasöm um nýjar leiðir til að nota símann þér til gagns í námi
- Þegar þú veistu um áugaverðar leiðir til að nota símann í námi og kennslu, sýndu kennurum þínum þær
- Stundum á alls ekki að nota símann í námi. Ef kennari þinn biður þig um að ganga frá símanum, virtu þá ósk hans og settu hann þá til hliðar svo ekki hljótist truflun af.

1. Heilar tölur

1.1 Samlagning og frádráttur

Æfing 1.1

1. $(-8) + (-4) =$
2. $(-8) + 3 =$
3. $2 + (-6) =$
4. $8 + (-3) =$
5. $6 - 4 =$
6. $6 + (-5) =$
7. $(-3) - 8 + 5 =$
8. $2 - (-8) - 3 =$
9. $13 - (-14) - (17) =$
10. $-23 - 56 + (-34) - (79) =$
11. $-45 - (53) + (-39) - (-69) - 7 =$
12. $81 - (53 - 22) + (-45) - (-87 + 65) - 88 =$
13. $(33 - 59) - (-24 - 55) + (-69) + (11) =$
14. $11 + (35 + 78 - 99 - 22) - (44 - 54 - 75 + 33) - (22 - 11) =$
15. $(34 - 56 - 21 - (21 + 53 - 76)) - 88 + 99 - (42 - (-39) + 58) + 26 =$

Video 1: Samlagning & frádráttur

Prufaðu Snapchat.
Taktu mynd af
QR kóðanum

1.2 Margföldun og deiling

Þegar við margföldum saman tvær eða fleiri tölur skiptir röðin ekki máli. Ekki skiptir heldur máli í hvaða röð við deilum. Hins vegar verðum við að vara okkur á

formerkjunum. Ef formerkin eru eins, annað hvort tveir plúsar eða tveir mínusar fáum við út plústölu. Ef formerkin eru hins vegar ólík, plús og mínus, fáum við út mínustölu.

Margföldun	**Deiling**
$4 \cdot (-2) = -8$	$4 / (-2) = -2$
$(-4) \cdot 2 = -8$	$(-4) / 2 = -2$
$(-4) \cdot (-2) = 8$	$(-4) / (-2) = 2$
$4 \cdot 2 = 8$	$4 / 2 = 2$

Ef við erum hins vegar að margfalda eða deila með 3 (eða 5), (eða 7), (eða 9) mínustölum fáum við út mínustölu en plústölu ef við erum að margfalda eða deila með 2 (eða 4), (eða 6) (eða 8) mínustölum.

Með öðrum orðum, ef fjöldi mínusanna sem verið er að margfalda saman (eða deila með) er oddatala, þá fáum við svar sem er mínus tala. Ef fjöldi mínusanna er hins vegar slétt tala þá fáum við svar sem er plús tala.

Video 2 Svigar utan um mínus tölur

Æfing 1.2

1. $(-8) \cdot (-4) =$

2. $(-8) \cdot 3 =$

3. $12 \cdot (-6) \cdot 5 \cdot 14 =$

4. $3 \cdot (-16) \cdot 5 =$

5. $(-4) \cdot (-7) \cdot (-5) =$

6. $5 \cdot (-16) \cdot (-8) \cdot (-12) =$

7. $(-8) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-6) =$

8. $(-3) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 2 \cdot (-3) =$

9. $(-3) \cdot 2 \cdot 5 \cdot (-4) \cdot 2 \cdot (-5) =$

10. $(-2) \cdot 6 \cdot 4 : 3 =$

11. $(-4) \cdot (-5) : (-2) \cdot (-3) =$

12. $7 \cdot (-3) \cdot 4 : (-14) =$

13. $8 : (-2) \cdot (-15) : (-3) =$

14. $18 : (-3) : (-3) \cdot 17 =$

15. $(-22) : (-2) \cdot 14 : (-7) =$

16. $5 \cdot 6 \cdot (-26) \cdot (-13) : (-15) =$

17. $1072 : (-2) : (-2) : (-2) : (-2) =$

18. $(-99) \cdot 66 : (-33) \cdot 11 =$

Video 3 + og – í margföldun

Video 4 + og - í deilingu

Video 5 Sýnidæmi

1.3 Röð aðgerða

Þegar við höfum margar aðgerðir í einu dæmi er ekki sama hvar við byrjum. Það fyrsta sem við gerum er að leysa svigann. Síðan reiknum við veldin, margföldum svo og deilum og að lokum leggjum við saman og drögum frá. Röðin er sem sé:

1. Leysa svigann
2. Reikna veldi
3. Margfalda og deila
4. Leggja saman og draga frá

Video 6 Röð aðgerða

Æfing 1.3

1. $24 + (13 - 45) + 35 =$
2. $22 + (16 - 41) - 31 \cdot 12 =$
3. $(16 - 28) - 9 \cdot 22 + 71 - 12 =$
4. $25 : 5 + (13 \cdot 3 - 44) - 12 + 82 =$
5. $(14 + 15 - 12 \cdot 4 - 2) - 23 =$
6. $(10 - 25) : (33 - 28) \cdot 13 =$
7. $(42 - 16 \cdot (-4)) + 22 \cdot 2 =$
8. $(-13 + 17) : ((22 - 10) - 8) =$
9. $33 - (12 \cdot 2 - 14 : 7) + 30 - 26 : 13 =$
10. $44 - (-15 \cdot (-5) - 44 : 11) \cdot 3 - 4 =$
11. $-22 - (13 \cdot 4 + 15 - 12 : 2^2) - 36 + 48 =$
12. $-(49 : 7(26 - 15 : 3 + 3 \cdot 4) - 120) =$

1.4 Frumtölur

Frumtala er heil tala, stærri en 1, sem ekki er hægt að þátta, þ.e. það gengur engin önnur tala upp í hana nema hún sjálf.

Fyrstu frumtölurnar eru :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

Allar aðrar tölur er hægt að þátta í að minnsta kosti tvo þætti. Við köllum þær því samsettar tölur.

Fyrstu samsettu tölurnar eru:

$2 \cdot 2 = 4$	$3 \cdot 3 = 9$	$2 \cdot 7 = 14$	$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$
$2 \cdot 3 = 6$	$2 \cdot 5 = 10$	$3 \cdot 5 = 15$	$2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$
$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$	

Þær eru sem sé allar samsettar úr þáttum 2, 3, 5, og 7 sem einnig eru frumtölur.

Æfing 1.4

1. Hverjar af eftirfarandi tölum eru frumtölur?

   a) 17
   b) 22
   c) 5
   d) 13
   e) 50
   f) 35
   g) 20
   h) 12
   i) 3

2. Þáttaðu eftirfarandi tölur í frumþætti

   a) 30
   b) 70
   c) 36
   d) 98
   e) 231
   f) 1001
   g) 462
   h) 182
   i) 2431
   j) 2717

Video 7 Frumtölur

2. Brotareikningur

2.1 Samlagning og frádráttur brota

Video 10
Blendin/Óblendin tala

Video 9
Alm.brot - Samnefnari

Video 8
Almenn brot - Sýnidæmi

Við gerum brot samnefnd með því að lengja þau.

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{12}$$

Við breytum heilli tölu og broti í brot, með því að margfalda saman heilu töluna og nefnarann (fyrir neðan strik) og leggja síðan teljarann (fyrir ofan strik) við.

$$2\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4+3}{4}=\frac{11}{4}$$

Æfing 2.1

1. $\frac{2}{24}+\frac{1}{8}=$

2. $\frac{8}{9}-\frac{1}{3}=$

3. $\frac{2}{5}+\frac{1}{6}=$

4. $3\frac{2}{3}+1\frac{1}{4}=$

5. $\frac{22}{6}-\frac{4}{3}=$

6. $2\frac{1}{3}-1\frac{2}{9}=$

7. $1-\frac{2}{9}=$

8. $-\frac{7}{3}-\frac{5}{4}=$

9. $1\frac{1}{10}+1\frac{1}{5}=$

10. $1\frac{1}{28}+1\frac{1}{4}+2\frac{3}{7}=$

11. $4\frac{1}{3}+2\frac{1}{6}-1\frac{1}{12}=$

12. $\frac{31}{10}-\frac{17}{5}+\frac{48}{15}+\frac{4}{3}=$

13. $1\frac{1}{4}+1\frac{2}{3}-1\frac{7}{12}=$

14. $3-\frac{5}{6}+\frac{1}{9}=$

15. $1-\frac{5}{6}+3\frac{3}{18}-1\frac{1}{3}=$

16. $3+\frac{2}{5}-2\frac{3}{15}+\frac{1}{3}=$

17. $6\frac{1}{4}-3\frac{2}{3}=$

18. $3\frac{1}{10}+3\frac{2}{5}+3\frac{3}{15}+1\frac{1}{3}=$

19. $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{5}{8}-\frac{7}{16}=$

20. $1\frac{3}{7}-1\frac{2}{21}+4\frac{2}{3}-\frac{1}{14}=$

21. $1\frac{1}{2}+2\frac{5}{16}-3\frac{1}{8}+\frac{2}{3}=$

22. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}+\frac{7}{16}=$

2.2 Margföldun og deiling brota

Þannig á að margfalda brot

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{1} = \frac{1 \cdot 5}{5 \cdot 1} = \frac{5}{5} = 1$$

Þannig á að margfalda brot, blandnar- og heilar tölur

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{1} = \frac{1 \cdot 5}{5 \cdot 1} = \frac{5}{5} = 1$$

Þegar margfaldað er með blöndnum tölum er þeim fyrst breytt í brot. Ef margfaldað er með heilum tölum er þeim einnig breytt í brot með því að setja 1 í nefnara.

Æfing 2.2

1. $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} =$

2. $\frac{7}{4} \cdot \frac{8}{3} =$

3. $\frac{3}{7} \cdot 11 =$

4. $(-\frac{3}{7}) \cdot 8 =$

5. $\frac{2}{10} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{4} =$

6. $\frac{5}{6} \cdot (-7) \cdot \frac{3}{14} =$

7. $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 =$

8. $5 \cdot \frac{2}{7} \cdot (-\frac{3}{4}) =$

9. $3 \cdot \frac{3}{5} \cdot 4 =$

10. $(-3) \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{4}{9}) =$

11. $1\frac{2}{7} \cdot (-\frac{1}{5}) \cdot 3 =$

12. $2\frac{1}{6} \cdot 2\frac{3}{4} =$

13. $2\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} =$

14. $5\frac{1}{4} \cdot 2\frac{2}{7} \cdot 3\frac{2}{3} =$

15. $(-\frac{3}{5}) \cdot (-\frac{5}{6}) =$

16. $(-3\frac{2}{5}) \cdot (-1\frac{1}{4}) =$

17. $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot (-4) =$

Þannig á að deila með brotum

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} : 2\frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 4 \cdot 13} = \frac{60/\mathbf{12}}{156/\mathbf{12}} = \frac{5}{13}$$

Þegar deilt er með broti er tölunni með deilingarmerkinu fyrir framan sig, snúið við. Síðan er svarið stytt ef hægt er

18. $-\frac{8}{5} : \frac{5}{4} =$

19. $\frac{11}{7} : -\frac{4}{3} =$

20. $-\frac{1}{2} : \frac{3}{5} =$

21. $\frac{4}{3} : -\frac{1}{2} =$

22. $\frac{3}{2} : \frac{1}{2} =$

23. $\frac{7}{4} : 6 =$

24. $2\frac{2}{3} : 1\frac{7}{8} =$

25. $-\frac{9}{7} : -\frac{3}{2} =$

26. $\frac{2}{5} : \frac{1}{3} =$

27. $\frac{2}{9} \cdot 3 : \frac{2}{5} =$

28. $\frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} : \frac{2}{3} =$

29. $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{9} : 5 =$

30. $\left(-\frac{2}{7}\right) : \left(-\frac{7}{9}\right) \cdot \frac{1}{5} =$

31. $2\frac{3}{5} : 3\frac{1}{4} \cdot 1\frac{2}{7} =$

2.3 Röð aðgerða í brotareikningi

Æfing 2.3

1. $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} =$

2. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} =$

3. $\left(2 - \frac{5}{4}\right) : 5 =$

4. $2 \cdot 2 - \frac{1}{4} =$

5. $\frac{4}{3} : 2 + 2 =$

6. $\frac{8}{5} : 2 - \frac{1}{3} =$

7. $\frac{5}{3} : \left(2 - \frac{6}{5}\right) =$

8. $2 \cdot \frac{5}{3} - \frac{5}{6} =$

9. $1 + 5 \cdot \frac{5}{6} =$

10. $\frac{3}{2} - \frac{4}{3} : 6 =$

11. $\frac{5}{6} : \frac{1}{5} + \frac{3}{5} =$

12. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) : \frac{9}{5} =$

13. $\frac{8}{7} - \left(\frac{3}{5} : (-1) + 1\right) =$

14. $\frac{1}{7} - \frac{19}{10} - \left(\frac{6}{5} - 1\right) =$

15. $\left(\frac{1}{2} + (-8)\right) \cdot (-2) - \frac{6}{5} =$

16. $\left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) =$

17. $\left((-10) - (-1)\right) : \left(1 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right) =$

18. $\left(-\frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{3} : (-1) =$

19. $(-1) + \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{8}\right) =$

20. $\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{6} : \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{5}{3}\right) =$

2.4 Brotadæmi

Æfing 2.4

1. Sigrún borgar 1/5 af laununum sínum í skatt, 1/4 í leigu og 1/6 í mat. Hve stór hluti af laununum er það samanlagt?

2. Heimsmetið í hástökki karla er 245 cm. Gummi stekkur 4/5 af þeirri hæð. Hvað stekkur hann hátt?

3. Ef þú deilir í tölu með 1/6 verður niðurstaðan 12. Hver verður niðurstaðan ef þú deilir í staðinn í töluna með 1/3?

4. Í þorpinu Sólvík les hver íbúi aðeins eitt dagblað. 1/3 hluti les Fréttablaðið, 1/5 hluti les Dagblaðið og afgangurinn les Morgunblaðið. Hve stór hluti þorpsbúa les Morgunblaðið?

5. Svana ætlar að baka brauð. Uppskriftin hennar er svona:
   1 kg. Hveiti   200 gr. Sykur
   100 gr. Smjör   2,5 dl. Vatn
   Þegar hún vigtar hveitið á hún bara 800 gr. Hún ætlar því að minnka uppskriftina sem því nemur. Hvað á hún þá að nota mikið af sykri, smjöri og vatni?

2.5 Ýmis dæmi

Æfing 2.5

1. Siggi kaupir bensín á bílinn sinn. Hann kaupir fyrir 5000 kr. Hvað fær hann marga lítra ef verðið
   er 178,8 kr/l?

2. Ef Siggi kemst 513 km á 44,9 l af bensíni, hvað eyðir bíllinn hans á 100 km?

3. Ef Siggi ekur á hraðanum 24,7 m/sek hvað kemst hann langt á 25 sek?

4. Ef bíllinn hennar Jónu eyðir 12 lítrum af bensíni á 170 km, hvað eyðir hann þá mörgum lítrum ef hún ákveður að fara hringveginn sem er 1340 km.

5. Hvað kostar fyrir Jónu að fara hringveginn, ef verð á lítra af bensíni er 178,8 kr/l?

6. Spretthlauparinn Usain Bolt frá Jamaica setti heimsmet í 100 m hlaupi með því að hlaupa á 9,58 sek. Hver var meðalhraði hans í m/sek? En í km/klst?

7. Sigrún kaupir 2,3 kg af kartöflum. Kílóverðið er 121 kr. Hvað á hún að borga?

8. Lúðvik hélt tónleika með bandinu sínu, Símastaurunum. Á tónleikana komu 321 og miðinn kostaði 1500 kr. Hann þurfti að borga 18.000 kr í húsaleigu og 13.200 kr í annan kostnað. Hverjar voru tekjur Lúðviks af tónleikunum?

9. Svana keypti 0,567 kg af nautahakki. Kílóverðið er 1278 kr. Hvað á hún að borga?

10. Lúðvik fékk leigða kerru sem tekur 1,5 tonn. Hvað getur hann sett marga hleðslusteina í kerruna ef hver steinn vegur 35 kg?

11. Íris er með krukku fulla af skrúfum. Til að finna fjöldann, vigtar hún krukkuna tóma sem vegur 12 g, síðan eina skrúfu sem vegur 827 mg. Að lokum vigtar hún krukkuna með öllum skrúfunum í og vegur hún 61,62 g. Hvað eru margar skrúfur í krukkunni?

12. Guðjón fær sér samloku og kókómjólk í hádeginu, alla daga vikunnar. Hvað kostar það hann á mánuði ef samlokan er á 355 kr og kókómjólkin er á 67 kr?

3. Jöfnur

Jafna er í raun eins og tvö dæmi, sitt hvoru megin við jöfnumerkið (=) sem eru jafnstór, þ.e. stærðin sem er hægra megin við jöfnumerkið er jafnstór stærðinni sem er vinstra megin.

Dæmi: 2 + 3 + 4 = 1 + 8 9 = 9

Af því að jöfnur hafa jafnstórar stærðir sitt hvoru megin við jöfnumerkið getum við notfært okkur það þegar við þurfum að leysa jöfnur með einni eða fleiri óþekktri stærð. Hér koma nokkrar reglur sem hjálpa okkur að leysa jöfnur.

Reglur um jöfnur

1. Við getum lagt sömu tölu við báðar hliðar jöfnu.
   Dæmi: (2 + 3 + 4) + 5 = (1+ 8) + 5 9 + 5 = 9 + 5 14 = 14
   Við höfum enn jafnstórar stærðir, báðum megin við jöfnumerkið

2. Við getum dregið sömu tölu frá báðum hliðum jöfnu.
   Dæmi: (2 + 3 + 4) - 5 = (1+ 8) - 5 9 - 5 = 9 - 5 4 = 4

3. Við getum margfaldað með sömu tölu, báðum megin við jöfnumerkið.
   Dæmi: (2 + 3 + 4) · 5 = (1+ 8) · 5 9 · 5 = 9 · 5 45 = 45

4. Við getum deilt með sömu tölu, báðum megin við jöfnumerkið.
   Dæmi: (2 + 3 + 4) / 3 = (1+ 8) / 3 9 / 3 = 9 / 3 3 = 3

Þó við leggjum saman, drögum frá, margföldum eða deilum, höfum við alltaf jafnstórar stærðir báðum megin við jöfnumerkið. Þetta þýðir að það má gera hvaða aðgerð sem er öðru megin í jöfnunni ef hún er líka gerð alveg eins, hinu megin.

Þegar við leysum jöfnur með einni óþekktri stærð, byrjum við á því að einangra óþekktu stærðina öðru megin í jöfnunni og þekktu stærðirnar hinu megin.

Dæmi:

1

$$x + \cancel{2} = 5$$
$$\underline{-\cancel{2} = -2}$$
$$x = 3$$

2

$$3x - 6 = 5 + \cancel{2x}$$
$$\underline{-2x = \quad -\cancel{2x}}$$
$$x - \cancel{6} = 5$$
$$\underline{+\cancel{6} = +6}$$
$$x = 11$$

3

$$4x - 8 = 6 - 2x + 4$$
$$2x \quad = \quad +2x$$
$$6x - 8 = 6 + 4$$
$$\underline{+8 = +8}$$
$$\frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} = \frac{18}{6}$$
$$x = 3$$

Video 12 Einfaldar jöfnur 1

Video 11 Einfaldar jöfnur 2

3.1 Einfaldar jöfnur

Æfing 3.1

1. $n + 9 = 19$

2. $k + 5 = 6$

3. $x + 8 = 4$

4. $v - 8 = -15$

5. $m + 10 = 19$

6. $10r = 30$

7. $8m = -80$

8. $10 + m = 11$

9. $\frac{x}{2} = 5$

10. $x + 10 = 12$

11. $24n = -24$

12. $16 = \frac{r}{2}$

13. $\frac{r}{16} = 26$

14. $20 + n = 12$

15. $3 = \frac{x}{9}$

16. $-6 = 20 - n$

17. $\frac{n}{6} = 19$

18. $-3 = 3m$

19. $-6 = \frac{x}{7}$

20. $15 + x = 7$

3.2 Flóknari jöfnur

xEf við erum með sviga í jöfnunni, verðum við að byrja á því að leysa hann. Einnig ef við erum með brot byrjum við á að lengja jöfnuna með nefnaranum í brotinu.°

Sýnidæmi:

1

$$3x + 2(x - 4) = 12$$
$$3x + 2x - 8 = 12$$
$$+8 \qquad +8$$
$$\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} = \frac{20}{5}$$
$$X = 4$$

2

$$-5 + \frac{x}{3} = 10$$
$$-5 \cdot 3 + \frac{x \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} = 10 \cdot 3$$
$$-15 + x = 30$$
$$+15 \qquad +15$$
$$x = 45$$

Æfing 3.2

1. $-3a + 4 = 16$

2. $-(5 + x) = -12$

3. $5(r - 1) = 15$

4. $\frac{n}{3} + 2 = 5$

5. $\frac{n}{4} + 3 = 2$

6. $-2 + \frac{x}{2} = 0$

7. $-3 + 2x = 3$

8. $-2x - 3 = -9$

9. $-5 + 3n = -5$

10. $-4x + 5 = -27$

11. $10(-16 + n) = -480$

12. $10 + 5n = -25$

13. $17(n + 12) = -425$

14. $-17(-7 + r) = 68$

15. $\frac{17 + b}{15} = 1$

16. $\frac{p - 5}{9} = -1$

17. $-17(4 + p) = -51$

18. $-3(-1 + n) = 105$

19. $\frac{k}{24} - 19 = -20$

20. $-7x - 20 = -160$

21. $4(3 + k) = -96$

22. $20(16 + r) = 240$

23. $5x - 4 = -159$

24. $\frac{-15 + n}{35} = -1$

25. $\frac{-4 + x}{12} = 3$

26. $\frac{x}{4} + 19 = 15$

27. $-6(b - 1) = 126$

28. $-14 + \frac{n}{2} = -16$

29. $\frac{k}{6} - 17 = -11$

30. $-13(-20 + n) = 481$

Video 13 Flóknar jöfnur 1

Video 14 Flóknar jöfnur 2

3.3 Fleiri jöfnur

Æfing 3.3

1. $3(4-3x) = -2x-30$

2. $-20+5x = 5+2(x-5)$

3. $-16-3x = 5(x+4)+4$

4. $-(5-6x) = 4x-17$

5. $4x+22 = 5(x+5)$

6. $-5x+25 = -6(1+6x)$

7. $2(4x-2) = 6x-12$

8. $-2-(-2x+2) = 6x-4$

9. $-2x = -6(2x-6)+x$

10. $-5x+6(x+3) = -12-4x$

11. $-14 = \frac{x}{4}-11$

12. $\frac{-12+x}{5} = -7$

13. $\frac{9+x}{8} = 1$

14. $4 = \frac{x-5}{2}$

15. $-6 = -11+\frac{x}{5}$

16. $\frac{x+14}{-3} = -10$

17. $-1 = \frac{x-5}{-15}$

18. $\frac{x+3}{2} = -2$

19. $\frac{x}{-3}+7 = 10$

20. $9 = \frac{x}{2}+6$

21. $-2\left(\frac{4x}{3}+1\right) = -\frac{46}{9}$

22. $\frac{52}{21} = -\frac{8}{7}\left(\frac{5x}{6}-\frac{1}{2}\right)$

23. $-2\left(-\frac{3x}{2}+\frac{5}{3}\right) = -\frac{49}{12}$

24. $\frac{12}{7}\left(\frac{3x}{5}-\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{5}$

25. $6\left(x-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}$

26. $\frac{5}{2} = \frac{5}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)$

27. $-\frac{1}{2}\left(x-\frac{7}{6}\right) = \frac{19}{12}$

28. $-\frac{11}{24} = -\frac{4}{3}\left(\frac{3x}{2}+1\right)+\frac{3x}{2}$

29. $-2\left(-\frac{10x}{7}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{7}$

30. $\frac{7}{4}\left(-\frac{13x}{7}+1\right) = -\frac{25}{8}$

Video 15 Flóknar jöfnur 3

3.4 Hlutfallareikningur

Þegar skipta þarf upphæð í fleiri en einn stað er það kallað að skipta í hlutföllum.

Ef skipta á 1000 kr á milli Jóns og Gunnu í hlutföllunum 3:2 er byrjað að finna út hve margir hlutir eru til skiptanna. Jón fær 3 hluti og Gunna fær 2, þannig að samtals eru hlutirnir 5.
Þá er hægt að reikna út hvað Jón fær $\frac{3}{5} \cdot 1000 = 600kr.$
Gunna fær $\frac{2}{5} \cdot 1000 = 400kr$

Æfing 3.4

Video 16 Hlutföll

1. Skiptu 35 í tvo hluta í hlutföllunum 2 : 5.
2. Skiptu 720 kr á milli A, B og C í hlutföllunum 2 : 3 : 7.
3. Skiptu 35.000 í þrjá staði í hlutföllunum 2 : 3 : 5.
4. Skiptu 1.722.000 í fjóra hluta í hlutföllunum 2 : 3 : 4 : 5.
5. Skiptu 7.500 kr í þrjá staði í hlutföllunum 1,5 : 3,2 : 5

Á sama hátt er hægt að skipta kílóum eða hvaða einingum sem er, í hlutföllum ef við vitum heildartöluna.

Flutningsbíll flytur vörur út á land. Kostnaðurinn deilist á vörurnar eftir þyngd. Gjald fyrir flutninginn í einni ferðinni var 42.000 kr. Bíllinn flutti

Pappír	30 kg
Bækur	70 kg
Möppur	50 kg
Alls:	**150 kg.**

Pappír: $\frac{30}{150} \cdot 42.000 = 8.400kr.$

Bækur: $\frac{70}{150} \cdot 42.000 = 19.600kr$

Möppur: $\frac{50}{150} \cdot 42.000 = 14.000kr$

3.5 Að reikna hlutfall

Æfing 3.5

1. Þrír bændur eiga saman jörð. Jón á 3,5 hektara, Gísli á 5,3 hektara og Símon á 7,2 hektara. Fasteignagjald af jörðinni allri er 110.000 kr. Hvað á hver þeirra að borga mikið ef þeir borga í réttu hlutfalli við eign?

2. Óli, Siggi og Palli keyptu sér saman Lottó-seðil fyrir 1000 kr. Óli borgaði 250 kr, Siggi borgaði 350 kr og Palli borgaði 400 kr. Hvað fengi hver um sig, ef þeir hlytu 2.500.000 kr vinning og skiptu honum í hlutfalli við framlag?

3. Áslaug, Svandís og Petra tóku að sér að mála hús. Fyrir það fengu þær 140.000 kr. Þær ákváðu að skipta með sér laununum í hlutfalli við vinnuframlag.
   Áslaug vann í 3 daga, 8 tíma á dag.
   Svandís vann í 5 daga, 6 tíma á dag.
   Petra vann í 4 daga, 4 tíma á dag.

   Hvað fékk hver um sig í laun?

4. Gengi dollarans er 130 ísl. kr. Gengi pundsins er 210 ísl. kr.
   a. Hve margir dollarar fást fyrir 10.000 kr?
   b. Hve mörg pund fást fyrir 10.000 kr?
   c. Hve margar krónur fást fyrir 1.000 dollara?
   d. Hve margar krónur fást fyrir 1.000 pund?

5. Jón bóndi skilaði inn 79 kg af kartöflum í haust. Á uppgjörinu sem hann fékk stendur:
   1. Flokkur 34 kg. kílóverð 119 kr.
   2. Flokkur 27 kg kílóverð 102 kr.
   3. Flokkur 18 kg. kílóverð 89 kr.

   Hvað fær hann mikið fyrir kartöfluuppskeruna?

6. Í Flensborgarskóla var eitt árið, hlutfallið milli stráka og stelpna 2:3.
   Hver er fjöldi stráka ef stelpurnar voru 390?

7. Fjölritunarvél afkastar 1.080 blöðum á 18 mínútum. Hvað fjölritar hún mörg blöð á klukkustund?

Video 17 Gengi gjaldmiðla

3.6 Upprifjunardæmi

Æfing 3.6

1. Reiknaðu:

a) $16 + 8 + 102 - 98 + 6$

b) $-63 + 19 + 655 - 33 - 700$

c) $7{,}5 \cdot 3{,}2 + 5{,}8 - 4{,}4 \cdot 5{,}1$

d) $2{,}5 \cdot 3{,}7 - (6{,}6 + 4{,}9) + 4{,}5 : 1{,}5$

2. Reiknaðu:

a) $6 + 4 \cdot 3^2$

b) $6 + (4 \cdot 3)^2$

c) $(6 + 4)^2 \cdot 3$

d) $(6 + 4 \cdot 3)^2$

3. Reiknaðu og skilaðu svari með 2 aukastöfum:

a) $\dfrac{4{,}7 \cdot 9{,}3 + 7{,}1 \cdot 13{,}5}{7{,}6+22{,}9}$

b) $\dfrac{(55{,}2 - 13{,}5) \cdot 2{,}2 - 66 : 11}{25{,}1-12{,}9 \cdot 3}$

c) $16{,}3 + \dfrac{5{,}9 \cdot 6{,}6}{23{,}6-12{,}2} - 3{,}3$

d) $5{,}9 \cdot 4{,}1 - \frac{4{,}5}{3{,}8} - 11{,}1$

4. Reiknaðu

a) $4 - 5 - (-6)^2$

b) $8 - 3 \cdot (-2)^2 + 7^2$

c) $2 + (-3)^2 - (-5)^2$

d) $(-4)^2 - (3 - 7)^2 + (-1) \cdot 2^2$

5. Reiknaðu og skilaðu svari með 2 aukastöfum.

a) $2{,}5 \cdot 6{,}8 + 3{,}8^2$

b) $(-2)^2 + 5{,}8 \cdot 4{,}3 + 6{,}4^2$

c) $15^2 + 5{,}2 \cdot 1{,}4^2 + 4(6{,}7 - 4{,}2)$

d) $(-3{,}1)^2 \cdot 4, 4^2 - (-2{,}3)^2 - 7{,}1^2$

6. Reiknaðu:

a) $(5 + 3) \cdot 4 - 3(2 + 4)$

b) $3^2 + (9 - 7)^2 + 3 \cdot 4^2$

c) $15 - (8 - 6)(5 - 3)^2$

d) $3^2 + (10 - 7)^3 + 4 \cdot 3^2$

7. Í knattspyrnuliðinu Baukum voru skoruð 44 mörk á einu keppnistímabili. $\frac{1}{4}$ hluti markanna voru skoruð á útivelli.

a) Hve mörg mörk voru skoruð á útivelli?
b) Hve mörg mörk voru skoruð á heimavelli?

8. Í knattspyrnuliðinu Áfram hafði Gummi skorað 6 mörk á einu keppnistímabili og var það $\frac{3}{20}$ af mörkum liðsins. Hversu mörg mörk voru skoruð á keppnistímabilinu?

9. Ásta keypti sér bát. Hún borgaði 180.000 kr strax, sem var $\frac{3}{8}$ af kaupverðinu. Hvað kostaði báturinn?

10. Sigrún ætlar að úða garðinn sinn með skordýraeitri sem hún þarf að blanda. Á brúsanum stendur að í 10 lítra af vatni eigi að setja 160 gr af eiturefni A og 240 gr af eiturefni B.

a) Hve stórt hlutfall er af hvoru eiturefni í blöndunni?

b) Sigrún þarf ekki nema 4 lítra blöndu. Hve mikið á hún að setja af hvoru eiturefni í blönduna?

c) Mamma hennar er með stærri garð og þarf að búa til 35 lítra blöndu. Hve mikið á hún að setja af hvoru eiturefni í blönduna?

11. Gummi fór út í búð að versla í matinn. Hann keypti 400 gr af lambakjöti sem hann borgaði 740 kr fyrir. Hvað kostar 1 kíló af lambakjöti?

12. Hann keypti líka 6 appelsínur sem kostuðu 372 kr.

a) Hvað kostar þá hver appelsína?

b) Ef þyngdin á appelsínunum var 1,2 kg. hvert var þá kílóverðið?

c) Hvað eru þá margar appelsínur í 1 kg.?

d) Hvað eru margar appelsínur í 4,6 kg.?

13. Leystu jöfnurnar:

a) $-78 = 6(8 + 7x)$

b) $8 - 5(-5 - 5x) = 58$

c) $-(1 + 6x) = -43$

d) $22 = -5(4 + 4x) + 2$

14. Leystu jöfnurnar:

a) $-\frac{26}{9} = -2x$

b) $\frac{x+5}{4} = 6$

c) $-5 + \frac{x}{20} = -4$

d) $-2 = \frac{x}{2} - 6$

4. Prósentur

4.1 Prósentur, heild, hluti

Orðið prósenta þýðir af hundraði. Þá er miðað við að heildin séu 100. 2% eru þá 2 af hundraði og 20% eru 20 af hundraði.

Regla: Heild x Prósenta = Hluti

Hvað eru 20% af 300 kr mikið?
Svar: 60 kr

$$\boldsymbol{Heild \cdot Prósenta = Hluti}$$
$$300 \quad \cdot \quad 0{,}20 \quad = \quad 60$$

Við byrjum á að breyta 20% í tugabrot með því að deila með 100 upp í prósentutöluna. $\frac{20}{100} = 0{,}20$
Þá fáum við 0,2 sem kallast breytiþáttur.

Hve mörg prósent eru 60 kr af 300 kr?
Svar: 20%

$$\boldsymbol{Prósenta = \frac{Hluti}{Heild}} \qquad P = \frac{60}{300} = 0{,}20$$

Á sama hátt breytum við 0,2 í 20% með því að margfalda breytiþáttinn með 100 og þannig fáum við prósentutölu.

30% af tölu eru 60 kr. Hver er talan?
Svar: 200 kr

$$\boldsymbol{Heild = \frac{Hluti}{Prósenta}} \qquad H = \frac{60}{0{,}30} = 200kr$$

Ef verið er að leita að heildinni, er breytiþættinum 0,3 deilt upp í hlutann.

Breytiþáttur.

Ef hækka á verð á vöru er hægt að bæta prósentuhækkuninni við 100% (upphaflega verðið). Nýi breytiþátturinn verður þá 1 + breytiþátturinn þ.e. hækkun.

Vara sem kostar 12.000 kr hækkar um 20%. Hvert er nýja verðið?
100% + 20% = 120% eða 1 + 0,2 = 1,2 sem er þá nýi breytiþátturinn.
$12.000 \cdot 1{,}2 = 14.400kr$

Ef lækka á vöru, er á sama hátt hægt að draga prósentulækkun frá 100% (upphaflega verðið). Nýi breytiþátturinn verður þá 1 – breytiþátturinn þ.e. lækkun.

Vara sem kostar 12.000 kr lækkar um 20%. Hvert er nýja verðið?
100% - 20% = 80% eða 1 - 0,2 = 0,8 sem er þá nýi breytiþátturinn.
$12.000 \cdot 0{,}8 = 9.600kr$

Hvernig finnur þú gamla verðið á einfaldan hátt ef þú þekkir breytiþáttinn og nýja verðið?

Vara hefur hækkað um 12%. Hvert var gamla verið ef nýja verðið er 3.500 kr?

$\frac{Nýja\ verðið}{\text{breytiþáttur}} = Gamla\ verðið$ $\frac{3.500}{1{,}12} = 3.125kr$

Samsettar prósentur

Ef fleiri en ein hækkun eða lækkun á sér stað, er þægilegt að nota breytiþáttinn.

Vara sem kostaði upphaflega 3000 kr hækkaði um 12%. Skömmu seinna var hún lækkuð aftur um 35%. Hvað kostaði hún eftir þessar breytingar?

Breytiþættirnir eru:

12% hækkun = 1 + 0,2 = 1,2
35% lækkun = 1 – 0,35 = 0,65

$3000 \cdot 1{,}12 \cdot 0{,}65 = 2184kr$

Æfing 4.1

1. Hve mikið er:
   a) 20% af 500 kr
   b) 14% af 3840 kr
   c) 2% af 400 kr
2. Hve mörg prósent eru:
   a) 15 kr af 200 kr
   b) 20 kr af 550 kr
   c) 12 kr af 2000 kr
3. Hver er upphæðin ef:
   a) 40% af henni eru 600 kr
   b) 15% af henni eru 6750 kr
   c) 3% af henni eru 900 kr
4. Finndu breytiþáttinn þegar talað er um:
   a) 30% hækkun á verð
   b) 25% lækkun á verð
   c) 5% lækkun á verð
   d) 120% hækkun á verð
5. Finndu prósentuhækkun eða lækkun í eftirfarandi breytiþáttum:
   a) 1,05
   b) 0,75
   c) 0,995
   d) 2,10

Video 18 Einfaldur prósentureikningur.

Video 19 Breytiþáttur fundinn/búinn til

Video 20 Breytiþáttur hærri/lægri en 1

Video 21 Finna breytiþ. & prósentubr.

6. Hve mörg prósent eru:
- a) 4 af 5
- b) 6 af 18
- c) 12 af 80
- d) 55 af 1100

7. 15% af tölu eru 60
- a) Hve mikið er 10% af tölunni?
- b) Hve mikið er 150% af tölunni?
- c) Hve mikið er 0,5% af tölunni?
- d) Hve mikið er 250% af tölunni?

8. Hver er breytingin í prósentum ef breytiþátturinn er:
- a) 0,99
- b) 1,33
- c) 0,001
- d) 4,05

9. Verð lækkaði úr 1200 kr í 1020 kr.
- a) Finndu breytiþáttinn
- b) Hver er lækkunin í prósentum?

10. Á útsölu er verð á skóm lækkað úr 6500 kr í 4225 kr.
- a) Finndu breytiþáttinn
- b) Hver er lækkunin í prósentum?

11. Verð hækkaði úr 3200 í 4960.
- a) Finndu breytiþáttinn
- b) Hver er hækkunin í prósentum?

12. Finndu prósentuhækkun eða lækkun í eftirfarandi breytiþáttum:
- a) 1,125
- b) 0,888
- c) 2,369
- d) 0,602

13. Finndu breytiþáttinn:

	Gamla verðið	Nýja verðið
a)	2322	2569
b)	4100	3562
c)	5540	7880
d)	2022	1222

14. Hver er breytingin í prósentum?

	Gamla verðið	Nýja verðið
a)	3535	4556
b)	9987	5212
c)	1221	3667
d)	8522	2008

15. Í Flensborg eru 810 nemendur. Af þeim eru 46 í Stæ 162. Hvað eru það mörg prósent?

16. Snúður kostar 155 kr. Hann er seldur á tilboði á 125 kr. Hver er verðbreytingin í prósentum?

17. Guðjón fær 215.000 kr í heildarlaun. Hann þarf að borga 4% í lífeyrissjóð, 35% í skatta og 8,5% í orlofssjóð. Hvað fær hann mikið útborgað?

18. Í versluninni Töff var verð á jakka lækkað um 45%. Hver er afslátturinn í krónum, ef upphaflegt verð á jakkanum var 16.100 kr?

19. Í sömu verslun keypti Sólveig kjól á 12.950 kr. Kjólinn var á 30% aflsætti. Hvert var upphaflegt verð hans?

20. Gunnar fékk 4% launahækkun. Hækkunin var 9.000 kr.
- a) Hver eru laun Gunnars fyrir launahækkunina?
- b) En eftir launahækkunina?

21. Í bæjarfélagi einu bjuggu á síðasta ári 3.650 manns. Í ár eru íbúar orðnir 3.796. Hversu mikil er fjölgunin í prósentum talið?

22. Í öðru bæjarfélagi bjuggu á síðasta ári 5.400 manns. Í ár eru íbúarnir orðnir 5.238. Hversu mikil er fækkunin í prósentum talið?

23. Verð á tölvu er 95.000 kr. Hvað kostar hún ef verðið
- a) hækkar um 12%
- b) lækkar um 18%

24. Þórunn eyddi 12% af laununum sínum í buxur fyrir 4.500 kr, skó á 8.900 kr og peysu á 8.800 kr. Hver voru launin hennar?

25. Palli fær launahækkun upp á 10%. Eftir þá hækkun hefur hann 264.000 kr í mánaðarlaun. Hver voru launin hans fyrir launahækkun?

26. Óli keypti hlutabréf fyrir 35.000 kr. Árið eftir hækkuðu bréfin um 8%, en árið eftir lækkuðu þau um 15%. Hvert er verðgildi bréfanna eftir þessar breytingar?

27. Svana var með 240.000 í laun í byrjun síðasta árs. Í júní fékk hún launahækkun upp á 4%. Síðan varð hún að taka á sig launalækkun í september upp á 12%. Í desember fékk hún svo aftur launahækkun sem nam 11%. Hver eru launin hennar í dag?

28. Hvort er hagstæðara að kaupa kjúkling hjá:
- a) Alla, sem auglýsir 25% lækkun, sparið 300 kr, eða
- b) Bjössa, sem auglýsir 40% lækkun, sparið 560 kr.

29. Kaupmaður kaupir inn vöru og leggur á hana 33%. Síðan gefur hann vini sínum 33% afslátt og segir honum að hann fái vöruna á innkaupsverði. Er það rétt?

30. Virðisaukaskattur er 24%. Hann reiknast á allar vörur sem seldar eru í smásölu. Hvert er útsöluverð á eftirfarandi vörum með virðisaukaskatti?
- a) 15.000 kr
- b) 45.200 kr
- c) 123.600 kr
- d) 1.765.444 kr

31. Sóley rekur skóverslun. Hún var að fá sendingu af ökklaskóm sem kosta í innkaupum 3.000 kr. Hún þarf að leggja á þá 24% virðisaukaskatt og síðan 30% álagninu. Hvað kosta skórnir í versluninni?

32. Alma er með 4 starfsmenn í vinnu. Reiknaðu hvað hver starfsmaður fær mikið útborgað ef staðgreiðsluskattur væri 42,2% og persónuafsláttur 42.205 kr Heildarlaun starfsmannanna eru:
- a) 185.000 kr
- b) 143.500 kr
- c) 187.456 kr
- d) 199.000 kr

Staðgreiðsluskattur reiknast af heildarlaunum og persónuafsláttur er síðan dregin af staðgreiðsluskatti.

33. Hvað myndi það vera mikil aukning í krónum talið, ef ríkisstjórnin ákvæði að hækka skattaálögu úr 42,2% í 45% á eftirfarandi mánaðarlaun:

a) 135.000 kr
b) 267.000 kr
c) 445.500 kr
d) 755.300 kr

34. Fylltu inn í töfluna þær tölur sem vantar (Athugið virðisaukaskatturinn (vsk) er 24%).

Kostnaðarverð	Álagning	Söluverð	Söluverð+ vsk	Afsláttur	Endanlegt verð
750	20%			12%	
	12%	50,4		30%	
1250		1536,7		0%	
125	22%				166,4
	8%	594		4%	

4.2 Vaxtareikningur

Almennt eru vextir miðaðir við eitt ár, skammstafað p.a. (úr lat. Per annum). Upphæðin sem vextir reiknast af nefnist höfuðstóll.

Til þess að reikna 8% vexti af höfuðstól sem er 2.000 kr gerum við:

$$2000 \cdot 1{,}08 = 2.160kr \text{ eða } H \cdot (1 + \%) \text{ eða } H \cdot breytiþáttur.$$

Höfuðstóllinn var 100% í upphafi og hækkar síðan um 8% og er þá orðinn 108% eða með breytiþáttinn 1,08

Ef reikna á vexti af höfuðstólnum í tvö ár getum við gert:

$2000 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}08 = 2.332{,}80kr$ eða $H \cdot breytiþáttur \cdot breytiþáttur$

Ef reikna á vexti af höfuðstólnum í 10 ár setjum við breytiþátt upp í veldi þeirra ára:

$2000 \cdot 1{,}08^{10} = 4.317{,}85kr$ eða $H \cdot breytiþáttur^{ár}$

Til að reikna lækkun notum við sömu aðferð.

Verðfall á bíl er 12% á ári. Hvert er verðgildi bíls sem kostar 2.000.000 kr eftir 1 ár?

$2.000.000 \cdot 0{,}88 = 1.760.000kr$ eða $H \cdot (1 + \%)$ *eða* $H \cdot breytiþátt$

Höfuðstóllinn var 100% í upphafi og lækkar síðan um 12% og er þá orðinn 88% eða með breytiþáttinn b: 0,88

Ef reikna á verðfall af bílnum í tvö ár getum við gert:

$$2.000.000 \cdot 0{,}88 \cdot 0{,}88 = 1.548.800\ kr \quad \text{eða} \quad H \cdot b \cdot b$$

Við getum líka skrifað: $2.000.000 \cdot 0{,}88^{2}$eða $H \cdot b^{ár}$

Ef reikna á verðfall af bílnum í 10 ár setjum við breytiþátt upp í veldi þeirra ára:

$$2.000.000 \cdot 0{,}88^{10} = 557.001{,}95\ kr \text{ eða } H \cdot b^{ár}$$

Æfing 4.2

1. 5.000 kr eru lagðar inn á bankareikning með 7% vöxtum. Hvað er það orðið mikið eftir
a) 1 ár? b) 5 ár? c) 12 ár?

2. Siggi keypti bíl sem kostaði 2.450.000 kr. Verðfall á bílum á Íslandi er 15% á ári. Hvað fær Siggi fyrir bílinn eftir a) 1 ár? b) 3 ár? c) 5 ár?

3. Ef Siggi myndi setja 2.450.000 kr inn á banka, þar sem ársvextirnir væru 8%, hvað ætti hann þá eftir a) 1 ár? b) 3 ár? c) 5 ár?

4. Segjum að Siggi reyni að vera skynsamur og kaupa ódýrari bíl sem kostar 1.200.000 kr og leggja afganginn af 2.450.000 kr inn á banka með 8% vöxtum. Hvað ætti hann þá eftir
a) 1 ár? b) 3 ár? c) 5 ár?

5. Í bæ einum bjó fyrir 5 árum 2.310 manns. Síðan hefur fólksfækkun verið 2,5% á ári.
Hvað búa margir í bænum í dag?

6. Verðbólga var á 10 ára tímabili 5,5%. Hvað kostaði mjólkurlíterinn í lok tímabilsins ef hann kostaði 45 kr í upphafi þess?

7. Í verðkönnun kemur fram að verð á hjólum hefur hækkað fjórum sinnum á síðasta ári. Hækkanirnar námu 4%, 7%, 3,5% og 11%. Hvað kostar hjól í dag sem var á 35.000 kr fyrir hækkanir?

8. Jón er að skoða jakka sem kostar 32.000 kr Hann vill vita hvað jakkinn kostaði fyrir álagningu sem er 33%. Hvernig fer hann að því? Hvað kostaði jakkinn?

9. Ásta fékk 85.000 kr í fermingargjöf. Hvað verður upphæðin orðin há eftir 25 ár ef hún:
  a) Leggur hana inn á venjulegan bankareikning með 6% vöxtum?
  b) Leggur hana inn á hávaxtareikning með 14% vöxtum?
  c) Geymir upphæðina undir koddanum og verðbólga næstu 25 ár mælist 4%

10. Guðjón vann 2.350.000 kr í lottóinu. Hann ákvað að ávaxta peningana á bók með 8,5% vöxtum fyrstu 3 árin. Síðan færði hann alla upphæðina á annan reikning með 11,5 % vöxtum.
Hvað átti hann þá mikið eftir 10 ár?

4.3 Vextir á upphæð hluta úr ári

Ef reikna á vexti af upphæð, sem er á vöxtum hluta úr ári, verðum við að nota t sem er hlutfall tímans úr ári. Hlutfallið getur verið dagar, vikur eða ár. Í vaxtarárinu er 360 dagar og 12 mánuðir.

Við notum vaxtajöfnu til að reikna út vexti $\boldsymbol{V = H \cdot \% \cdot t}$
V = vextir, H = höfuðstóll, % = vaxtaprósenta, t = hlutfall tímans úr ári

$$Vextir = H \cdot \frac{\%}{100} \cdot \frac{dagar}{360} \qquad Vextir = H \cdot \frac{\%}{100} \cdot \frac{mánuðir}{12}$$

Sigrún á 20.000 kr á bankabók sem gefur 12% vexti p.a.
Finndu hvað hún fær í vexti á 10 mánuðum?

$$Vextir = 20.000 \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{10}{12} = 2.000kr.$$

Óli tekur 120.000 kr bankalán á 15% vöxtum p.a. Hann borgar lánið til baka 45 dögum seinna.
Hvað þarf hann að borga í vexti?

$$Vextir = 120.000 \cdot \frac{15}{100} \cdot \frac{45}{360} = 2.250kr.$$

Æfing 4.3

Video 22 Heild Prósenta Hlutur – Þríhyrningurinn

1. Hvað fást miklir vextir af 800.000 kr í 3 mánuði, ef vaxtaprósentan er:
   a) 12% p.a.
   b) 22% p.a.
   c) 60% p.a
   d) 90% p.a

2. Hverjir eru vextirnir á 9 mánaða reikningi með 18% vöxtum p.a, ef höfuðstóllinn er:
   a) 125.000 kr
   b) 220.000 kr
   c) 790.000 kr
   d) 1.230.000 kr

3. Sólveig leggur afmælispeningana sína 45.000 kr. inn á bankabók með 9% vöxtum p.a. Hún tekur upphæðina alla út eftir 10 mánuði. Hvað á hún mikið?

4. Grímur ákveður að kaupa sér bíl. Hann tekur lán uppá 350.000 kr sem ber 22% vexti p.a. Hann borgar lánið til baka 7 mánuðum seinna. Hvað þarf hann að borga mikið?

5. Anna keypti skuldabréf fyrir 700.000 kr. Bankinn borgar 16% vexti p.a. Hún selur skuldabréfin 10 mánuðum seinna. Hvað fær hún fyrir skuldabréfin?

6. Jökull tekur tvö lán. Lán A er uppá 210.000 kr með 19% p.a. vöxtum til 4 mánaða.
Lán B er upp á 110.000 kr með 16% p.a. vöxtum til 10 mánaða.
Af hvoru láninu þarf hann að greiða hærri vexti?

7. Sólrún á tvær bankabækur. Á bók A eru 34.000 kr á 21% vöxtum p.a. sem hafa verið þar í 11 mánuði. Á bók B eru 37.000 kr á 9% vöxtum p.a. sem hafa verið þar í 7 mánuði. ?
Hvor bókin gefur hærri heildarupphæð?

8. Hverjir eru vextirnir af 300.000 kr ef vaxtaprósentan er 14% og tíminn:

a) 35 dagar
b) 42 dagar
c) 179 dagar
d) 223 dagar

9. Svanur geymir lottóvinninginn sinn 570.000 kr á reikningi með 12% vöxtum p.a. í 189 daga. Hvað á hann mikið þegar hann tekur upphæðina út?

10. Gréta þarf að taka skuldabréf uppá 870.000 kr sem ber 24% vexti p.a. Hún borgar það til baka eftir 39 daga. Hvað þarf hún að borga mikið?

Þegar við þurfum að telja daga í mánuði reiknast hver mánuður sem 30 dagar, þótt þar sé verið að reikna út vexti fyrir janúar t.d. sem telur 31 dag eða febrúar sem telur oftast 28 daga.

Hve margir vaxtadagar eru frá 20. janúar til 31 mars?

Janúar	30-20	= 10 dagar
Febrúar	30	= 30 dagar
Mars	30	= 30 dagar
Alls:		= 70 dagar

11. 450.000 kr eru lagðar inn á reikning með 9% vöxtum p.a. þann 10. Júní. 12 ágúst sama ár er upphæðin tekin út. Hvað eru vextirnir orðnir háir?

12. Áslaug tók lán upp á 1.220.000 kr þann 20. apríl sem hún borgaði til baka 14. september, sama ár. Ársvextir af láninu voru 8% p.a.. Hvað þurfti hún að endurgreiða mikið?

13. Sara stofnaði bankareikning sem bar 7,5% vexti p.a. þann 4 maí 2009. Þá setti hún inn á reikninginn 135.000 kr. 10. ágúst, sama ár, setti hún aftur inn á reikninginn 75.000 kr. Hvað á hún mikið á reikningnum 16. október 2009?

14. Svanur tók lán þann 15. febrúar uppá 670.000 kr fyrir bíl sem hann keypti. Lánið bar 22,5% vexti p.a. og var því afar óhagstætt. Því ákvað Svanur að greiða 230.000 kr inn á lánið 12 maí sama ár. Síðan borgaði hann lánið upp þann 3. október. Hvað þurfti Svanur að borga þá?

15. Rúna var að skoða yfirlit yfir bankareikning sem hún stofnaði í janúar 2009. Vextirnir á honum voru 18,5% p.a. 1 jan. leggur hún inn 55.000 kr. 13. mars leggur hún inn 47.000 kr. 7. maí leggur hún inn 39.000 kr. 11. ágúst tekur hún út 42.000 kr.
Hvað á hún mikið á reikningnum í lok árs 2017? Settu þetta upp í töflu:

Dagsetning	**Innborgun**	**Útborgun**	**Dagar**
01.01.2017	55.000		
13.03.2017	47.000		
07.05.2017	39.000		
11.08.2017		42.000	
31.12.2017 (staðan)			**360**

16. Annar bankareikningur sem Rúna á, ber 12% vexti.
Hvað á hún mikið á þessum reikningi í lok árs? Settu þetta upp í töflu:

Dagsetning	**Innborgun**	**Útborgun**	**Dagar**
01.01.2017	12.000		
10.04.2017	52.000		
07.07.2017	39.000	21.000	
21.10.2017	31.000		
31.12.2017 (staðan)			**360**

4.4 Vextir, prósenta, höfuðstóll

Ef við höfum vextina (V) en þurfum að finna prósentuna (%), höfuðstólinn (H) eða tímann (t).

Við notum vaxtajöfnu til að reikna út vexti $\boldsymbol{V = H \cdot \% \cdot t}$
Ef við þurfum að finna höfuðstólinn verður jafnan svona:

$$Vextir = H \cdot \frac{\%}{100} \cdot \frac{dagar}{360} \quad => \quad H = Vextir \cdot \frac{360}{dagar} \cdot \frac{100}{\%}$$

Dæmi: Hver er höfuðstóllinn ef vextirnir eru 600 kr í 36 daga og prósentan 12% p.a.?

$$H = 600 \cdot \frac{360}{36} \cdot \frac{100}{12} \qquad H = 50.000kr$$

Ef við þurfum að finna prósentuna verður jafnan svona:

$$\% = Vextir \cdot \frac{360}{dagar} \cdot \frac{100}{Höfuðstóll}$$

Dæmi: Hve mörg prósent eru vextir p.a. ef 375 kr fást í vexti af 15.000 kr í 60 daga?

$$\% = 375 \cdot \frac{360}{60} \cdot \frac{100}{15.000} \qquad \% = 15\%$$

Ef við þurfum að finna dagana verður jafnan svona:

$$dagar = Vextir \cdot \frac{360}{Höfuðstóll} \cdot \frac{100}{\%}$$

Dæmi: Hve lengi voru 12.000 kr á reikningi með 25% vöxtum ef vextirnir voru 750 kr?

$$d = 750 \cdot \frac{360}{12.000} \cdot \frac{100}{25} \qquad dagar = 90\ dagar$$

Æfing 4.4

1. Vextir af 12.000 kr í 11 mánuði eru 1.980 kr. Hve mörg prósent eru ársvextirnir?

2. Vextir af 60.000 kr eru 1.200 fyrir einn og hálfan mánuð. Finndu vaxtaprósentuna.

3. Reikningur ber 6% vexti p.a. Af hvaða höfuðstól fást 500 kr í vexti í tvo mánuði?

4. Ólöf lokaði bankareikningi sem hún átti og fékk borgað í vexti 2.600 kr. Höfuðstóllinn hafði staðið óhreyfður í 300 daga á 8% vöxtum. Hver var höfuðstóllinn?

5. Sigrún fékk borgaðar 300 kr í vexti af bók sem hún átti. Bókin bar 12% vexti p.a. og innistæðan var 45.000 kr. Hvað hafði upphæðin staðið lengi á bókinni?

6. Sigrún fékk borgaðar 2.376 kr af öðrum reikningi sem bar 18% vexti. Þar var innistæðan 66.000 kr. Hvað hafði upphæðin verið lengi inn á þeim reikningi?

7. Hve hár er höfuðstóllinn ef 5 mánaða vextir eru 1.240 kr. og vextirnir 8%?

8. Hve hár er höfuðstóllinn ef 125 daga vextir eru 875 kr og vextirnir 12%?

9. Hve mörg prósent eru ársvextir ef 220 kr fást af 8.000 kr á 3 mánuðum?

10. Hve mörg prósent eru ársvextir ef 560 kr fást af 12.000 kr eftir 240 daga?

4.5 Vísitala

Hvað er vísitala? Vísitala er eins konar stuðull sem notaður er til að leiðrétta kostnað sem hefur minnkað eða aukist vegna utanaðkomandi áhrifa s.s. verðbólgu. Ef við t.d. hefðum keypt okkur ís árið 1990 á 120 kr. getum við skoðað hvað sams konar ís myndi kosta í dag með því að margfalda 120 kr. með prósentuhækkun vísitölunnar á milli þessara ára.

Vísitölur eru stilltar á 100 stig, eins og það er kallað, þegar þær eru fyrst reiknaðar út. Með þessu er átt við að ákveðið sé að upphafsgildið eða grunnárið sé 100. Talan 100 er einfaldlega valin vegna þess að hún gerir reikninga þægilegri síðar meir.

Ef við berum saman verð á ákveðinni vöru yfir nokkurra ára tímabil, sjáum við hvort verðið er að hækka eða lækka.

Dæmi 1:

Ár	2001	2004	2007
Verð kr.	100	123	95

Ef við miðum við árið 2001, þá hefur verðið hækkað um 23 stig árið 2004 en lækkað um 5 stig árið 2007. Vísitalan árið 2004 er því 123 stig en 95 stig árið 2007, miðað við að árið 2001 sé grunnár.

Við erum ekki alltaf svo heppin að viðmiðunarverðið sé 100. Þá þurfum við að breyta því svo auðveldara sé að miða við það.

Dæmi 2:

Hefur verð á mjólkurlítra hækkað jafn mikið og verð á kartöflum á tímabilinu 1997-2009?

Ár	Mjólkulíter	Kartöflur 1kg
1997	50 kr	80 kr
2001	70 kr	96 kr
2005	85 kr	120 kr
2009	90 kr	140 kr

Til að finna hækkunina breytum við verðinu fyrst í prósentur af verðinu 1997, því það er grunnárið. Verðið fyrir grunnárið (árið sem miðað er við) er alltaf 100%.

Ár	Mjólk (verð)	Mjólk (%)	Kartöflur (verð)	Kartöflur (%)
1997	50 kr	$\frac{50}{50} \cdot 100 = 100\%$	80 kr	$\frac{80}{80} \cdot 100 = 100\%$
2001	70 kr	$\frac{70}{50} \cdot 100 = 140\%$	96 kr	$\frac{96}{80} \cdot 100 = 120\%$
2005	85 kr	$\frac{85}{50} \cdot 100 = 170\%$	120 kr	$\frac{120}{80} \cdot 100 = 150\%$
2009	90 kr	$\frac{90}{50} \cdot 100 = 180\%$	140 kr	$\frac{140}{80} \cdot 100 = 175\%$

Nú sjáum við að mjólkin hefur hækkað meira en kartöflurnar. Til þess að breyta prósentutölunum í vísitölur tökum við einfaldlega prósentumerkið í burtu.

Ár	Mjólk vísitala	Kartöflur vísitala
1997	100	100
2001	140	120
2005	170	150
2009	180	175

Á árunum 1997-2009 hefur mjólkurlíter hækkað um 80 vísitölustig en kartöflur um 75 vísitölustig.

Ef við höfum vísitölustigin getum við reiknað út verð.

Dæmi 3:

Ár	1997	2001	2005	2009
Visitala	100	114	122	128

1. Rjómapeli kostaði 125 kr árið 1997. Hvað kostaði hann 2009?
   Verðið 2009 er $\frac{128}{100}$ af verðinu 1997 þ.e. $\frac{128}{100} \cdot 125 = \mathbf{160}\boldsymbol{kr}$
2. 1 kg af eplum kostaði 138 kr 2005. Hvað kostar það 2009?
   Verðið 2009 er $\frac{128}{122}$ af verðinu 2005 þ.e. $\frac{128}{122} \cdot 138 = \mathbf{145}\boldsymbol{kr}$

Æfing 4.5

1. Í töflunni sjáum við vísitölu yfir fjölda viðskiptavina hjá ferðaskrifstofu.

Ár	1997	2001	2005	2009
Vísitala	100	108	124	143

a) Hvaða ár er valið sem grunnár?
b) Um hve mörg vísitölustig hækkaði vísitalan frá 1997 – 2005?
c) Um hve mörg prósent fjölgaði viðskiptavinum frá 2001 – 2009?
d) Um hve mörg prósent fjölgaði viðskiptavinum frá 2005 – 2009?

2. Á töflunni sjáum við vísitölu yfir fjölda gesta í sundlaug í Hafnarfirði.

Ár	1999	2002	2005	2008
Vísitala	100	112	128	136

a) Hvaða ár er valið sem grunnár?
b) Um hve mörg vísitölustig hækkaði vísitalan frá 2002 – 2008?
c) Um hve mörg prósent fjölgaði gestum frá 1999 – 2008?
d) Um hve mörg prósent fjölgaði gestum frá 2005 – 2008?

3. Taflan sýnir verðvísitölu fyrir japanska bíla með viðmiðunarárið 1990

Ár	1990	1998	2004	2008
Vísitala	100	116	132	152

a) Nýr Subaru kostaði 2.100.000 kr árið 1990. Hvað ætti samskonar bíll að kosta 2008?
b) Ný Toyota kostaði 1.800.000 kr árið 1998. Hvað ætti samskonar bíll að kosta 2008?
c) Ný Mazda kostaði 2.200.000 kr árið 2004. Hvað ætti samskonar bíll að kosta 2008?

Video 24 Vísitölur 1

Video 23 Vísitölur 2

4. Taflan sýnir verð á samlokum.

Ár	1997	2001	2005	2009
Verð í krónum	188	195	220	216

a) Lýstu verðþróuninni með því að búa til vísitölutöflu.
b) Hver verður vísitalan fyrir 2009 ef viðmiðunarárið er 2005?
c) Hver verður vísitalan fyrir 2009 ef viðmiðunarárið er 2001?

5. Taflan sýnir verð á tómötum.

Ár	1997	2001	2005	2009
Verð í krónum	145	176	198	216

a) Lýstu verðþróuninni með því að búa til vísitölutöflu.
b) Hver verður vísitalan fyrir 2009 ef viðmiðunarárið er 2001?
c) Hver verður vísitalan fyrir 2009 ef viðmiðunarárið er 2005?

6. Taflan sýnir verð á geisladiskum

Ár	1999	2002	2005	2008
Verð í krónum	1550	1780	1990	2330

a) Lýstu verðþróuninni með því að búa til vísitölutöflu.
b) Hver verður vísitalan fyrir 2008 ef viðmiðunarárið er 2002?
c) Hver verður vísitalan fyrir 2008 ef viðmiðunarárið er 2005?

7. Taflan sýnir vísitölu fyrir reiðhjól með grunnárið 1990

Ár	1990	1995	2000	2005
Vísitala	100	123	134	153

a) Barnahjól kostuðu 3.600 kr 1990. Hvað ætti sambærilegt hjól að kosta 2005?
b) Karlmannshjól kostuðu 12.300 kr 1995. Hvað ætti sambærilegt hjól að kosta 2005?
c) Kvenmannshjól kostuðu 14.800 kr 2000. Hvað ætti sambærilegt hjól að kosta 2005?

8. Taflan sýnir vísitölu fyrir íþróttagalla með grunnárið 1998

Ár	1998	2002	2006	2010
Vísitala	100	116	125	144

a) Barnagallar kostuðu 2.100 kr 1998. Hvað kostar sambærilegur galli 2010?
b) Karlmannsgallar kostuðu 6.900 kr 2006. Hvað kostar sambærilegur galli 2010?
c) Kvenmannsgallar kostuðu 4.900 kr 2002. Hvað kostar sambærilegur galli 2006?

9. Taflan sýnir verð á 1 kg. af eplum og perum í krónum talið.

Ár	1998	2002	2006	2010
Verð á eplum	112	125	142	155
Verð á perum	144	159	166	173

a) Lýstu hækkununum með vísitölutöflu
b) Hvor hefur hækkað meira ef viðmiðunarárið er 1998?
c) Hvor hefur hækkað meira ef viðmiðunarárið er 2002?

10. Taflan sýnir tímakaup hjá stelpum og strákum í unglingavinnu.

Ár	Strákar	Stelpur
1999	765 kr	744 kr
2003	778 kr	769 kr
2006	801 kr	801 kr
2009	840 kr	848 kr

a) Lýstu hækkununum með vísitölutöflu
b) Hvor er að hækka meira ef viðmiðunarárið er 1999?
c) Hvor er að hækka meira ef viðmiðunarárið er 2003?

4.6 Upprifjunardæmi

Æfing 4.6

1. Hve mikið er:

a) 5% af 400 kr

b) 120% af 300 kr

c) 0,2% af 8400 kr

d) 1,22% af 1300 kr

2. Hve mörg prósent eru:

a) 115 kr af 920 kr

b) 220 kr af 110 kr

c) 25 kr af 1560 kr

d) 120 kr af 30 kr

3. Hver er upphæðin ef:

a) 35% af henni er 3325 kr

b) 2% af henni er 102 kr

c) 0,4% af henni er 14,40 kr

d) 230% af henni er 17250 kr

4. Geisladiskur kostar 2680 kr. út úr búð. Hvað kostar diskurinn ef:

a) gefinn er 15% afsláttur?

b) Hann hækkar um 24%?

c) Hann lækkar fyrst um 8% og síðan aftur um 22%?

d) Hann hækkar um 30% og síðan er gefinn 30% afsláttur?

5. Agnes keypti sér úr sem kostaði með 35% afslætti 6630 kr. Þórir keypti sér líka úr sem kostaði 26.224 kr með 12% afslætti.

a) Hvort þeirra fékk meiri afslátt í krónum talið?

b) Hvað fengu þau mörg prósent afslátt samtals fyrir bæði úrin?

6. Miðaverð í bíó er 1050 kr. Gefinn er 22% afsláttur á þriðjudögum. Hvað kosta miðarnir þá á þriðjudögum?

7. Kalli kaupmaður kaupir jakka hjá heildsala á 8400 kr í janúar. Hann leggur 55% ofan á innkaupsverðið. Í mars fer jakkinn á útsölu og er afslátturinn 30%. Í apríl gefur Kalli 15% aukaafslátt á jakkann. Hvað kostar jakkinn þá í apríl?

8. Árið 2010 voru voru íslenskar konur 15 ára og eldri 120.255 talsins. Af þeim voru 40.155 giftar. Hvað eru það mörg prósent?

9. Hildur er að skoða launaseðilinn sinn. Heildarlaunin eru 324.100 kr. Af því eru teknar 12.964 kr í lífeyrissjóð, 26.997 kr í orlof og 120.241 kr í staðgreiðslu skatta.

a) Hve mörg prósent eru tekin í lífeyrissjóð?

b) Hve mörg prósent eru tekin í orlof?

c) Hve mörg prósent eru tekin í staðgreiðslu?

d) Hvað fær Hildur mörg prósent af heildalaununum sínum útborguð?

10. 120.000 kr eru lagðar inn á bankareikning.

a) Hverjir eru vextirnir eftir 4 ár ef vaxtarprósentan er 7,4%?

b) Hverjir eru vextirnir eftir 12 ár ef vaxtarprósentan er 2,3%?

c) Hverjir eru vextirnir eftir 10 mánuði ef vaxtarprósentan er 5,5%?

d) Hverjir eru vextirnir eftir 7 mánuði ef vaxtaprósentan er 12,6%?

e) Hverjir eru vextirnir eftir 288 daga ef vaxtarprósentan er 22,3%?

f) Hverjir eru vextirnir eftir 144 daga ef vaxtarprósentan er 17,5%?

g) Hverjir eru vextirnir þann 3 okt. ef upphæðin er lögð inn þann 5 júlí og vaxtarprósentan er 9,3%?

h) Hverjir eru vextirnir þann 12 maí. ef upphæðin er lögð inn þann 22 feb og vaxtarprósentan er 11,4%?

11. Gunnar keypti sér nýjan bíl á 2,4 milljónir.

a) Hvað fær hann fyrir bílinn eftir 6 ár ef afföllin af bílnum eru 14% á ári?

b) Hvað fær hann fyrir bílinn eftir 4 ár ef afföllin af bílnum eru 16,5% á ári?

12. Taflan sýnir verð í krónum á 1 kg af ávöxtum og grænmeti.

Ár	2001	2004	2007	2010
Gulrætur	336	365	388	412
Kartöflur	122	136	146	112
Bananar	202	234	268	283
Baunir	369	354	395	366
Tómatar	316	334	374	410

a) Lýstu verðinu með vísitölutöflu.

b) Hvar er hækkunin mest?

c) Hvar er lækkunin mest?

d) Hvar er hækkunin mest ef viðmiðunarárið er 2004?

5. Tölfræði

Hvað er tölfræði? Tölfræði er t.d.:

1. Gagnasöfnun

- Viðveruskráning
    - Dæmi: Innan
- Skoðannakannanir
    - Dæmi: Hringt er í hóp af fólki og það spurt spurninga um ákveðið efni s.s. hvaða stjórnmálaflokk það kýs. Út frá þeim upplýsingum er svo dregin ályktun um stjórnmálaskoðanir Íslendinga í heild. Þar sem ekki er hægt að hringja í alla er tekið úrtak úr þýðinu.

2. Flokkun gagna

- Tíðnitöflur
- Prósentutöflur

3. Spurningum svarað

- Meðaltal, miðgildi og tíðasta gildi
- Lægstu og hæstu gildi

5.1 Meðaltal, miðgildi, tíðasta, lægsta og hæsta gildi

Meðaltal

Meðaltal finnum við með því að leggja saman öll gildi í ákveðnu safni og deila með fjölda þeirra.

Dæmi: þyngd nokkurra nemanda í kílóum er þessi: 55 62 65 67 74

1. Fjöldi nemenda er = 5
2. Summa þyngdarinnar = (65+ 55+ 62+ 74+ 67) kg = 323 kg
3. Deilum með fjöldanum í summuna
4. Meðaltal $= \frac{Summa}{Fjöldi} = \frac{323}{5} = 64{,}6kg$
5. Svar: meðalþyngd nemenda er 64,4 kg.

Miðgildi

Miðgildi finnum við með því að raða tölunum eftir stærð. Miðgildi í dæminu um þyngd nemenda er þá talan í miðjunni.

55 62 **65** 67 74

Ef við notum dæmið að ofan er talan **65** miðgildið því tvær tölur voru fyrir ofan hana og tvær fyrir neðan.

Þegar fjöldi talnanna í safninu er jöfn tala, höfum við tvær tölur í miðjunni og finnum síðan meðatal þessara talna.

3 5 **8** **12** 14 16

Miðgildi: (8+12)/2 = 10 . Miðgildið er því 10 hér.

Tíðasta gildi

Tíðasta gildið er sú tala sem kemur oftast fyrir.

Dæmi: Hvaða tala kemur oftast fyrir í talnasafninu: 2, 4, 6, 4, 5, 3, 2, 4

Við setjum þetta upp í töflu. Það er ljóst að talan 4

kemur oftast fyrir eða 3 sinnum. Talan 2 kemur 2 sinnum og talan

3, 5 og 6 aðeins einu sinni. Því er talan 4 tíðasta gildi safnsins.

Tala	Tíðni
2	2
3	1
4	**3**
5	1
6	1
	8

Tíðasta gildið getur verið fleiri en ein tala.

Dæmi: Hvaða tala kemur oftast fyrir í safninu: 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 8

Svar: 4 og 6.

Tala	Tíðni
2	2
3	0
4	**3**
5	0
6	**3**
7	0
8	1
	9

Tíðasta gildið getur líka verið ekkert.

Dæmi: Hvaða tala kemur oftast fyrir í safninu: 2, 4, 6, 8

Svar: engin.

Lægstu og hæstu gildin

Lægsta gildið í hverju safni er lægsta talan sem kemur fyrir í safninu og hæsta gildið er einfaldlega hæsta talan sem kemur fyrir í safninu. Ef við skoðum aftur dæmið um þyngd nemenda

55 62 65 67 74

þá er lægsta gildið þar 55 en hæsta gildið er 74

Æfing 5.1

1. Reiknaðu meðaltal talnanna:

a) 11, 14, 16, 18, 19, 20
b) 123, 145, 167, 178, 199, 202, 245
c) 1020, 1234, 1289, 1377, 1445, 1567, 1342, 1263.

2. Eftirfarandi upplýsingar sýna hæð nemenda í bekk einum í sentimetrum:
158 167 178 172 179 182 148 159 163 166
Reiknaðu meðaltalið með einum aukastaf.

3. Finndu miðgildi talnanna:

a) 13, 3, 7, 19, 11, 14, 10
b) 45, 32, 84, 62, 16, 93

4. Finndu tíðasta gildi talnanna:

a) 12, 17, 12, 11, 14, 11, 16, 12, 14
b) 34, 89, 23, 45, 34, 89, 23, 34, 45, 86, 43

5. Hver eru hæstu og lægstu gildi talnanna:

a) 12, 17, 12, 11, 14, 11, 16, 12, 14
b) 34, 89, 23, 45, 34, 89, 23, 34, 45, 86, 43

6. Talnasafn: 4, 7, 13, 5, 9, 2, 1, 8, 10

a) Hvað eru tölurnar margar?
b) Raðaðu þeim eftir röð í töflu.
c) Hver er summa talnanna?
d) Hvert er meðaltal talnanna?
e) Hvert er miðgildið?
f) Hvert er hæsta og lægsta gildið?

7. Talnasafn: 44, 71, 13, 53, 9, 22, 18, 82, 10, 28

a) Hvað eru tölurnar margar?
b) Raðaðu þeim eftir röð í töflu.
c) Hver er summa talnanna?
d) Hvert er meðaltal talnanna?
e) Hvert er miðgildið?
f) Hvert er hæsta og lægsta gildið?

8. Talnasafn: 122, 75, 12, 43, 3, 32, 91, 67, 55, 123

a) Hvað eru tölurnar margar?
b) Raðaðu þeim eftir röð í töflu.
c) Hver er summa talnanna?
d) Hvert er meðaltal talnanna?
e) Hvert er miðgildið?
f) Hvert er hæsta og lægsta gildið?

9. Fóstra á leikskóla er 32 ára. Önnur fóstra á sömu deild er 35 ára. Börnin á deildinni eru 2 ára, 4 ára, 3 ára, 2 ára, 4 ára, 2 ára og 4 ára.

a) Finndu meðaltal og miðgildi aldurs þeirra sem eru á deildinni.
b) Hvor mælingin lýsir betur aldri þeirra sem eru í leikskólanum?

10. Á foreldrafundi nýnema í Flensborg var aldur foreldra eftirfarandi:

Foreldrar	
Karl 45 ára	Halldór 51 ára
Áslaug 35 ára	Þóra 37 ára
Árni 44 ára	Gunnar 48 ára
Gréta 40 ára	Fróði 55 ára
Svana 59 ára	Nína 40 ára

Finndu meðaltal og miðgildi fyrir:

a) Aldur kvennanna
b) Aldur mannanna
c) Aldur allra foreldranna

11. Í fyrirtækinu Rún eru laun starfsmanna þessi:

230.000, 220.000, 245.000, 260.000, 145.000, 630.000, 210.000

a) Hvert er meðaltal teknanna?
b) Hvert er miðgildi teknanna?
c) Hvor talan gefur betri mynd af tekjum starfsmanna?

12. Búðu til dæmi þar sem 3 ólíkar tölur hafa meðaltalið 6

13. Búðu til dæmi þar sem 5 ólíkar tölur hafa meðaltalið 20.

5.2 Meðaltal með tíðni

Stundum fáum við sömu töluna oftar en einu sinni. Þá er gott að raða niðurstöðunum í töflu.

Dæmi: Þyngd nemenda í bekk einum er þessi::

55 62 62 65 67 67 67 67 74 74

Þá þurfum við að setja niðurstöðurnar upp í töflu

x (þyngd)	**Talning**	**Fjöldi f**	$\boldsymbol{x \cdot f}$
55	I	1	55*1 = 55
62	II	2	62*2 = 124
65	I	1	65*1 = 65
67	IIII	4	67*4 = 268
74	II	2	74*2 = 148
Alls	**10**	**660**	

Dálkurinn x*f er margfeldi af þyngdinni og fjöldanum eða tíðninni eins og við köllum það.

Til að finna meðaltal þyngdarinnar í þessum bekk, leggjum við saman x*f tölurnar og fáum 660.

$$Meðaltal = \frac{Summan\ af\ (x \cdot f)}{Fjöldi} = \frac{660}{10} = 66kg.$$

Annað dæmi: Hér eru einkunnir 32 nemenda í prófi.

x (einkunn)	f (tíðni)	$x \cdot f$
1	2	2
2	1	2
3	0	0
4	3	12
5	8	40
6	6	36
7	5	35
8	4	32
9	1	9
10	2	20
	32	188

Meðaltal fyrir þennan hóp reiknum við einnig með því að margfalda $x \cdot f$ eða einkunn * tíðni og síðan leggjum við það síðan saman.

$$Meðaltalið = \frac{188}{32} = 5{,}9$$

Æfing 5.2

1. Talnasafn: 1, 4, 8, 3, 3, 5, 4, 3, 2, 5

a) Raðaðu tölunum eftir röð í töflu.
b) Búðu til talningadálk og tíðnidálk með fjöldanum.
c) Búðu til dálk fyrir $x \cdot f$ þar sem þú margfaldar töluna með tíðni hennar.
d) Hvert er meðaltal talnanna?
e) Hvert er miðgildið?
f) Hvert er hæsta og lægsta gildið?

2. Í prófi í stærðfræði varð niðurstaðan þessi:

7	9	10	7	8	9	9	10	8
8	6	7	9	10	8	8	10	8

Raðaðu þessum upplýsingum í töflu með dálki fyrir einkunn, talningu, tíðni og $x \cdot f$ og reiknaðu meðaltal einkunna á prófinu.

3. Á enskuprófi urðu einkunnir eins og sýnir í töflunni að neðan.

2	1	8	5
4	7	6	6
7	6	4	4
6	4	5	8
4	9	5	9
9	6	7	5
6	3	5	6

a) Gerðu tíðnitöflu með dálk fyrir einkunn, talningu, tíðni og $x \cdot f$.
b) Reiknaðu meðaltal einkunna á prófinu
c) Finndu miðgildi einkunna í prófinu
d) Finndu hæsta og lægsta gildið
e) Finndu tíðasta gildið

4. Á öðru prófi voru niðurstöður eftirfarandi

1	4	3	6
4	4	3	5
4	7	1	4
3	5	1	4
3	2	4	3
3	2	7	1

a) Gerðu tíðnitöflu með dálk fyrir einkunn, talningu, tíðni og $x \cdot f$.
b) Reiknaðu meðaltal einkunna á prófinu
c) Finndu miðgildi einkunna í prófinu
d) Finndu hæsta og lægsta gildið
e) Finndu tíðasta gildið

5. Á lagernum í versluninni Skóhorninu var eigandinn að gera vörutalningu.

Tegund	Fjöldi	Verð
Herraskór	6	3.000
Dömuskór	9	4.500
Stígvél	12	1.500
Barnaskór	8	2.100
Gúmmískór	4	900
Strigaskór	7	1.800
Inniskór	5	400
Gönguskór	4	5.400

Reiknaðu meðalverð á innkaupaverði skópars í versluninni.

6. Sama stærðfræðiprófið var lagt fyrir fimm bekki. Niðurstaðan var þessi:

Bekkur	Fjöldi nemenda	Meðaleinkunn
A	22	5,66
B	18	5,9
C	27	6,1
D	29	5,75
E	24	5,88

Reiknaðu meðaltal einkunna úr öllum bekkjunum.

5.3 Tíðnidreifing

Þegar gögnum er safnað er mikilvægt að vanda sig. Ein mistök geta gert könnunina algjörlega ómarktæka. Síðan þarf að flokka gögnin, ýmist eftir stærð, stafrófsröð eða hvaða flokkunaraðferð sem við kjósum. Til þess að flokka gögn, notum við tíðnitöflu með tíðnidálki og prósentudálki. Prósentudálkurinn, sem einnig kallast hlutfallsleg tíðni, segir til um hve stór hluti hverrar tíðni er í ákveðnum flokki.

Dæmi: Hér eru einkunnir nemenda í stærðfræðiprófi

5	4	7	2	5	6	6	8
6	4	10	6	9	8	5	5
5	10	5	5	7	7	1	4
7	7	5	8	1	8	6	6

Við búum til tíðnitöflu.

			Hlutfallstíðni	
X	**Talning**	**tíðni f**	**hlutfall**	**prósenta**
1	II	2	2/32	6,3%
2	I	1	1/32	3,1%
3		0	0/32	0,0%
4	III	3	3/32	9,3%
5	IIII III	8	8/32	25,0%
6	IIII I	6	6/32	18,8%
7	IIII	5	5/32	15,6%
8	IIII	4	4/32	12,5%
9	I	1	1/32	3,1%
10	II	2	2/32	6,3%
Alls		**32**		**100%**

Hér er búið að raða tölunum skipulega í heild til að hægt sé að svara spurningum s.s hvað voru mörg prósent fyrir ofan 5? Eða hvað voru mörg prósent með 10?

Taflan sýnir t.d. að 25% nemenda voru með 5. Einnig að 6,3% þeirra voru með 10. Á sama hátt getum við flokkað eftir tegundum t.d. gosdrykkja.

Dæmi: Kannað var hvaða gosdrykki landsmenn drykkju helst. Niðurstöðurnar voru svona:

Tegund	**tíðni f**	**hlutfall**	**prósenta**
Coce	200	200/1000	20%
Pepsi	150	150/1000	15%
Sprite	100	100/1000	10%
Appelsín	150	150/1000	15%
Toppur	400	400/1000	40%
Alls	1000		100%

Video 25 Tíðnidreifing

Æfing 5.3

1. Taflan sýnir aldur nemenda í bekk einum.

18	17	18
19	17	17
17	19	16
16	16	19
19	17	17
18	18	18

a) Búðu til tíðnitöflu með hlutfallstíðni.
b) Hvað eru mörg prósent nemenda 16 ára?
c) Hvað eru mörg prósent nemenda 17 ára?
d) Hver er meðalaldur nemenda í bekknum (svaraðu með einum aukastaf)

2. Gefið er talnasafnið

2	3	6
2	4	3
5	3	2
3	2	7
7	6	6
9	4	4
6	5	6

a) Búðu til tíðnitöflu með tíðni, $x \cdot f$ og hlutfallstíðni.
b) Reiknaðu meðaltalið
c) Finndu miðgildið
d) Finndu tíðasta gildið

3. Í nokkrum bekkjum í Flensborg var skóstærð nemenda mæld.

Skónúmer	Tíðni
37	13
38	23
39	29
40	21
41	15
42	24
43	28
44	16
45	6

a) Gerðu tíðnitöflu með dálk fyrir hlutfallstíðni og $x \cdot f$.
b) Hve mörg prósent nemenda voru í skóstærð 40 og stærra?
c) Hve mörg prósent nemenda voru í skóstærð 39 og minna?
d) Reiknaðu meðalskóstærð nemenda.

4. Í könnun einni var tannheilsa unglinga athuguð. Taflan sýnir hversu margar skemmdar tennur hver unglingur var með.

1	3	7	2	0
4	2	5	1	3
2	2	3	2	0
0	1	2	2	3
0	0	3	3	4
4	5	1	1	1
3	3	0	4	1

a) Gerðu tíðnitöflu með tíðni, talningu, $x \cdot f$ og hlutfallstíðni.
b) Hve mörg prósent voru með enga skemmd?
c) Hve mörg prósent voru með 2 skemmdir eða meira?
d) Hvert var meðaltal skemmdra tanna hjá unglingunum?

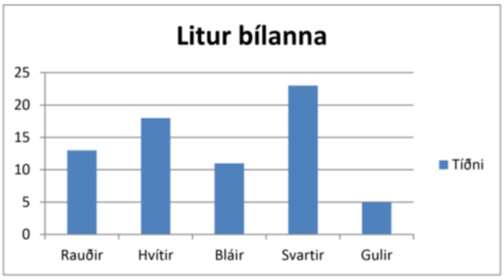
5.4 Gröf - Að teikna súlurit

Þegar við viljum sýna greinilega hvernig gögnin okkar liggja er gott að setja þau upp í gröf. Mynd sýnir oft betur en tölur hvort um t.d. hækkun eða lækkun er að ræða. Algengustu gröfin sem notuð eru í tölfræði eru súlurit og línurit. Í báðum þessum gröfum eru tveir ásar, annar láréttur og hinn lóðréttur. Á lárétta ásnum koma fram mismunandi breytugildi en lóðrétti ásinn sýnir tíðnina.

Dæmi: Við könnun komu fram eftirfarandi litir á bílum á bílastæði skólans:

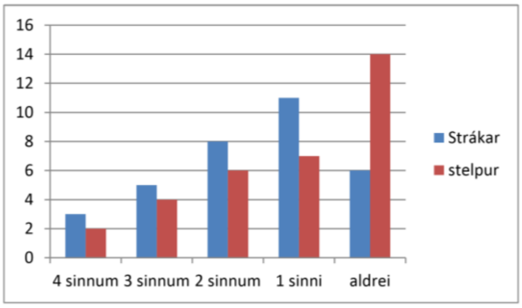
13 rauðir, 18 hvítir, 11 bláir, 23 svartir, 5 gulir.

Við setjum þetta í súlurit



Við getum einnig borið saman tvær breytur eins og t.d. stelpur og stráka. Spurt í bekk einum: Hvað ferð þú oft í mánuði í bíó?

Niðurstöðurnar voru settar í tvöfalt súlurit



Æfing 5.4

1. Spurt var í stærðfræðitíma: Hver er uppáhaldsliturinn þinn?

Litur	Tíðni
gulur	6
rauður	9
grænn	5
blár	7

Teiknaðu súlurit fyrir tíðnina

2. Nemendur í bekk einum reyndu að giska á aldur kennara sins.

Aldur	Tíðni
44 ára	11
45 ára	14
46 ára	13
47 ára	16
48 ára	9

Teiknaðu súlurit fyrir tíðnina.

3. Í könnuninni „Hlustað á nemendur“ svöruðu nemendur spurningunni „Finnst þér gaman í stærðfræði?“ á eftirfarandi hátt.

Svar	Stelpur	Strákar
alltaf	68%	62%
stundum	17%	24%
sjaldan	9%	7%
aldrei	6%	7%
	100%	100%

Teiknaðu tvöfalt súlurit fyrir tíðnina.

4. Spurt var hvort nemendur reyktu:

Svar	Stelpur	Strákar
Já	9%	10%
stundum	17%	13%
nei	71%	69%
vil ekki svara	3%	8%
	100%	100%

Teiknaðu tvöfalt súlurit fyrir tíðnina.

5. Í poka A eru 3 gular, 5 rauðar, 8 grænar og 6 bláar kúlur. Í poka B eru 4 gular, 5 rauðar, 3 grænar og 7 bláar kúlur. Teiknaðu tvöfalt súlurit til að lýsa þessu.

6. Búðu til tíðnitöflu með prósentutíðni og notaðu þær tölur til að gera súlurit.

2	3	6
4	4	3
5	5	2
4	2	3
3	6	6
4	1	6
6	5	6

7. Búðu til tíðnitöflu með prósentutíðni og notaðu þær tölur til að gera súlurit.

A	C	B
C	C	A
D	A	E
A	D	A
C	E	C
B	D	D
B	A	A

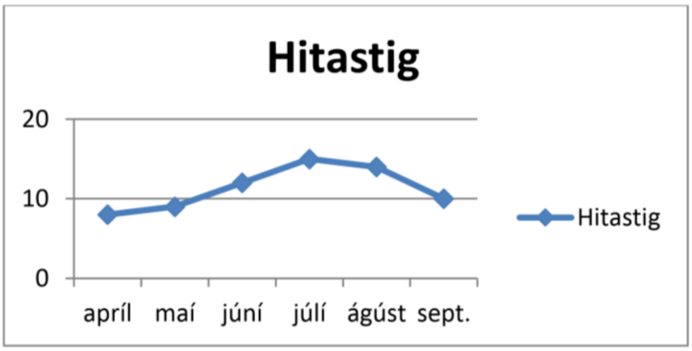
5.5 Línurit

Línurit eru oft notuð í tölfræði til að lýsa breytingu sem á sér stað þegar tími eða önnur gildi á x-ásnum breytast. Taflan hér að neðan lýsir meðalhita yfir nokkra mánuði

Mánuðir	Hitastig
apríl	8
maí	9
júní	12
júlí	15
ágúst	14
sept.	10

Sýndu með línuriti hvernig meðalhitinn breytist.

1. Fyrst teiknar þú ásana og skrifar svo skýringartexta
2. Síðan setur þú inn punktana sem samsvara hitastiginu
3. Síðan dregur þú línu á milli punktanna.



Æfing 5.5

1. Fjöldi síma á hverja 10 Íslendinga hefur fjölgað undanfarin ár. Sýndu þetta með línuriti.

Ár	Fjöldi síma
1985	1
1990	2
1995	3
2000	6
2005	8

2. Taflan sýnir sölutölur á gosi í þúsundum lítra hjá versluninni Gosi. Teiknaðu línurit.

Ár	Fjöldi lítra
2000	3
2002	4
2004	5
2006	7
2008	8

3. Verð á bensíni hefur hækkað undanfarin ár. Sýndu þetta með línuriti.

Ár	Verð
2000	125
2002	130
2004	139
2006	148
2008	167

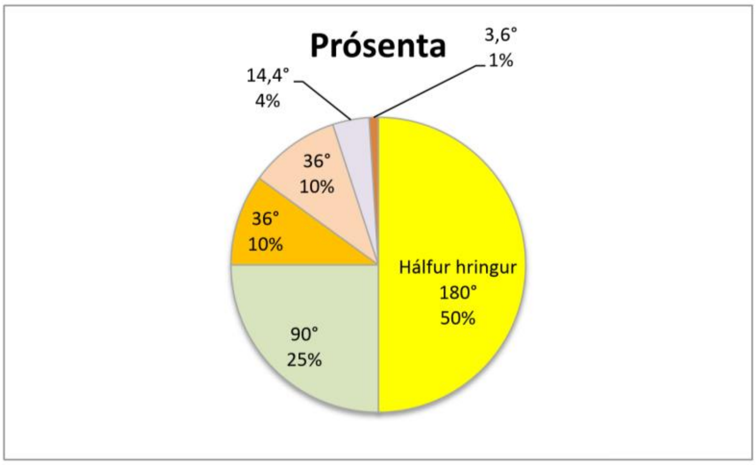
4. Taflan sýnir fjölda umferðaslysa. Sýndu þetta með línuriti.

Ár	94	95	96	97	98
Fjöldi	18	20	23	24	27

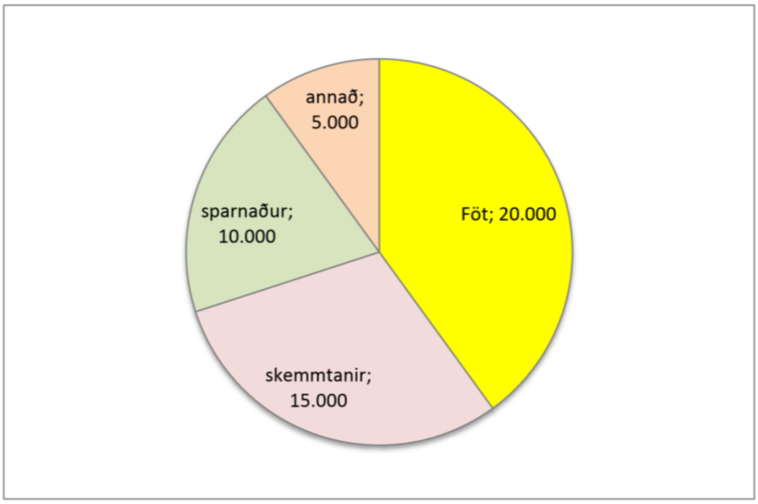
5.6 Skífurit

Skífurit er hentugt að nota þegar við höfum fáar stærðir og viljum skipta þeim í flokka sem auðvelt er að átta sig á. Í skífuriti táknar hringurinn allur, sem er 360°, 100%.

Hálfur hringur, sem er 180°, táknar þá 50%. 3,6° af hringnum táknar þá 1%.



Dæmi: Gunna fær 50.000 kr í laun á mánuði. Hún skiptir laununum svona: Föt 20.000 kr, skemmtun 15.000 kr, sparnaður 10.000 kr, annað 5.000 kr. Sýndu þetta með skífuriti.



Æfing 5.6

1. Í bekk einum var gerð könnun á augnlit nemenda. Af 20 nemendum voru 4 með græn augu, 10 voru með blá augu og 6 með brún augu. Reiknaðu út prósentutölurnar og sýndu þær síðan með skífuriti.

2. Í öðrum bekk var gerð könnun á háralit. Af 15 stelpum voru 3 með rautt hár, 7 með dökkt hár og 5 með ljóst hár. Af 18 strákum voru 2 með rautt hár, 9 með dökkt hár 6 með ljóst hár og einn með blátt hár. Reiknaðu út prósentutölur og gerðu síðan skífurit.

3. Í hádegishléi á matsal Flensborgar var kannað við hvaða símafyrirtæki nemendur skiptu. Af 500 nemendum sem voru spurðir svöruðu 192 hjá Vodafone, 145 hjá Símanum, 129 hjá Nova og 34 hjá Tal. Reiknaðu út prósentutölur og gerðu síðan skífurit.

4. Nemendur voru spurðir hvert uppáhaldsblóm þeirra væri. Af 30 stelpum svöruðu 14 rósir, 5 nellikur, 7 liljur og 4 annað. Af 35 strákum svöruðu 9 rósir, 12 nellikur, 8 liljur og 6 annað. Reiknaðu út prósentutölur og gerðu síðan skífurit fyrir bæði stráka og stelpur. Gerðu einnig tvöfalt súlurit.

5. Í kosningum til alþingis árið 2000 í Hopplandi voru 4 flokkar í kjöri. Álfaflokkurinn fékk 350 atkvæði, Dvergaflokkurinn fékk 120 atkvæði, Tröllaflokkurinn fékk 210 atkvæði og Hulduflokkurinn fékk 46 atkvæði. 8 árum seinna, árið 2008 fékk Álfa flokkurinn 390 atkvæði, Dvergaflokkurinn 90 atkvæði, Tröllaflokkurinn 190 atkvæði, Hulduflokkurinn 22 atkvæði og nýr flokkur Risaflokkurinn fékk 90 atkvæði. Reiknaðu út prósentutölur og gerðu síðan skífurit. Gerðu einnig tvöfalt súlurit.

5.7 Upprifjunardæmi

Æfing 5.7

1. Finndu meðaltal talnanna:
- a) 17, 18, 16, 22, 26, 14
- b) 55, 89, 0, 0, 1, 1, 62
- c) 41, 63, 102, 58, 99, 110
- d) 102, 155, 23, 41, 66, 112, 147, 78, 98.

2. Finndu miðgildi talnanna:
- a) 2, 5, 6, 16, 18, 21, 22
- b) 2, 5, 6, 16, 18, 21, 22, 200
- c) 41, 63, 102, 58, 99, 110
- d) 23, 56, 12, 154, 33, 68, 95, 148, 44, 51

3. Finndu tíðasta gildi talnanna:
- a) 5, 6, 7, 4, 2, 6, 1, 5, 8, 9, 2, 4, 6
- b) 11, 15, 19, 14, 11, 19, 13, 17, 19, 10
- c) 45, 57, 66, 12, 44, 57, 67, 45, 13, 43, 55
- d) 12, 65, 88, 25, 65, 56, 89, 42, 25, 88

4. Þyngd nemenda var mæld í tengslum við verkefnið „heilsueflandi skóli". Taflan sýnir niðurstöður mælinga 25 stelpna.

52	56	54	50	56
54	58	50	53	54
53	59	58	52	50
57	53	59	51	50
55	54	59	56	54

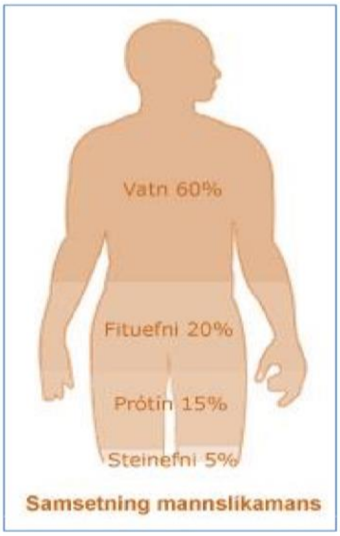
- a) Gerðu tíðnitöflu með tíðni, x*f og prósentutíðni.
- b) Hver var meðalþyngd nemendanna?
- c) Hve mörg prósent voru þyngri en 56kg?
- d) Hve mörg prósent nemenda voru 54kg?
- e) Settu niðurstöðurnar upp í súlurit.

5. Hæð nemenda var einnig mæld í tengslum við verkefnið „heilsueflandi skóli“. Taflan sýnir niðurstöður mælinga 25 stráka.

182	180	176	184	180
181	184	183	179	178
183	180	176	177	182
183	178	179	180	183
184	185	181	182	180

a) Gerðu tíðnitöflu með tíðni, x*f og hlutfallstíðni.
b) Hver var meðalhæð nemendanna?
c) Hve mörg prósent voru lægri en 180cm?
d) Hve mörg prósent nemenda voru 184cm á hæð?
e) Settu niðurstöðurnar upp í línurit.

6. Mannslíkaminn er settur saman úr eftirfarandi:



Sýndu þetta á skífuriti.

6. Línuleg föll

6.1 Jafna línu

Halli lína. Í kaflanum á undan vorum við að teikna gögn inn í hnitakerfi. Þannig gátum við gert línurit til að útskýra betur tölur sem við vildum sýna í myndriti. Nú ætlum við að skoða hnitakerfið aðeins betur.

Þegar lína liggur í gegnum hnitakerfi á hún sér sína eigin jöfnu. Jafnan segir til um halla línunnar, hvort hún hallar upp eða niður. Jafnan segir líka til um hvar línan fer í gegnum y-ásinn.

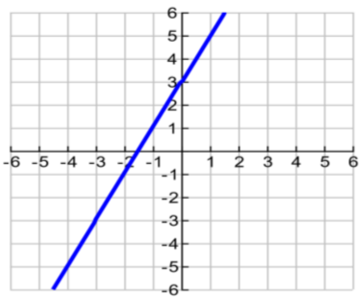
Jafna beinnar línu $\boldsymbol{y = hx + m}$ er þar sem h er hallatalan, m er staðurinn þar sem línan sker y-ás.

Skoðum jöfnuna $\boldsymbol{y = 2x + 3}$. Þetta er jafna línu sem hefur hallatöluna 2 (því 2 koma í stað h) og þessi lína sker y-ásinn þar sem hann er 3 (því 3 er í stað m í jöfnunni). Ef við teiknum línuna í hnitakerfi getum við séð þetta betur. Fyrst búum við til gildistöflu.

X	$2 \cdot X + 3 =$	Y	(X , Y)
-2	$2 \cdot (-2) + 3 =$	-1	(-2 ,-1)
-1	$2 \cdot (-1) + 3 =$	1	(-1 , 1)
0	$2 \cdot 0 + 3 =$	3	(0 , 3)
1	$2 \cdot 1 + 3 =$	5	(1 , 5)
2	$2 \cdot 2 + 3 =$	7	(2 , 7)

Video 26 Teikna beina línu

Síðan teiknum við punktana inn í hnitakerfi

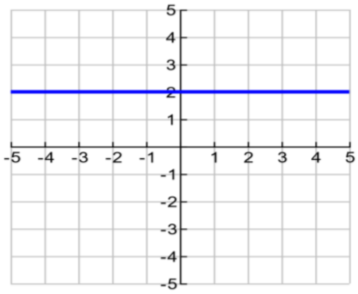


Þá sjáum við að línan fer í gegnum y-ásinn þar sem y = 3. En hvernig getum við séð hvort hallatalan sé 2? Jú, reglan fyrir hallatölu línu er að **hallatala línu mælir hvað y-hnit punkts breytist um margar einingar þegar x-hnitið vex um 1 eininguna.**

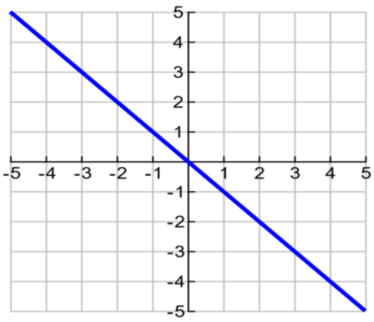
Þ.e. um leið og við færum okkur um eitt bil á x-ás, (frá vinstri til hægri) segir bilið á y-ás til um hallatöluna.

Ef hallatalan okkar er 2, segir það, að fyrir hvert bil sem við förum á x-ásnum, hækkar línan um 2 bil á y-ásnum.

- Ef lína liggur upp á við, miðað við y-ásinn, segjum við að hallatalan sé jákvæð af því að y-gildið hækkar þegar x-gildið hækkar.
- Ef lína liggur samsíða x-ásnum segjum við að hallatalan sé 0, þ.e. y-gildið breytist ekkert þó x-gildið hækki.



- Ef lína liggur niður á við miðað við y-ásinn, segjum við að hallatalan sé neikvæð af því y-gildið lækkar þegar x-gildið hækkar.

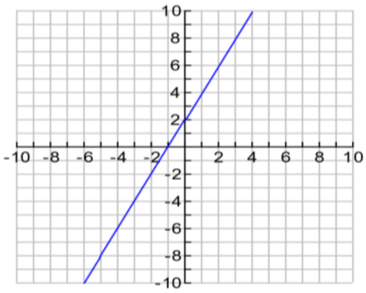


Línan í hnitakerfinu hér að ofan hefur hallatöluna -1 þar sem hún lækkar um eitt bil á y-ásnum um leið og hún hækkar um eitt bil á x-ásnum.

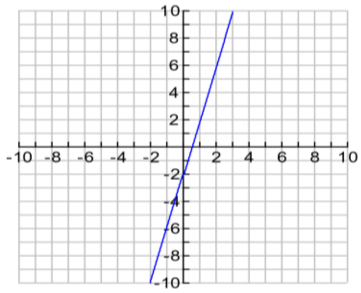
Æfing 6.1

1. Lestu jöfnu línanna af myndunum.

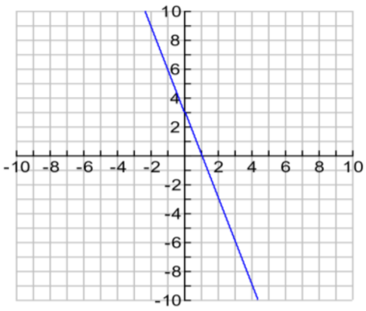
a)



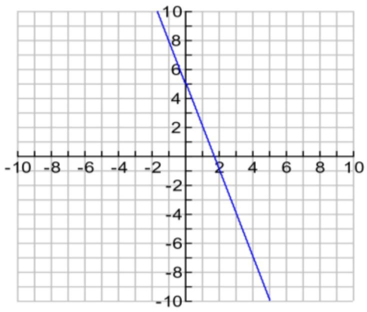
b)



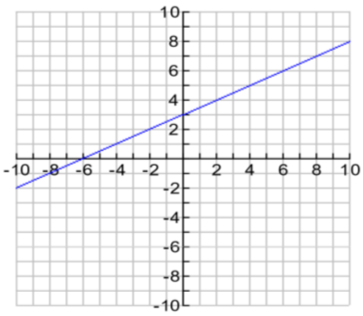
c)



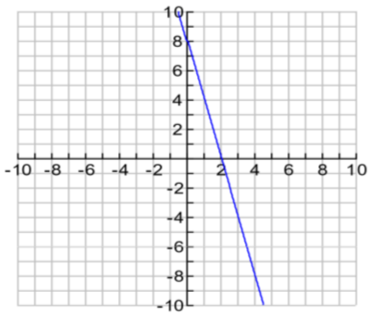
d)



e)



f)



2. Teiknaðu eftirfarandi línur í hnitakerfi (gerðu gildistöflur).

a) $y = x + 2$

b) $y = -2x + 10$

c) $y = x - 3$

d) $y = \frac{1}{2}x - 2$

e) $y = 4x - 3$

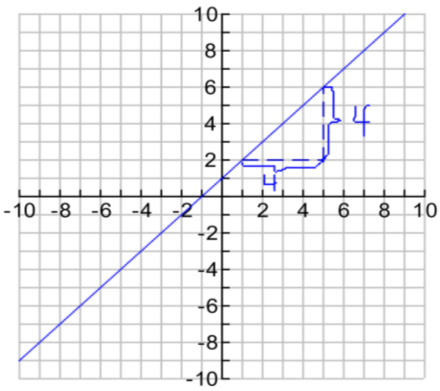
f) $y = -x + 5$

6.2 Hallatala

Ef við höfum tvo punkta á línu í hnitakerfi getum við reiknað út hver hallatala línunnar er. Til þess notum við jöfnuna:$h = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ þar sem y-in eru færslan á y-ásnum og x-in eru færslan á x-ásnum.

Tökum dæmi: Finndu hallatölu línu sem fer í gegnum punktana (1,2) og (5,6). Fyrst gefum við punktunum okkar númer. Sá fyrri er númer 1 og sá seinni er númer 2 (röðin skiptir ekki máli).

Fyrri punktur er þá: $x_1 y_1 = (1\,, 2)$ og seinni punktur er $x_2 y_2 = (5\,, 6)$



Video 27 Reikna hallatölu línu

Þá er hægt að setja inn í jöfnuna $h = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = h = \frac{6-2}{5-1} = \frac{4}{4} = 1$

Þetta þýðir að færslan á y-ásnum var 4 einingar og færslan á x-ásnum var einnig 4 einingar. Hallatalan er síðan færslan á y-ás, deilt með færlsunni á x-ás eða 1.

Æfing 6.2

1. Finndu hallatölu línu sem liggur í gegnum punktana:
   a) (0, 3) og (3, 9)
   b) (2, 3) og (4, 7)
   c) (1, 3) og (2, 1)
   d) (1, 3) og (5, -1)
   e) (2, 3) og (4, -3)
   f) (4, -3) og (6, 5)

2. Finndu hallatölu línu sem liggur í gegnum punktana:
   a) (1, 3) og (2, 1)
   b) (1, 1) og (3, -11)
   c) (-1, -4) og (1, 2)
   d) (1, 2) og (-3, 6)
   e) (-1, 2) og (2, -1)
   f) (-1, -4) og (-3, -6)

3. Lína í gegnum punktinn (3, 6) hefur hallatöluna -5. Liggur punkturinn (4, 1) á línunni?

4. Lína í gegnum punktinn (-3, -5) hefur hallatöluna 1. Liggur punkturinn (4, 2) á línunni?

5. Lína í gegnum punktinn (1, -1) hefur hallatöluna 5. Liggur punkturinn (2,5) á línunni?

6. Hver er hallatala og skurðpunktur við y-ás í eftirfarandi línum?

a) $y = 5x + 3$
b) $y = -2x + 2$
c) $y = x - 4$
d) $y = \frac{2}{3}x - 11$
e) $y = -\frac{4}{5}x$

7. Liggja punktarnir (-2, 0), (1, 2) og (4, 4) á beinni línu?

8. Liggja punktarnir (-2, 6), (1, 2) og (4, -1) á beinni línu?

9. Hvaða 3 af eftirfarandi punktum liggja á beinni línu: (-2,-8),(0,-3),(2,0) og (5,6)

10. Veldu og teiknaðu í hnitakerfi, tvo punkta þannig að lína sem liggur í gegnum þá, hafi hallatöluna

a) 2
b) -2
c) 3
d) -1/2

Video 28 Finna jöfnu línu

6.3 Að finna jöfnu lína

Við vorum búin að minnast á að hver lína hefði sína jöfnu sem segir til um hvernig línan liggur í hnitakerfinu. Jafnan er þessi $\boldsymbol{y = hx + m}$. Eins og við vorum að skoða í síðasta kafla stendur **h** fyrir hallatala og **m** stendur fyrir hvar línan sker y-ásinn. X og Y í jöfnunni standa fyrir punkt í hnitakerfinu.

Dæmi 1.

Finndu jöfnu beinnar línu sem liggur í gegnum punktinn (1, 3) og hefur hallatöluna 4.

Við vitum **h = 4** og þá fáum við $= \boldsymbol{4x + m}$. En við vitum ekki **m** þ.e. hvar línan sker y-ásinn. En við vitum að punkturinn (1, 3) er á línunni og við getum notað það til að finna m-ið eða skurðpunktinn við y-ás.

Við setjum punktinn (1, 3) þ.e. **x = 1** og **y = 3** inn í jöfnuna

$\boldsymbol{3 = 4 \cdot 1 + m}$ $\quad 3 = 4 + m \quad 3 - 4 = m \quad$ $\boldsymbol{-1 = m}$ Þá vitum við að m = -1 og getum sett það inn í jöfnu línunnar $\boldsymbol{y = 4x - 1.}$

Dæmi 2.

Finndu jöfnu línu sem liggur í gegnum punktana (-1, -1) og (1, 3). Hér þurfum við að byrja á því að finna hallatöluna. Þá notum við jöfnuna $h = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$h = \frac{\boldsymbol{3} - (\boldsymbol{-1})}{\boldsymbol{1} - (\boldsymbol{-1})} = \frac{3+1}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

Þá setjum við hallatöluna h = 2 inn í jöfnu línu $y = 2x + m$ Nú getum við tekið annan hvorn punktinn (-1, -1) eða (1, 3) og sett inn í stað x og y. Við ákveðum að velja seinni punktinn (1, 3) Þá höfum við:

$\mathbf{3 = 2 \cdot 1 + m} \qquad \mathbf{3 = 2 + m} \qquad \mathbf{3 - 2 = m} \qquad \mathbf{1 = m}$

Þá er jafna línunnar komin: $\boldsymbol{y = 2x + 1}$

Æfing 6.3

1. Finndu jöfnu beinnar línu sem hefur hallatöluna h = 3 og fer í gegnum punktinn (2, 3).

2. Finndu jöfnu beinnar línu sem hefur hallatöluna h = -2 og fer í gegnum punktinn (-2, 5).

3. Finndu jöfnu beinnar línu sem hefur hallatöluna h = 1 og fer í gegnum punktinn (2, 2).

4. Finndu jöfnu beinnar línu sem hefur hallatöluna h = -4 og fer í gegnum punktinn (4, 2).

5. Finndu jöfnu beinnar línu sem hefur hallatöluna h = 0 og fer í gegnum punktinn (2, 5).

6. Finndu jöfnu línu sem fer í gegnum punktana (0, 3) og (1, 1)

7. Finndu jöfnu línu sem fer í gegnum punktana (2, 3) og (3, 4)

8. Finndu jöfnu línu sem fer í gegnum punktana (1, 2) og (2, 0)

9. Finndu jöfnu línu sem fer í gegnum punktana (7, 1) og (3, 5)

10. Finndu jöfnu línu sem fer í gegnum punktana (-1, -4) og (-3, -6)

11. Lína fer í gegnum punktinn (3, -1) og hefur hallatöluna 2. Hvar sker hún y- ásinn?

12. Lína fer í gegnum punktinn (4, -3) og hefur hallatöluna -3. Hvar sker hún y- ásinn?

6.4 Samsíða og hornréttar línur

Tvær línur eru samsíða ef þær hafa sömu hallatölu.

Línurnar $y = 2x + 1$ og $y = 2x - 5$ eru því samsíða. Hallatalan er 2 í þeim báðum og því eru þær samsíða.

Tvær línur eru hornréttar ef hægt er að margfalda hallatölur þeirra og fá útkomuna -1.

$h_2 \cdot h_1 = -1$

Línurnar $y = 2x + 1$ og $y = -\frac{1}{2}x + 1$ eru hornréttar því ef við margföldum hallatölur þeirra fáum við -1 $\quad h_2 = -\frac{1}{2}\ og\ h_1 = 2 \quad -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$

Dæmi

Hver er hallatala línu sem er hornrétt á línuna $y = 3x + 1$?

Við setjum h í stað hallatölunnar sem við ekki vitum.

$3h\ = -1 \quad 3h = -1 \quad \frac{3h}{3} = \frac{-1}{3} \quad h = -\frac{1}{3}$

Þá fáum við að hallatala línu sem er hornrétt á línuna $y = 3x + 1$ er $-\frac{1}{3}$.

Æfing 6.4

1. Finndu þær línur sem eru samsíða eða hornréttar hvor á aðra.
   a) $y = \frac{1}{2}x\ -\ 5$
   b) $y = -3x + 4$
   c) $y = x + 2$
   d) $y = -4x - 6$
   e) $y = \frac{1}{4}x - 5$
   f) $y = x + 3$

2. Finndu jöfnu línu sem er samsíða línunni $y = 5x - 3$

3. Finndu jöfnu línu sem er hornrétt á línuna $y = 5x + 4$

4. Finndu hallatölu línunnar y=hx-8 þannig að hún verði
   a) Samsíða línunni $y = 4x + 3$
   b) Hornrétt á línuna $y = 4x + 3$

5. Eru einhverjar af línunum í þessum þríhyrningum hornréttar?
   a) (-2, 3), (1, -5) og (6, 6)
   b) (-7, -6), (-4, -4) og (5, -1)
   c) (-5, -4), (12, 0) og (7, 6)

6. Finndu hallatölu línunnar y=hx-5 þannig að hún verði hornrétt á línu sem sker punktana (0, 2) og (2, 1)

7. Gerðu gildistöflu og teiknaðu síðan í hnitakerfi, eftirfarandi línu sem
   a) Hefur hallatöluna 2 og fer í gegnum punktinn (-3, -2)
   b) Hefur hallatöluna -3 og fer í gegnum punktinn (-1, 4)
   c) Hefur hallatöluna 1 og fer í gegnum puntinn (2, 3)

6.5 Jafna beinnar línu á almennu formi

Jafna beinnar línu, eins og við höfum verið að skoða hana er á formi sem kallast skurðhallaform $= hx + m$. Jafna línu getur einnig verið á öðru formi sem kallast almenna formið $ax + by + c = 0$

- **Skurðhallaform:** $y = hx + m$
- **Almennt form:** $ax + by + c = 0$

Þegar við fáum jöfnu á almennu formi, þurfum við að umrita hana á skurðhallaform til að geta séð hver hallatala hennar og skurðpunktur við y-ás er.

Dæmi: Umritaðu jöfnuna $-9x + 3y - 12 = 0$ á skurðhallaform.

$3y = 9x + 12$ Nú er bara eftir að einangra y.

$\frac{3y}{3} = \frac{9x}{3} + \frac{12}{3}$ $\quad y = 3x + 4$ Nú er línan komin á skurðhallaform.

Þá sjáum við að hallatala hennar er 3 og m (þar sem línan sker y-ás) er 4.

Video 29 Samsíða línur og hornréttar línur

Æfing 6.5

1. Finndu ***h*** og ***m*** fyrir línurnar

a) $-4x + 2y - 2 = 0$
b) $-10x + 5y - 15 = 0$
c) $9x + 3y - 12 = 0$
d) $4x + 4y + 8 = 0$
e) $6x = 3y + 12$
f) $2x - 4y = -12$

2. Tilgreindu hverjar af eftirfarandi línum eru samsíða.

a) $-4x + 2y - 2 = 0$
b) $20x + 5y - 15 = 0$
c) $2x + 3y - 12 = 0$
d) $4x + y + 8 = 0$
e) $6x = 3y + 12$
f) $4x - 4y = -12$

3. Hverjar eftirfarandi lína eru samsíða?

a) $-4x + y = -3$
b) $2x + 3y = 6$
c) $6x + 1{,}5y - 6 = 0$
d) $-8x + 2y - 8 = 0$
e) $10x + 2{,}5y + 15 = 0$
f) $4x - 4y = -12$

4. Eru eftirfarandi punktar á línunni $4x + 2y - 12 = 0$

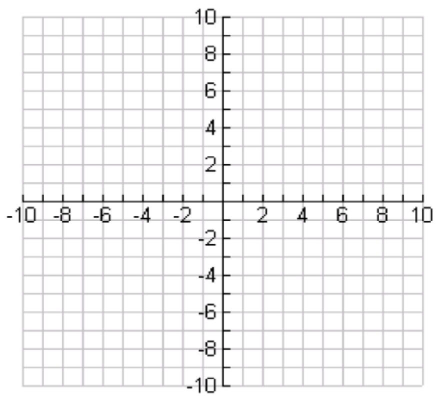
a) $(3\,,0)$
b) $(2\,,4)$
c) $(4\,,1)$
d) $(2\,,2)$

5. Jafna línu er $\boldsymbol{y = -2x + m}$ Finndu **m**, ef línan fer í gegnum punktinn

a) $(2\,,5)$
b) $(-1\,,-3)$
c) $(3\,,-3)$
d) $(2\,,4)$

6. Finndu skurðpunkt eftirfarandi lína við y-ás. Teiknaðu síðan línurnar í hnitakerfi

a) $9x - 3y + 6 = 0$
b) $8x - 2y - 10 = 0$
c) $5x + 5y - 5 = 0$
d) $6x - 2y = 0$

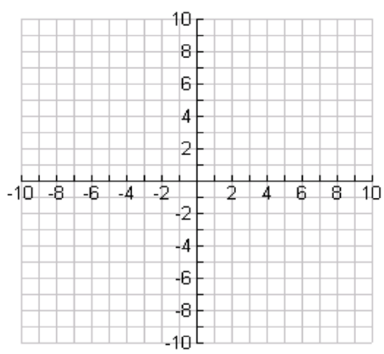


7. Eru línurnar $4x + 2y - 6 = 0$ og $4x - y - 2 = 0$ samsíða?

8. Eru línurnar $4x - 2y - 6 = 0$ og $1x + y - 2 = 0$ hornréttar?

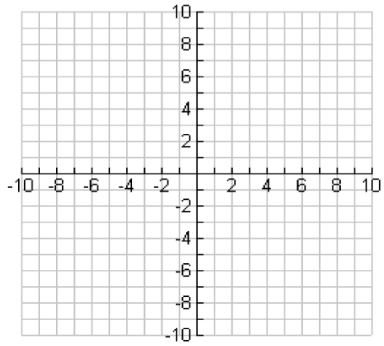
9. Gefin er línan $8x - 2y - 4 = 0$

a) Hver er hallatala línunnar?
b) Finndu skurðpunkt hennar við y-ás
c) Teiknaðu línuna í hnitakerfi.
d) Liggur punkturinn $(3\,,10)$ á línunni?



10. Gefin er línan $3x - 3y - 6 = 0$

a) Hver er hallatala línunnar?
b) Finndu skurðpunkt hennar við y-ás
c) Teiknaðu línuna á hnitakerfi.
d) Liggur punkturinn $(4, 3)$ á línunni?



6.6 Upprifjunardæmi

Æfing 6.6

1. Finndu hallatölu línu sem liggur í gegnum punktana:

a) $(7, 3)$ og $(3, -5)$
b) $(2, -4)$ og $(3, -5)$
c) $(1, 5)$ og $(6, -2)$

2. Lína sem liggur í gegnum punktinn $(-2, 5)$ hefur hallatöluna 4.
Liggur punkturinn $(-1, 9)$ á línunni?

3. Liggja eftirfarandi punktar í beinni línu:

a) $(-2, 2)$, $(1, 3)$ og $(4, 4)$
b) $(-1, 1)$, $(2, -1)$ og $(5, -2)$
c) $(3, 0)$, $(1, -3)$ og $(-1, -6)$

4. Finndu jöfnu línu sem fer í gegnum punktana:

a) $(-1, 3)$ og $(2, 12)$
b) $(-4, -1)$ og $(2, -7)$
c) $(-5, 13)$ og $(3, -3)$

5. Finndu jöfnu línu sem er samsíða línunni:
$(-1, 3)$ og $(2, 12)$
$(-4, -1)$ og $(2, -7)$
$(-5, 13)$ og $(3, -3)$

6. Finndu jöfnu línu sem er hornrétt á línuna:

a) $(-1, 3)$ og $(2, 12)$
b) $(-4, -1)$ og $(2, -7)$
c) $(-5, 13)$ og $(3, -3)$

7. Umritaðu jöfnuna á skurðhallaform:

a) $4x - 2y - 6 = 0$
b) $12x + 3y - 15 = 0$
c) $-20x + 4y - 8 = 0$

8. Gerðu gildistöflu og teiknaðu línu sem liggja í gegnum punktana:

a) $(-2,0)$ og $(1,6)$
b) $(-1,2)$ og $(2,-7)$
c) $(0,-2)$ og $(2,6)$

Video 30 Veldareglurnar

7. Veldi

7.1 Jákvæður veldisvísir

Þegar við höfum tölu sem er margfölduð með sjálfum sér, þá getum við sett hana í veldi. Ef tala er margfölduð 6 sinnum með sjálfum sér, segjum við að talan 4 sem er þá grunntalan, sé í sjötta veldi.

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^6$.

$\cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ eru þá þrír þættir en $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ eru sex þættir eða jafnmargir og veldisvísirinn segir til um.

Reglur um veldi.
Ef við erum að margfalda saman tvær tölur þar sem grunntalan er sú sama, leggjum við saman veldisvísana:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad 2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

Ef við erum með grunntölu í veldi og það síðan í veldi, margföldum við saman veldisvísana:

$$(a^x)^y \cdot a^{x \cdot y} = a^{xy} \qquad (2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$$

Ef við deilum með veldistölu upp í aðra veldistölu þar sem grunntalan er sú sama, drögum við neðri veldisvísinn frá þeim efri:

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = a^{xy} \qquad \frac{2^4}{2^3} = 2^{4-3} = 2^1 = 2$$

Ef við erum með grunntölur í sviga sem síðan er í veldi, leysum við svigann með því að setja allar tölur hans í veldi.

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \qquad (2^3 \cdot 5 \cdot x)^2 = 2^6 \cdot 5^2 \cdot x^2 = 1600x^2$$

Athugið að reglurnar gilda aðeins ef við erum með sömu grunntölu!

Dæmi: Ef við erum að margfalda tvær tölur sem hafa sömu grunntölu, leggjum við saman veldisvísana.

$5^3 \cdot 5^4 = 5^7$ eða $(5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^7$

Ef við erum með grunntölu í veldi sem er síðan í veldi, margföldum við saman veldisvísana.

$(6^3)^4 = 6^{3 \cdot 4} = 6^{12}$ eða $(6 \cdot 6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6) = 6^{12}$

Ef við erum að deila, drögum við veldisvísi nefnarans frá veldisvísi teljarans.

$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2$ eða $\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 3^2$

Video 31 Veldishnappurinn á reiknivélinni

Æfing 7.1

1. Reiknaðu

a) 3^3

b) 4^4

c) $(-4)^2$

d) $(-7)^3$

e) $(-3)^5 + (-2)^4$

f) $3^4 + 4^5 + 5^3 + 6^2$

g) $(-4)^3 \cdot (-3)^6$

h) $-3^2 \cdot 5^3 \cdot (-2)^4$

2. Skrifaðu sem eitt veldi

a) $3^6 \cdot 3^3$

b) $4^3 \cdot 4^5$

c) $5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4$

d) $3 \cdot 3^3 \cdot 3^4 \cdot 3^7$

e) $2^0 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2^{22}$

f) $4^{14} \cdot 4^8 \cdot 4^{10} \cdot 4^6 \cdot 4^4$

3. Skrifaðu sem eitt veldi

a) $(3^3)^3$

b) $(4^2)^4$

c) $(5^6)^5$

d) $(5^7)^3 \cdot 5^3$

e) $(6^3)^4 \cdot (6^2)^5 \cdot (6^0)^5$

f) $(3^3)^3 \cdot (3^4)^3 \cdot (3^5)^5$

4. Skrifaðu sem eitt veldi

a) $\frac{3^5}{3^4}$

b) $\frac{4^4}{4^2}$

c) $\frac{5^7}{5}$

d) $\frac{5^2 \cdot 5^3}{5^4}$

e) $\frac{6 \cdot 6^6}{6^3}$

f) $\frac{4^4 \cdot 4^6 \cdot 4^3}{4^8}$

5. Skrifaðu sem eitt veldi

a) $\frac{7^7 \cdot 7^8 \cdot 7^4}{7^5 \cdot 7^2}$

b) $\frac{(7^5)^2 \cdot 7^5}{7^6}$

c) $\frac{(7^2)^4 \cdot (7^3)^5}{7^5 \cdot (7^2)^3}$

6. Skrifaðu sem eitt veldi

a) $7^6 \cdot 6^4$

b) $\frac{5^4 \cdot 5^0 \cdot 5 \cdot (5^2)^3}{5^5}$

c) $\frac{4^3 \cdot 4^4 \cdot (4^3)^4}{4^9}$

d) $\frac{2^8 \cdot 2^4 \cdot 2^5}{2^5 \cdot (2^2)^4 \cdot 2}$

Video 32 Ýmsar hugleiðingar um veldi

7.2 Neikvæður veldisvísir

Nú skulum við skoða hvað gerist ef veldisvísirinn verður minni en 1. Ef veldisvísirinn er t.d. 0 verður útkoman alltaf 1. Það er alveg sama hvaða tölu við erum með sem grunntölu, ef hún er í núllta veldi verður útkoman 1. Skoðum þetta aðeins nánar.

Hvenær verður veldisvísir 0? Það er ef talan fyrir ofan strik og neðan strik er sú sama.

Dæmi: $\frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0 = 1$ $\quad 12345^0 = 1$ $\quad (2^3 \cdot x^{-3} \cdot a^5)^0 = 1$

Ef hins vegar veldisvísirinn er minni en 0, þ.e. neikvæð tala, þá verður útkoman minni en 1, sem þýðir að hún verður brotatala á bilinu 0 – 1.

$\mathbf{2^3 = 8}$ $\quad 2^2 = 4$ $\quad \mathbf{2^1 = 2}$ $\quad 2^0 = 1$ $\quad \mathbf{2^{-1} = \frac{1}{2^1}}$ $\quad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ $\quad \mathbf{2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}}$

Við getum litið á þetta þannig. Í veldareikningi notum við frádrátt þegar við deilum með einu veldi í annað. Þannig að mínus í veldareikningi merkir sama og deiling. Því getum við breytt neikvæðu veldi í jákvætt veldi, með því að færa töluna niður fyrir brotastrikið eða upp fyrir það eftir því hvorum megin mínus veldið var.

$5^{-1} = \frac{1}{5^1}$ $\qquad 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ $\qquad \frac{1}{5^{-2}} = 1 \cdot 5^2 = 1 \cdot 25 = 25$

Hér koma veldareglur 5 og 6.

5. $a^0 = 1$ $\qquad$ $Dæmi: 4^0 = 1$

6. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\qquad$ $Dæmi: 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

Skoðum fleiri dæmi:

$(2^{-3})^2 = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$ $\qquad (\frac{2}{3})^{-1} = \frac{2^{-1}}{3^{-1}} = \frac{3^1}{2^1} = \frac{3}{2}$

Tala, með veldisvísinn 0 er jafnt og 1, þar af leiðandi er tala, með veldisvísir sem er minna en 0, minni en 1

Æfing 7.2

1. Reiknaðu

a) 3^{-3}

b) 4^{-2}

c) 7^{0}

d) 8^{-3}

2. Skrifaðu sem eitt veldi

a) $(3^3)^{-3}$

b) $3^7 \cdot 3^{-4}$

c) $3^4 : 3^6$

d) $\frac{4^{-3}}{4^6}$

3. Skrifaðu sem eitt veldi

a) $(2^{-4})^5$

b) $6^{-3} : 6^{-4}$

c) $5^2 \cdot 5^5 \cdot 5^{-3}$

d) $3^4 \cdot 3^{-3} \cdot 3^{-7} \cdot 3^{-2}$

e) $\frac{3^{-2} \cdot 3^3 \cdot 3^7 \cdot 3^{-4}}{3^6 \cdot 3^{-5}}$

f) $5^4 \cdot (5^{-3})^2 \cdot (5^4)^{-2} \cdot 5^{-2}$

4. Skrifaðu sem eitt veldi

a) $2^4 \cdot (2^{-2})^2 \cdot (2^3)^{-3}$

b) $3^{-4} \cdot (3^{-3})^{-2} \cdot 3^{-7} \cdot (3^{-2})^{-5}$

c) $(6^6 \cdot 6^{-3})^2 \cdot 6^5 \cdot 6^{-4}$

d) $(4^4 \cdot 4^{-3} \cdot 4^{-3} \cdot 4^{-2})^2$

e) $(5^4 \cdot 5^{-3})^2 \cdot (5^{-3} \cdot 5^{-2})^{-3}$

5. Skrifaðu sem eitt veldi

a) $\frac{4^{-2} \cdot 4^7}{4^3}$

b) $\frac{3^{-9} \cdot 3^4 \cdot 3^3}{3^2 \cdot 3^{-5}}$

c) $\frac{2^4 \cdot (2^{-2})^5}{2^{-3}}$

d) $\frac{3^{-4} \cdot (3^3)^5 \cdot 3^6}{3^{-8}}$

7.3 Upprifjunardæmi

Æfing 7.3

1. Skrifaðu sem eitt veldi:

a) $4^3 \cdot 4^2 \cdot 4 \cdot 4^5$

b) $(3^3)^5 \cdot 3^4 \cdot 3$

c) $\frac{6^3 \cdot (6^2)^4}{6^5}$

2. Skrifaðu sem eitt veldi:

a) $4^{-5} \cdot 4^9 \cdot 4^0 \cdot 4^{-2}$

b) $(3^{-2})^3 \cdot 3^7 \cdot 3^4$

c) $\frac{(6^2)^{-4} \cdot (6^3)^4}{6}$

3. Skrifaðu sem eitt veldi:

a) $2^2 \cdot (2^4)^{-3} \cdot (2^{-2})^{-5} \cdot 2^3$

b) $\frac{5^{-6} \cdot (5^{-4})^{-2} \cdot 5^{-5}}{5^3}$

c) $\frac{(7^{-3})^{-5} \cdot (7^4)^{-3} \cdot 7}{(7^2)^{-3}}$

4. Skrifaðu sem eitt veldi:

a) $x^{-11} \cdot x^8 \cdot x^0 \cdot x^5$

b) $(a^{-2})^7 \cdot a^9 \cdot a^3 \cdot a^{-2}$

c) $\frac{(x^2)^{-4} \cdot (x^{-3})^{-2}}{x \cdot x \cdot x^4}$

5. Skrifaðu sem eitt veldi:

a) $(3x)^2$

b) $(2xy)^3/x$

c) $(4a^2b)^3/ab$

6. Fyrir hvaða tölu stendur veldisvísirinn x?

a) $2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^x = 2^{11}$

b) $3^4 \cdot 3^{-6} \cdot 3^x = 3^{-5}$

c) $(4^2)^x = 4^{-8}$

Svör við dæmum

Æfing 1.1

1. -12
2. -5
3. -4
4. 5
5. 2
6. 1
7. -6
8. 7
9. 10
10. -192
11. -75
12. -61
13. -5
14. 44
15. -143

Æfing 1.2

1. 32
2. -24
3. -5040
4. -240
5. -140
6. -7680
7. 576
8. 648
9. -1200
10. -16
11. 30
12. 6
13. -20
14. 34
15. -22
16. -676
17. 67
18. 2178

Æfing 1.3

1. 27
2. -375
3. -151
4. 70
5. -44
6. -39
7. 150
8. 1
9. 39
10. -173
11. 74
12. -111

Æfing 1.4

1.

- **a)** 17
- **c)** 5
- **d)** 13
- **i)** 3

2.

- **a)** $2 \cdot 3 \cdot 5$
- **b)** $2 \cdot 5 \cdot 7$
- **c)** $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
- **d)** $2 \cdot 7 \cdot 7$
- **e)** $3 \cdot 7 \cdot 11$
- **f)** $7 \cdot 11 \cdot 13$
- **g)** $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$
- **h)** $2 \cdot 7 \cdot 13$
- **i)** $11 \cdot 13 \cdot 17$
- **j)** $11 \cdot 13 \cdot 19$

Æfing 2.1

1. $\frac{5}{24}$
2. $\frac{5}{9}$
3. $\frac{17}{30}$
4. $4\frac{11}{12}$
5. $2\frac{1}{3}$
6. $1\frac{1}{9}$
7. $\frac{7}{9}$
8. $-3\frac{7}{12}$
9. $2\frac{3}{10}$
10. $4\frac{5}{7}$
11. $5\frac{5}{12}$

Æfing 2.1 (frh)

12. $4\frac{7}{30}$
13. $1\frac{1}{3}$
14. $2\frac{5}{18}$
15. 2
16. $1\frac{8}{15}$
17. $2\frac{7}{12}$
18. $11\frac{1}{30}$
19. $-\frac{1}{16}$
20. $4\frac{13}{14}$
21. $1\frac{17}{48}$
22. $1\frac{1}{16}$

Æfing 2.2

1. $\frac{2}{25}$
2. $4\frac{2}{3}$
3. $4\frac{5}{7}$
4. $-3\frac{3}{7}$
5. $\frac{1}{2}$
6. $-1\frac{1}{4}$
7. $1\frac{5}{7}$
8. $-1\frac{1}{14}$
9. $7\frac{1}{5}$
10. $-\frac{4}{9}$
11. $-\frac{27}{35}$

Æfing 2.2 (frh)

12. $5\frac{23}{24}$
13. $2\frac{7}{24}$
14. 44
15. $\frac{1}{2}$
16. $4\frac{1}{4}$
17. $-\frac{24}{35}$
18. $-1\frac{7}{25}$
19. $-1\frac{5}{28}$
20. $-\frac{5}{6}$
21. $-2\frac{2}{3}$

Æfing 2.2 (frh)

22. -3
23. $\frac{7}{24}$
24. $1\frac{19}{45}$
25. $\frac{6}{7}$
26. $1\frac{1}{5}$
27. $1\frac{2}{3}$
28. $1\frac{1}{35}$
29. $\frac{4}{63}$
30. $\frac{18}{245}$
31. $1\frac{1}{35}$

Æfing 2.3

1. $\frac{3}{20}$
2. $\frac{3}{8}$
3. $\frac{3}{20}$
4. $\frac{15}{4}$
5. $\frac{8}{3}$
6. $\frac{7}{15}$
7. $\frac{25}{12}$
8. $\frac{5}{2}$
9. $\frac{31}{6}$
10. $\frac{23}{18}$

Æfing 2.3 (frh)

11. $\frac{143}{30}$
12. $\frac{5}{27}$
13. $\frac{26}{35}$
14. $-\frac{137}{70}$
15. $\frac{69}{5}$
16. $\frac{197}{108}$
17. $-\frac{36}{5}$
18. $-\frac{7}{36}$
19. $-\frac{7}{24}$
20. $\frac{11}{4}$

Æfing 2.4

1. $\frac{37}{60}$
2. $196cm$
3. 6
4. $\frac{7}{15}$
5. 160 gr. sykur
80 gr. smjör
2 dl. vatn

Æfing 2.5

1. 27,96 kr
2. 8,75 lítrum
3. 617,5 metra
4. 94,59 lítrum
5. 16.912,69 kr
6. 10,4 m/sek og
37,58 km/klst
7. 278,3 kr
8. 450.300 kr
9. 724,63 kr
10. 42,9 eða
43 steina
11. 60 skrúfur
12. 12.660 kr

Æfing 3.1

1.	10
2.	1
3.	-4
4.	-7
5.	9
6.	3
7.	-10
8.	1
9.	10
10.	2

Æfing 3.1 (frh)

11.	-1
12.	32
13.	416
14.	-8
15.	27
16.	26
17.	114
18.	-1
19.	-42
20.	-8

Æfing 3.2

1.	-4
2.	7
3.	4
4.	9
5.	-4
6.	4
7.	3
8.	3
9.	0
10.	8
11.	-32
12.	-7
13.	-37
14.	3
15.	-2

Æfing 3.2 (frh)

16.	-4
17.	-1
18.	-34
19.	-24
20.	20
21.	-27
22.	-4
23.	-31
24.	-20
25.	40
26.	-16
27.	-20
28.	-4
29.	36
30.	-17

Æfing 3.3

1. 6
2. 5
3. -5
4. -6
5. -3
6. -1
7. -4
8. 0
9. 4
10. -6
11. -12
12. -23
13. -1
14. 13
15. 25

Æfing 3.3 (frh)

16. 16
17. 20
18. -7
19. -9
20. 6
21. $\frac{7}{6}$
22. -2
23. $-\frac{1}{4}$
24. 3
25. $\frac{3}{5}$
26. 1
27. -2
28. $-\frac{7}{4}$
29. $-\frac{1}{2}$
30. $\frac{3}{2}$

Æfing 3.4

1. 10 og 25
2. 120,180 og 420
3. 7000,10.500 og 17.500
4. 246.000, 369.000, 492.000 og 615.000
5. 1159,79, 2.474,22 og 3.865,98

Æfing 3.5

1. 24.062,50 kr, 36.437,50kr og 49.500 kr
2. 625.000 kr, 875.000 kr, og 1.000.000 kr.
3. 48.000, 60.000 og 32.000 kr
4. a) 76,9 dollara
   b) 47,6 pund
   c) 130.000 kr
   d) 210.000 kr
5. 8.402 kr
6. 260 strákar
7. 3.600 blöðum

Æfing 3.6

1. a. 34
   b. -122
   c. 7,36
   d. 0,75
2. a. 42
   b. 150
   c. 300
   d. 324
3. a. 4,58
   b. -6,30
   c. 16,42
   d. 11,91
4. a. -37
   b. 45
   c. -14
   d. -4
5. a. 31,44
   b. 69,9
   c. 245,19
   d. 130,35
6. a. 14
   b. 61
   c. 7
   d. 72
7. a. 11 mörk
   b. 33 mörk
8. 40 mörk
9. 480.000 kr
10. a. $A = \frac{2}{5}$, $B = \frac{3}{5}$
    b. A= 64gr B= 96gr
    c. A= 560gr B=840gr
11. 1850kr
12. a. 62kr
    b. 310kr
    c. 5
    d. 23
13. a. -3
    b. 1
    c. 7
    d. -2
14. a. $\frac{13}{9}$
    b. 19
    c. 20
    d. 8

Æfing 4.1

1. a. 100 kr
b. 537,6 kr
c. 8 kr
2. a. 7,5%
b. 3,6%
c. 0,6%
3. a. 1500 kr
b. 45.000 kr
c. 30.000 kr
4. a. 1,30
b. 0,75
c. 0,95
d. 2,20
5. a. 5% hækkun
b. 25% lækkun
c. 0,5% lækkun
d. 110% hækkun
6. a. 80%
b. 33,33%
c. 15%
d. 5%

Æfing 4.1 (frh)

7. a. 40
b. 600
c. 2
d. 1000
8. a. 1% lækkun
b. 33% hækkun
c. 99,9% lækkun
d. 305% hækkun
9. a. 0,85
b. 15%
10. a. 0,65
b. 35%
11. a. 1,55
b. 55%
12. a. 12,5% hækkun
b. 11,2% lækkun
c. 136,9% hækkun
d. 39,8% lækkun

Æfing 4.1 (frh)

13. a. 1,11
b. 0,87
c. 1,42
d. 0,60
14. a. 28,9% hækkun
b. 47,8% lækkun
c. 200,3% hækkun
d. 76,4% lækkun
15. 5,68%
16. 19,35% lækkun
17. 112.875 kr
18. 7.245 kr
19. 18.500 kr
20. a. 225.000 kr
b. 234.000 kr
21. 4%
22. 3%
23. a. 106.400 kr
b. 77.900 kr

Æfing 4.1 (frh)

24. 185.000 kr
25. 240.000 kr
26. 32.130 kr
27. 243.809 kr
28. a. Hjá Alla: 900 kr
b. Hjá Bjössa 840 kr
29. Nei, hann fær hana á lægra verði en innkaupsverði.
30. a. 18.600 kr
b. 56.048 kr
c. 153.264 kr
d. 2.189.151 kr
31. 4.836 kr
32. a. 149.135 kr
b. 125.148 kr
c. 150.555 kr
d. 157.227 kr
33. a. 3.780 kr
b. 7.476 kr
c. 12.474 kr
d. 21.148 kr

34.

Kostnaðarverð	Álagning	Söluverð	Söluverð + vsk (24%)	Afsláttur	Endanlegt verð
750	20%	900,00	1116,00	12%	982,08
45	12%	50,40	62,50	30%	43,75
1210	27%	1536,70	1905,51	0%	1905,51
125	22%	152,50	189,10	12%	166,41
550	8%	594,00	736,56	4%	707,10

Æfing 4.2

1. a. 5.350 kr
   b. 7.013 kr
   c. 11.261 kr
2. a. 2.082.500 kr
   b. 1.504.606 kr
   c. 1.087.078 kr
3. a. 2.646.000 kr
   b. 3.086.294 kr
   c. 3.599.854 kr
4. a. 1.350.000 kr
   b. 1.574.640 kr
   c. 1.836.660 kr
5. 2.035 manns
6. 76,87 kr
7. 44.745 kr
8. Hann deilir með breytistuðlinum 1.33 í nýja verðið.
   24.060 kr
9. a. 364.809 kr
   b. 2.249.263 kr
   c. 30.634 kr
10. 6.431.039 kr

Æfing 4.3

1. a. 24.000 kr
   b. 44.000 kr
   c. 120.000 kr
   d. 180.000 kr
2. a. 16.875 kr
   b. 29.700 kr
   c. 106.650 kr
   d. 166.050 kr
3. 48.375 kr
4. 394.917 kr
5. 793.333 kr
6. Af láni B
   A: 13.300 kr
   B: 14,666 kr
7. Bók A
   Bók A: 40.545 kr
   Bók B: 38.943 kr
8. a. 4.083 kr
   b. 4.900 kr
   c. 20.883 kr
   d. 26.017 kr
9. 605.910 kr
10. 892.620 kr
11. 6.975 kr
12. 1.259.40 kr
13. 215.625 kr
14. 515.206 kr
15. 117.776 kr
16. 120.698 kr

Æfing 4.4

1. 18%
2. 16%
3. 50.000 kr
4. 39.000 kr
5. 20 daga
6. 72 daga
7. 37.200 kr
8. 21.000 kr
9. 11%
10. 7%

Æfing 4.5

1. a. 1997
   b. 24 stig
   c. 32,4%
   d. 15,3%
2. a. 1999
   b. 24 stig
   c. 36%
   d. 6,3%
3. a. 3.192.000 kr
   b. 2.358.621 kr
   c. 2.533.333 kr

Æfing 4.5 (frh)

4. a.

Ár	1997	2001	2005	2009
Vísitala	100	104	117	115

   b. 98
   c. 111

5. a.

Ár	1999	2002	2005	2008
Vísitala	100	121	137	149

   b. 123
   c. 109

6. a.

Ár	1999	2002	2005	2008
Vísitala	100	115	128	150

   b. 131
   c. 117

Æfing 4.5 (frh)

7. a. 5.508 kr
b. 15.300 kr
c. 16.899 kr.

8. a. 3.024 kr
b. 7.949 kr
c. 5.280 kr.

9. a.

Ár	1998	2002	2006	2010
Epli	100	112	127	138
Perur	100	110	115	120

b. Epli
c. Epli, þau hækka um 24 vísitölustig en perur 9

10. a.

Ár	Strákar	Stelpur
1999	100	100
2003	102	103
2006	105	108
2009	110	114

b. Stelpur
c. Stelpur, þær hækka um 10 vísitölustig en
- strákarnir um 8

Æfing 4.6

1. a. 20kr
b. 360kr
c. 16,80kr
d. 15,86kr

2. a. 12,5%
b. 200%
c. 1,6%
d. 400%

3. a. 9500kr
b. 5100kr
c. 3600kr
d. 7500kr

4. a. 2278kr
b. 3323,20kr
c. 1923,17kr
d. 2438,80kr

5. a. Þórir, hann fékk 3576kr
b. 17,87%

6. 819kr

7. 7746,90kr

8. 33,39%

9. a. 4%
b. 8,33%
c. 37,10%
d. 50,57%

10. a. 39.661kr
b. 37.648kr
c. 5500kr
d. 8820kr
e. 21.408kr
f. 8400kr
g. 2728kr
h. 3040kr

11. a. 970.961kr
b. 1.166.695kr

12. a.

Ár	2001	2004	2007	2010
Gulrætur	100	108,6	115,5	122,6
Kartöflur	100	111,5	119,7	91,8
Bananar	100	115,8	132,7	140,1
Baunir	100	95,9	107,0	99,2
Tómatar	100	105,7	118,4	129,7

b. Á banönum
c. Á kartöflum
d. Á tómötum

Æfing 5.1

1. a. 16,3
b. 179,9
c. 1317
2. 167,2
3. a. 11
b. 53,5
4. a. 12
b. 34
5. a. Lægsta gildið er 11 og hæsta gildið er 17
b. Lægsta gildið er 23 og hæsta gildið er 89
6. a. 9
b. 1,2,4,5,7,8,9,10,13
c. 59
d. 6,56
e. 7
f. Lægsta gildið er 1 og hæsta gildið er 13
7. a. 10
b. 9,10,13,18,22,28,44, 53,71,82
c. 350
d. 35
e. 25
f. Lægsta gildið er 9 og hæsta gildið er 82
8. a. 10
b. 3,12,32,43,55,67,75, 91,122,123
c. 623
d. 62,3
e. 61
f. Lægsta gildið er 3 og hæsta gildið er 123
9. a. Meðaltal er 9,78 og miðgildi er 4
b. Miðgildið
10. a. Meðaltal kvenna 42,2 og miðgildið er 40
b. Meðaltal karla 48,6 og miðgildið er 48
c. Meðaltal allra 45,4 og miðgildið er 44,5
11. a. 277.143 kr
b. 230.000 kr
c. Miðgildið
12. T.d. 5,6,7 hafa meðaltalið 6
13. T.d. 18,19,20,21,22 hafa meðaltalið 20

Æfing 5.2

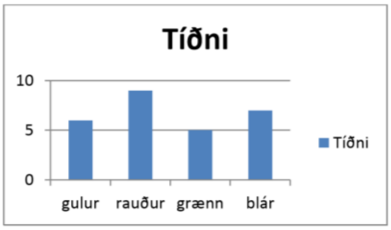
1. d.3,8
e.3,5
f. Lægsta gildið er 1 og hæsta gildið er 8
2. Meðaltalið er 8,39
3. b. 5,61
c. 6
d. Lægsta gildið er 1 og hæsta gildið er 9
e. 6 er tíðasta gildið
4. b. 3,5
c. 3,5
d. Lægsta gildið er 1 og hæsta gildið er 7
e. 4 er tíðasta gildið
5. Meðalverð er 2.420 kr
6. Meðaleinkunn er 5,86

Æfing 5.3

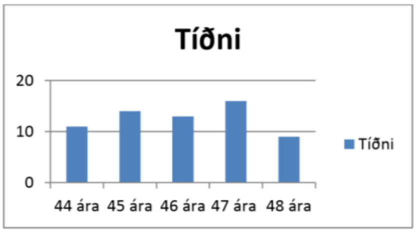
1. b. 16,7%
c. 33,3%
d. 17,6
2. b. 4,52
c. 4
d. 6
3. b. 62,9%
c. 37,1%
d. 40,
4. b. 17,1%
c. 62,9%
d. 2,2 tennur

Æfing 5.4

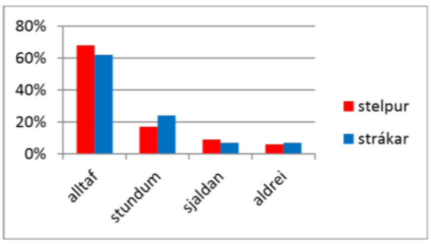
1.



2.

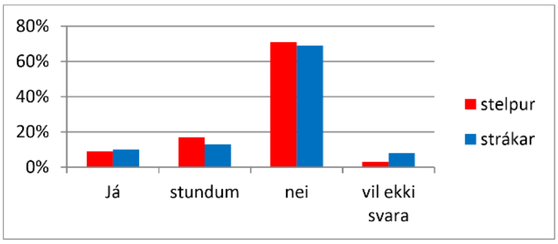


3.

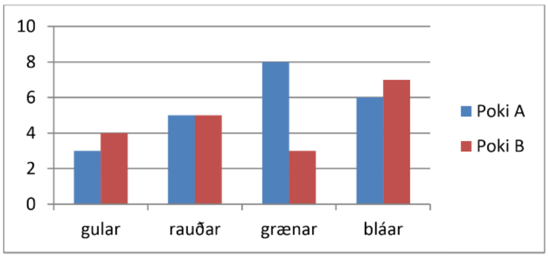


Æfing 5.4 (frh)

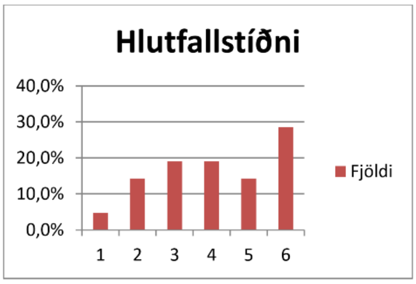
4.



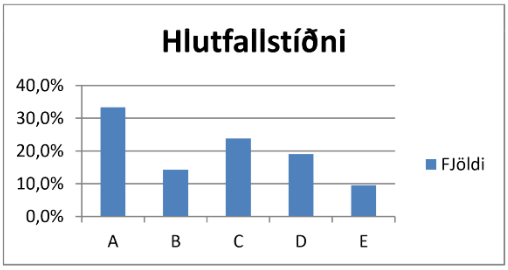
5.



6.

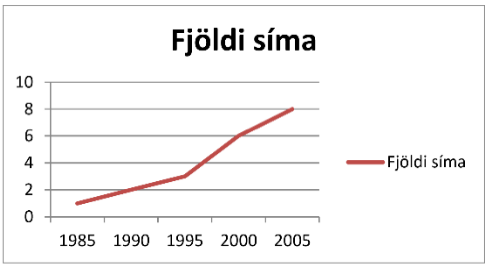


7.

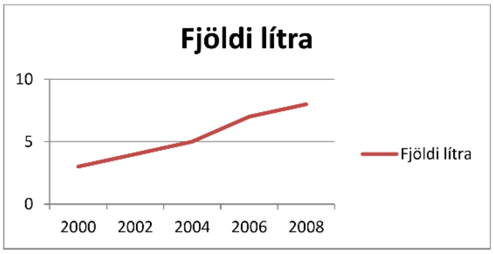


Æfing 5.5

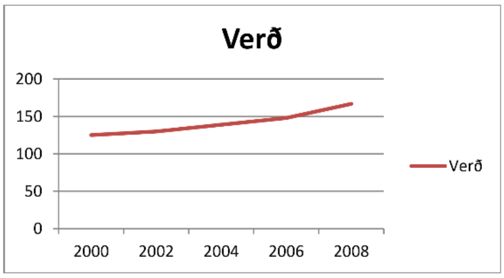
1.



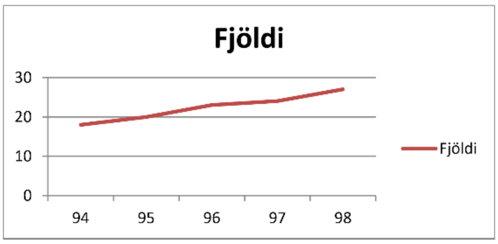
2.



3.

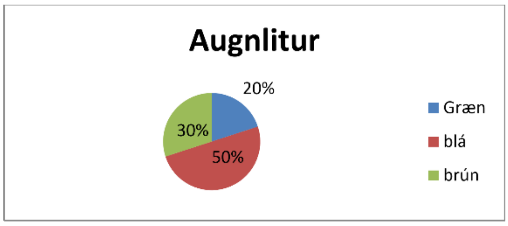


4.

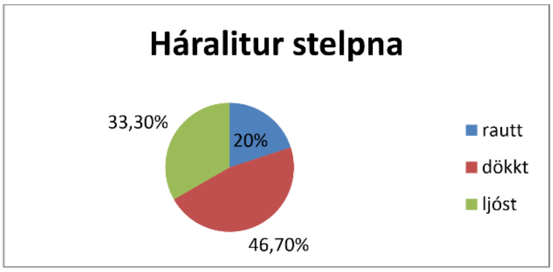


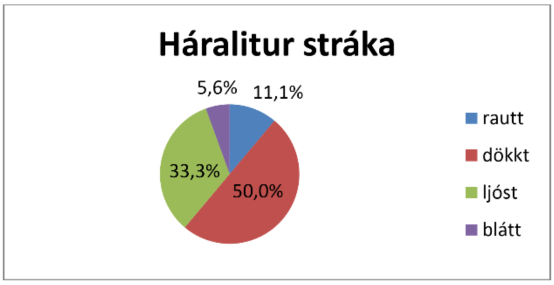
Æfing 5.6

1.

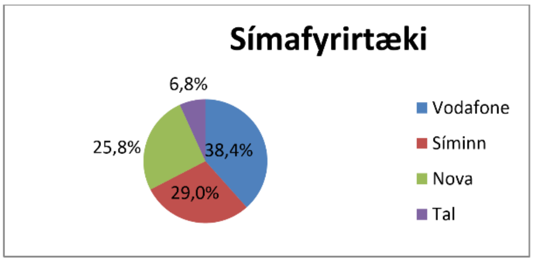


2.



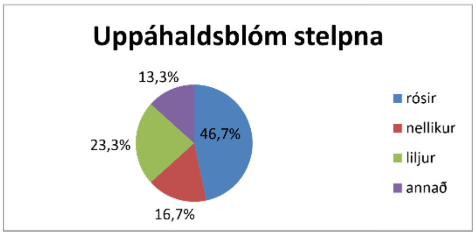


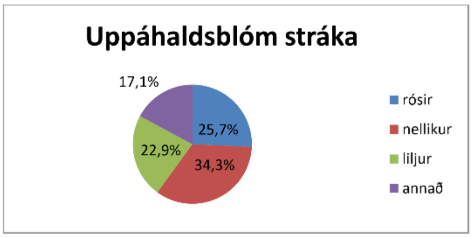
3.

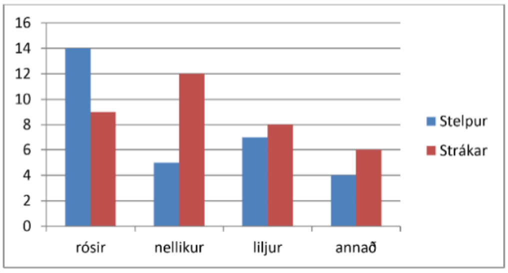


Æfing 5.6 (frh)

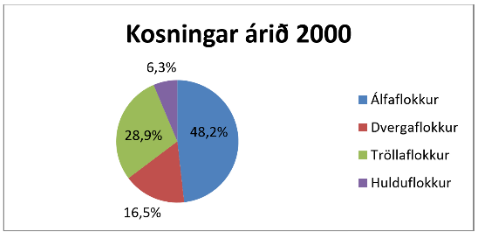
4.

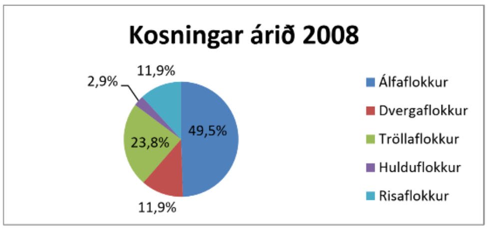


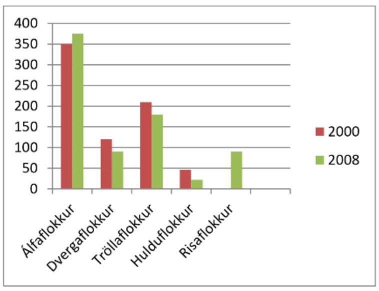




5.







Æfing 5.7

1. a. 18,83
b. 29,71
c. 78,83
d. 91,33

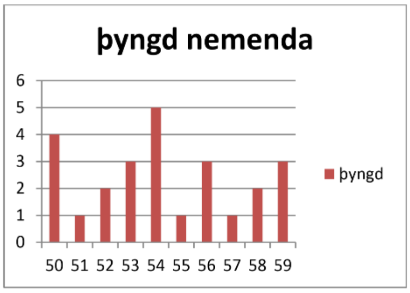
2. a. 16
b. 17
c. 81
d. 53,5

3. a. 6
b. 19
c. 45 og 57
d. 25, 65 og 88

4. a.

x	f	x*f	prósentu tíðni
50	4	200	15%
51	1	51	4%
52	2	104	8%
53	3	159	12%
54	5	270	20%
55	1	55	4%
56	3	168	12%
57	1	57	4%
58	2	116	9%
59	3	177	13%
Samtals:		1357	100%

b. 54,28kg
c. 24%
d. 20%
e.

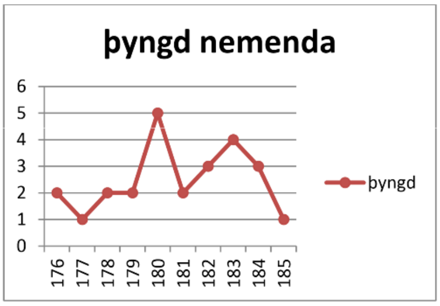


Æfing 5.7 (frh)

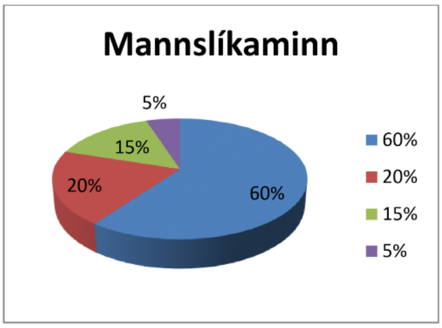
5. a.

x	f	x*f	hlutfalls-tíðni
176	2	352	8%
177	1	177	4%
178	2	356	8%
179	2	358	8%
180	5	900	20%
181	2	362	8%
182	3	546	12%
183	4	732	16%
184	3	552	12%
185	1	185	4%
Samtals:	**25**	**4520**	**100%**

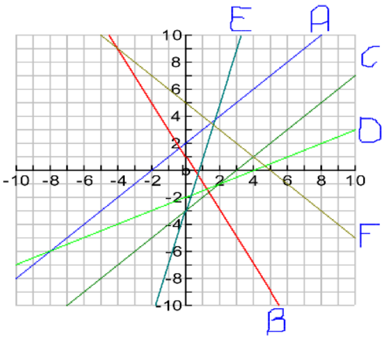
b. 180,8cm
c. 28%
d. 12%
e.



6.



Æfing 6.1

1. a. $y = 2x + 2$
   b. $y = 4x - 2$
   c. $y = -3x + 3$
   d. $y = -3x + 5$
   e. $y = \frac{1}{2}x + 3$
   f. $y = -4x + 8$
2. 

Æfing 6.2

1. a. h = 2
   b. h = 2
   c. h = -2
   d. h = -1
   e. h = -3
   f. h = 4
2. a. h = -2
   b. h = -6
   c. h = 3
   d. h = -1
   e. h = -1
   f. h = 1
3. h = já
4. h = já
5. h = nei
6. a. h = 5, m = 3
   b. h = -2, m = 2
   c. h = 1, m = -4
   d. h = 2/3, m = -11
   e. h = -4/5, m = 0
7. h = já
8. h = nei
9. (-2,-8), (2,0) og (5,6)

Æfing 6.3

1. Y = 3x – 3
2. Y = -2x + 1
3. Y = x
4. Y = -4x + 18
5. Y = 5
6. Y = -2x + 3
7. Y = x + 1
8. Y = -2x + 4
9. Y = -x + 8
10. Y = x – 3
11. Y = 2x – 7
12. Y = -3x + 9

Æfing 6.4

1. Samsíða línur eru c og f Hornréttar línur eru d og e
2. T.d. $y = 5x + 2$
3. T.d. $y = -\frac{1}{5}x + 2$
4. a. h = 4
   b. h = $-\frac{1}{4}$
5. a. Já, þær sem hafa h = $-\frac{8}{3}$og h = $\frac{3}{8}$
   b. Nei
   c. Já, þær sem hafa h = $-\frac{5}{6}$og h = $\frac{5}{6}$
6. h = 2

Æfing 6.5

1. a. h = 2 og m = 1
   b. h = 2 og m = 3
   c. h = -3 og m = 4
   d. h = -1 og m = -2
   e. h = 2 og m = -4
   f. h = 1/2 og m = 3
2. Línurnar a og e eru samsíða og línurnar b og d eru samsíða
3. Línurnar a og d eru samsíða og línurnar c og e eru samsíða
4. a. Já
   b. Nei
   c. Nei
   d. Já
5. a. m = 9
   b. m = -5
   c. m = 3
   d. m = 8
6. a. skurðpunktur við y-ás er (0, 2)
   b. skurðpunktur við y-ás er (0, -5)
   c. skurðpunktur við y-ás er (0, 1)
   d. skurðpunktur við y-ás er (0, 0)
7. nei
8. Já
9. a. h = 4
   b. (0, -2)
   d. Já
10. a. h = 1
    b. (0, -2)
    d. Nei

Æfing 6.6

1. a. 2
b. -1
c. $-\frac{7}{5}$

2. Já.

3. a. Já
b. Nei
c. Já

4. a. $y = 3x + 6$
b. $y = -x - 5$
c. $y = -2x + 3$

5. a. Lína með h = 3
b. Lína með h = -1
c. Lína með h = -2

6. a. Lína með h = $-\frac{1}{3}$
b. Lína með h = 1
c. Lína með h = $\frac{1}{2}$

7. a. $y = 2x - 3$
b. $y = -4x + 5$
c. $y = 5x + 2$

8. a. Jafnan er: $y = 2x + 4$
b. Jafnan er: $y = -3x - 1$
c. Jafnan er: $y = 4x - 2$

Æfing 7.1

1. a. 27
b. 256
c. 16
d. -343
e. -227
f. 1266
g. -46.656
h. -18000

2. a. 3^9
b. 4^8
c. 5^{16}
d. 3^{15}
e. 2^{25}
f. 4^{42}

3. a. 3^9
b. 4^8
c. 5^{30}
d. 5^{24}
e. 6^{22}
f. 3^{46}

4. a. 3
b. 4^2
c. 5^6
d. 5
e. 6^4
f. 4^5

5. a. 7^{12}
b. 7^9
c. 7^{12}

6. a. $7^6 \cdot 6^4$
b. 5^6
c. 4^{10}
d. 2^3

Æfing 7.2

1. a. 0,037
b. 0,0625
c. 1
d. 0,0019

2. a. 3^{-9}
b. 3^3
c. 3^{-2}
d. 4^{-9}

3. a. 2^{-20}
b. 6
c. 5^4
d. 3^{-8}
e. 3^3
f. 5^{-12}

4. a. 2^{-9}
b. 3^5
c. 6^7
d. 4^{-8}
e. 5^{17}

5. a. 4^2
b. 3
c. 2^{-3}
d. 3^{25}

Æfing 7.3

1. a. 4^{11}
b. 3^{20}
c. 6^6

2. a. 4^2
b. 3^5
c . 6^3

3. a. 2^3
b. 5^{-6}
c. 7^{10}

4. a. x^2
b. a^{-4}
c. x^{-8}

5. a. $9x^2$
b. $8x^2y^3$
c. $64a^5b^2$

6. a. $x = 3$
b. $x = -3$
c. $x = -4$