a) hröðun kúlunnar
b) hve langan tíma það tók kúluna að stöðvast

*Svar: (a)* $a = v^2/2s = -9{,}31 \times 10^4$ m/s$^2$.
*(b) 1,18* ms *(millisekúndur).*

**Dæmi 2.3.10.** Hamstur sprettur af stað úr kyrrstöðu og nær 1,80 m/s hraða á 0,85 metrum með jafnri hröðun. Hvað var hann lengi að ná þessum hraða?

*Svar: 0,94* s

**Dæmi 2.3.11.** Bíll eykur hraðann með jafnri hröðun úr 6,0 m/s í 18 m/s og fer 55 m á meðan. Reiknið
a) hröðun bílsins
b) tímann sem hraðaukningin tekur

*Svar: (a) 2,6* m/s$^2$. *(b) 4,58* s.

**Dæmi 2.3.12.** Flugvél á flugbraut þarf 16,2 s og 900,0 m vegalengd til að hefja sig á loft úr kyrrstöðu (með jafnri hröðun). Reiknaðu
a) hröðunina í flugtaksbruninu
b) flugtakshraðann

*Svar: (a) 6,86* m/s$^2$ *(b) 111* m/s. ☞4

**Dæmi 2.3.13.** Jules Verne varpaði fram þeirri hugmynd árið 1865 í bók sinni, *Ferðinni til Tunglsins*, að skjóta geimflaug til Tunglsins úr 220 m langri fallbyssu þannig að lokahraðinn yrði 10,97 km/s (sem er sá hraði sem þarf til að losna úr þyngdarsviði Jarðar). Hve mikilli hröðun mundi fólk í slíkri geimflaug verða fyrir? Er hugmyndin raunhæf ef mesta hröðun sem mannslíkami þolir er um 1000 m/s$^2$.

*Svar: 2,74* $\times$ *10*$^5$ m/s

Geimfararnir hefðu breyst í kjötkássu!

***Dæmi 2.3.14.** Bíll tætir af stað á gatnamótum, nær 90,0 km/klst hraða með jafnri hröðun á 5,0 sek og fer með jöfnum hraða þar til hann stöðvast á 30,0 m með jafnri (negatífri) hröðun. Hvað er hann lengi að keyra út að næstu gatnamótum ef þangað eru 400,0 metrar?

*Svar: 19,7* s

Þetta dæmi er nokkuð þungt í vöfum, það þarf að skipta hreyfingunni í þrennt og reikna hvern hluta fyrir sig. Hins vegar er miklu auðveldara að reikna þetta dæmi með því að nota vt-graf eins og í dæmi 2.3.21.

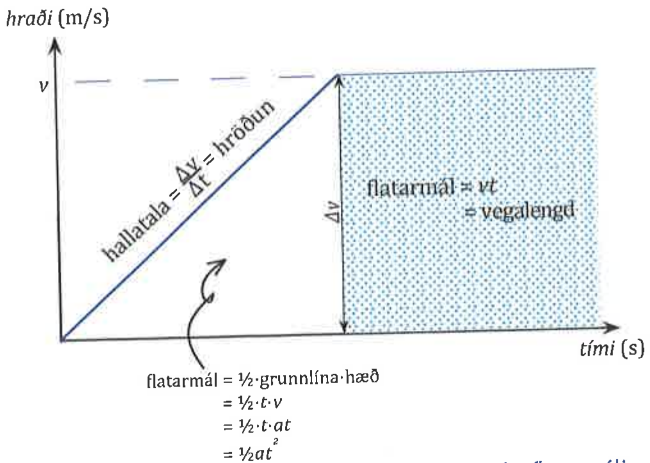
## Hraða-tíma gröf

Graf sem sýnir hraða á lóðrétta ás sem fall af tíma hentar vel til að gefa myndræna lýsingu á hreyfingu.

- Á *vt*-grafi er vegalengdin einfaldlega jöfn *flatarmálinu undir ferlinum*.
- Á *vt*-grafi er hallatala ferilsins jöfn hröðun hlutarins.

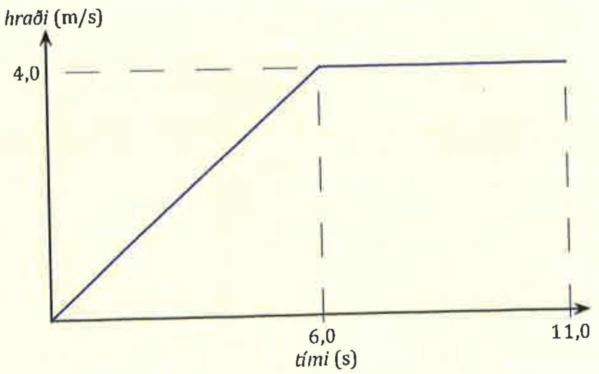
Þrjú tilvik:
- jöfn hröðun ef ferillinn er bein lína
- jafn hraði ef lárétt lína
- hröðunin er alltaf hallatala snertils

Skoðaðu myndina hér til hliðar, af hreyfingu sem byrjar í kyrrstöðu og nær hraða *v* með jafnri hröðun (bein hallandi lína). Vegalengdin er jöfn flatarmálinu undir ferlinum, bæði þegar hraði breytist og þegar hann er jafn.




Hraða-tíma-graf (*vt*-graf), en vegalengdin er jöfn flatarmálinu undir grafinu. Oft er þægilegra að reikna flatarmál á *vt*-grafi heldur en að setja inn í viðeigandi jöfnur. Hér er flatarmálið til dæmis sett saman úr þríhyrningi og kassa.

**Dæmi 2.3.15.** Myndin sýnir *vt*-graf fyrir bíl sem eykur hraðann úr kyrrstöðu í 4,0 m/s á 6,0 sek, og hreyfist síðan með jöfnum hraða næstu 5,0 sekúndur eftir það.




a) Notaðu grafið til að reikna heildarvegalengdina.
b) Hver er hröðunin á fyrstu 6 sek? (hallatalan)?
b) Reiknaðu heildarvegalengdina með hreyfijöfnunum og berðu saman við svarið í (a).

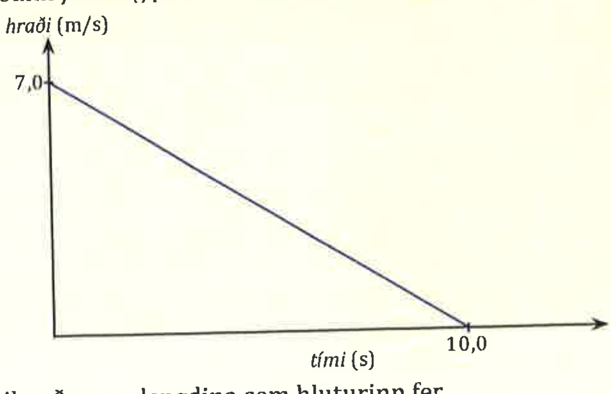
*Svar: (a) Flatarmál = 6·4/2 + 5·4 = 32* m (b) 0,67 m/s$^2$.

Í c-lið þarf að skipta hreyfingunni í tvennt, fyrst hreyfing með jafnri hröðun og síðan með jöfnum hraða í 5 sekúndur, þannig að heildarvegalengdin verður

$s = \frac{1}{2}\, a\, t_1^2 + v_{\text{jafn}} \cdot t_2 = \frac{1}{2} \cdot 4/6 \cdot 6^2 + 4 \cdot 5 = 12 + 20 = 32$ m.

*Hér er talsvert einfaldara að reikna vegalengdina sem flatarmál á vt-grafinu. Taktu líka eftir að einingarnar ganga upp: (6* s · *4* m/s*)/2 = 12* m *því sekúndurnar styttast út.*

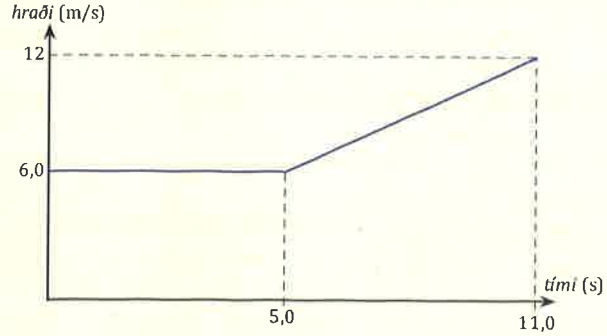
**Dæmi 2.3.16.** Myndin sýnir *vt*-graf fyrir hlut sem minnkar hraðann jafnt og þétt úr 7 m/s niður í núll.




Reiknaðu vegalengdina sem hluturinn fer.

*Svar: s = flatarmál = ½·10·7 = 35* m.

**Dæmi 2.3.17.** Myndin sýnir vt-graf fyrir hlut sem hreyfist með jöfnum 6,0 m/s hraða, en eykur síðan hraðann með jafnri hröðun, upp í 12,0 m/s á 6,0 sek.




a) Notaðu grafið til að finna heildarvegalengdina.
b) Reiknaðu hröðunina á seinni hluta leiðarinnar með því að finna hallatölu ferilsins.

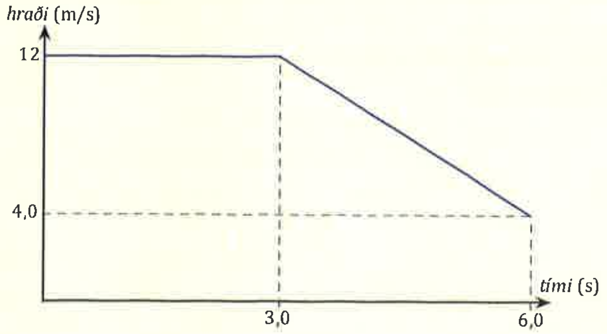
*Svar: (a) 84* m *(b) hallatala = 1 m/s²*.

Hallatala er skilgreind sem lóðrétt breyting deilt með láréttri breytingu, $h = \Delta y/\Delta x$. Hér er $\Delta y = 12 - 6 = 6$ m/s, og $\Delta x = 11 - 5 = 6$ s. Þá er hallatalan

$$h = (6 \text{ m/s}) / (6 \text{ s}) = 1 \text{ m/s}^2$$

og hröðunin er þá 1 m/s².

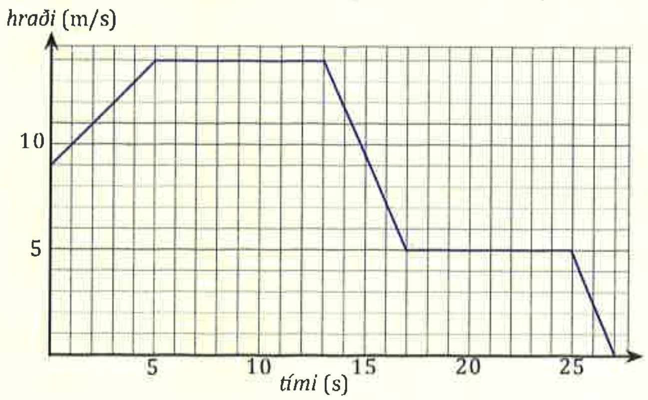
**Dæmi 2.3.18.** Myndin sýnir *vt*-graf.




a) Reiknaðu heildarvegalengdina.
b) Reiknaðu hröðunina frá $t = 3$ sek til $t = 6$ sek.

*Svar: (a)* $s = 36 + 12 + 24/2 = 60$ m. *(b)* $a = -2{,}7$ m/s².

**Dæmi 2.3.19.** Myndin sýnir *vt*-graf fyrir mótorhjól.




a) Reiknaðu heildarvegalengdina.
b) Hver er hröðun hlutarins frá 0 til 5 s?
c) Hver er hröðunin þegar t = 15 s?

*Svar: (a) 252,5* m. *(b) 1,0* m/s². *(c) –9/4* m/s².

Hversu marga markverða stafi á að nota hérna? Það er álitamál hversu nákvæmlega við getum lesið af grafinu og líklega eru tveir markverðir stafir hæfilegir. Nákvæm útkoma úr (a)-lið er 252,5 m, en það er óraunhæft að hægt sé að lesa af grafinu með fjórum markverðum stöfum! Þetta er því matsatriði: Eðlisfræði er vissulega nákvæmnis vísindagrein, en mælingar okkar eru alltaf ónákvæmar. Í c-lið þá er hröðunin við $t = 15$ s sú sama og á öllu tímabilinu frá 13 til 17 sek, en hallatala ferilsins á því bili er $\Delta y/\Delta x = (5 - 14) / 4 = -9/4 = -2{,}25$ m/s².

**Dæmi 2.3.20.** Mótorhjól tekur af stað úr kyrrstöðu og nær 90,0 km/klst á 10,0 sekúndum, heldur þeim hraða í 12 sekúndur, og stöðvast síðan á 35 m vegalengd.
a) Teiknaðu *vt*-graf.
b) Notaðu grafið til að reikna heildarvegalengdina.
c) Notaðu grafið til að reikna hröðun hjólsins í byrjun og á meðan það stöðvast.

*Svar: (b)* $s = 460$ m. *(c)* $a = 2{,}5$ m/s² *og* $-8{,}9$ m/s².

Í c-lið þarf að byrja á að finna tímann, með reglu um flatarmál þríhyrnings: $½ \cdot t \cdot 25 = 35$, svo að $t = 2{,}8$ s. Þá fæst að $a = \Delta v/\Delta t = -25/2{,}8 = -8{,}9$ m/s².

**Dæmi 2.3.21.** Reiknaðu dæmi 2.3.14 með því að teikna *vt*-graf.

Hér má sjá að dæmi sem útheimtir flókna algebru ef við notum hreyfijöfnurnar verður leikur einn með því að teikna *vt*-graf!

**Dæmi 2.3.22.** Bíll á 15,0 m/s hraða eykur hraðann jafnt og þétt upp í 25,0 m/s á 6,00 sekúndum, heldur þeim hraða í 12,0 s og stöðvast svo á 45,0 metrum (en óþekktum tíma).
a) Teiknaðu *vt*-graf og finndu heildarvegalengdina sem bíllinn fór með því að finna flatarmálið undir ferlinum.
b) Hve langan tíma tók að stöðva bílinn?

*Svar: (a) 465* m. *(b) 3,6* s.

**Dæmi 2.3.23.** Stúlka á hjóli fær jafna hröðun úr kyrrstöðu niður 500,0 m brekku, og nær 22,0 m/s hraða neðst í brekkunni, en fríhjólar síðan þegar á jafnsléttu er komið og stöðvast 192 s eftir að hún lagði af stað.
a) Reiknaðu hvað hún var lengi að ná hámarkshraða
b) Teiknaðu hraða-tíma graf fyrir hreyfinguna alla
c) Reiknaðu hröðunina á hvorum hluta leiðarinnar og meðalhraðann.

*Svar: (a) 45,5* s. *(b) 0,48* m/s² *og 0,15* m/s². *(c) 11* m/s.

**Dæmi 2.3.24.** Bíll *A* tekur af stað úr kyrrstöðu með $a_A = 5{,}0$ m/s² hröðun upp í 25 m/s hraða (og heldur þeim hraða eftir það) og bíll *B* samtímis frá sama stað með $a_B = 3{,}0$ m/s² hröðun þar til hann nær *A*.
a) Hve lengi er A að ná sínum hámarkshraða og hversu langa vegalengd fer hann á meðan?
b) Eftir hve langan tíma nær bíll *B* bíl *A*?

*Svar: (a) 5,0 sek og 62,5 m. (b) Teikna vt-graf og sjá að* $s_A = 62{,}5 + 25(t - 5)$*, svo að* $t = 13{,}6$ s

**Dæmi 2.3.25.** Ökumaður bíls neglir niður þegar hann sér kyrrstæðan vörubíl á veginum framundan. Bíllinn hægir á sér með jafnri hröðun –5,60 m/s² í 4,20 sek, og skilur eftir sig bremsuför sem mælast 62,4 m áður en hann rekst á vörubílinn. Teiknaðu vt-graf og notaðu það til að ákvarða hraða bílsins þegar áreksturinn verður. *Svar: 3,1* m/s