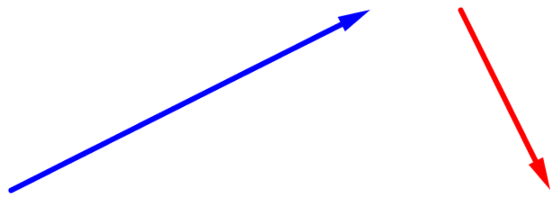
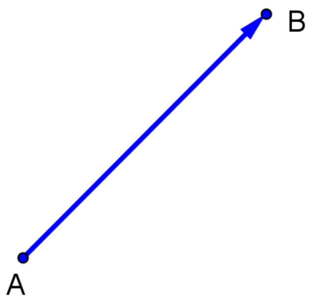
Kafli 1 – Vigrar

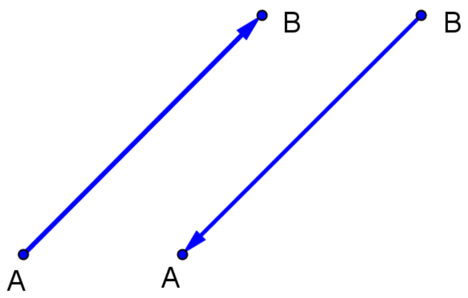
Mörg fyrirbæri í náttúrunni hafa bæði stærð og stefnu svo sem kraftur, færsla, hraði, hröðun og skriðþungi. Þessum fyrirbærum er lýst í stærðfræðinni með strikum sem hafa stefnu, þ.e. örvum, sem kallast vigrar (vektorar). Orðið vigur þýðir spjót. Hér er mynd af tveimur vigrum.



Vigrar eru táknaðir með litlum feitletruðum bókstöfum svo sem **a**, **b**, **c** eða með litlum bókstöfum með striki eða ör yfir ($\overline{a}$, $\overline{b}$, $\vec{c}$) eða $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, þar sem fyrri bókstafurinn er upphafspunkur og seinni bókstafurinn endapunktur vigursins (oddurinn á örinni). Þannig er A upphafspunktur og B endapunktur vigursins $\overline{AB}$ og stefnan er frá A til B. Í textanum, sem hér fer á eftir, er ýmist notuð feitletrun eða yfirstrikun til að tákna vigra.



Vigurinn $\overline{BA}$ er jafnlangur $\overline{AB}$ en hefur gagnstæða stefnu. Vigrar sem eru jafnlangir en hafa gagnstæða stefnu kallast gagnstæðir vigrar. Sá vigur sem er gagnstæður $\overline{AB}$ er einnig táknaður $-\overline{AB}$ (þ.e. $-\overline{AB} = \overline{BA}$)



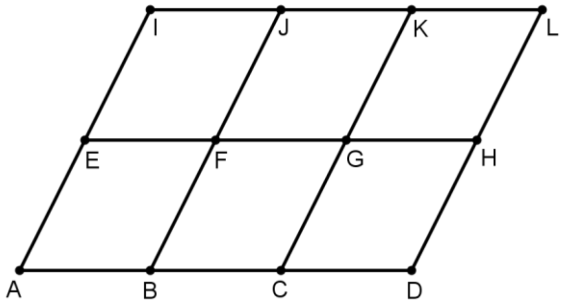
Vigur sem hefur lengdina núll kallast <u>núllvigur</u> (táknaður $\overline{0}$). Hann hefur enga stefnu og lítur út eins og punktur. Allir vigrar sem hafa sama upphafs- og endapunkt svo sem $\overline{AA}$, $\overline{BB}$, .. eru núllvigrar.

Vigur sem hefur lengdina 1 kallast <u>einingarvigur.</u>

<u>Lengd vigurs</u> er jákvæð tala (nema vigurinn sé núllvigur en þá er lengdin talan 0) og er hún táknuð með tveimur lóðréttum strikum. Þannig er lengd vigursins $\vec{a}$ táknuð með $\left|\vec{a}\right|$. <u>Ekki má rugla saman vigrinum þ.e. örinni og lengd vigursins sem er tala.</u>

Vigur ákvarðast eingöngu af stærð sinni og stefnu þannig að tveir vigrar eru jafnir (eins) ef þeir eru jafnlangir og með sömu stefnu. Þetta hefur í för með sér að hægt er að færa vigra til og láta hvaða punkt sem er vera upphafspunkt.

Dæmi 1.1 Á myndinni sjást sex eins samsíðungar. Finndu alla vigra á myndinni sem eru jafnir vigrinum $\overline{AF}$.



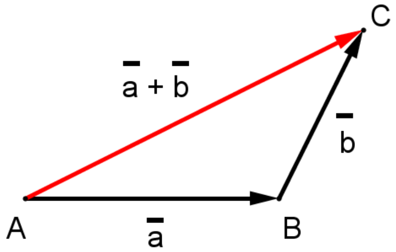
Lausn: $\overline{BG}$, $\overline{CH}$, $\overline{EJ}$, $\overline{FK}$ og $\overline{GL}$.

Samlagning vigra

Í náttúrunni leggjast vigrar saman. Þegar maður gengur úti í vindi eykst hraðinn ef vindurinn er í bakið en tefur för þegar á móti blæs. Ef báti er róið yfir á þarf að stefna upp í strauminn ef lenda skal á bakkanum beint á móti. Í báðum þessum dæmum leggjast vigrar saman. Hraði mannsins og hraði vindsins í fyrra dæminu og straumhraði vatnsins og hraði bátsins í seinna dæminu. Hér á eftir fer skilgreining á samlagningu vigra.

Ef $\overline{a} = \overline{AB}$ og $\overline{b} = \overline{BC}$ þá er

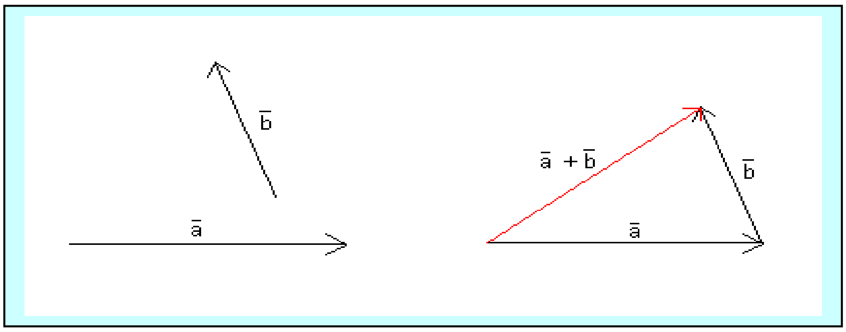
$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$



Taktu vel eftir að endapunktur $\overline{AB}$ er upphafspunktur $\overline{BC}$. Til að hægt sé að sýna samlagninguna $\bar{a} + \bar{b}$ á mynd þarf sem sé vigurinn $\bar{b}$ að vera í framhaldi af $\bar{a}$ líkt og verið sé að leggja einstefnuakstursveg úr tveimur vegarspottum. Útkoman úr samlagningunni þ.e. vigurinn $\bar{a} + \bar{b}$ er svo örin frá upphafspunkti $\bar{a}$ til endapunkts $\bar{b}$.

Dæmi 1.2 Gefnir eru tveir vigrar $\bar{a}$ og $\bar{b}$**.** Sýndu samlagninguna $\bar{a} + \bar{b}$ á mynd.

Lausn: Teiknum vigurinn $\bar{b}$ í framhaldi af $\bar{a}$. Teiknum svo ör með stefnu frá upphafspunkti $\bar{a}$ til endapunkts $\bar{b}$. (Sjá mynd.)



Venjulegar reiknireglur gilda um samlagningu vigra, þ.e. víxlregla og tengiregla.

Víxlregla: $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$
Tengiregla: $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$

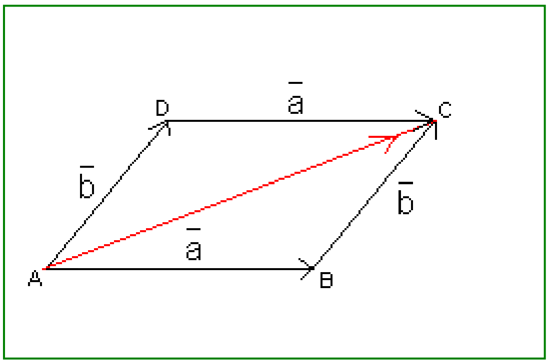
Sönnun á víxlreglu.

Vigrarnir $\bar{a}$ og $\bar{b}$ mynda samsíðung (sjá mynd).

Nú fæst $\bar{a} + \bar{b} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

og $\bar{b} + \bar{a} = \overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AC}$

þar með gildir að $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$



Dæmi 1.3 Reiknaðu $\overline{AB} + \overline{CA} + \overline{BD}$.

Lausn: Ekki er hægt að leggja vigrana saman í þessari röð en ef við víxlum röðinni á $\overline{AB}$ og $\overline{CA}$ mynda vigrarnir samfelldan einstefnuveg frá C til D þ.e.
$\overline{AB} + \overline{CA} + \overline{BD} = \overline{CA} + \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{CD}$.

Athugasemd: Hægt er að reikna dæmið þótt lengdir vigranna séu ekki gefnar og ekki stefnurnar heldur.

Innskotsreglan

Sé samlagningin $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ skrifuð afturábak þ.e.

$$\boxed{\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}}$$

gengur formúlan undir heitinu innskotsreglan og er sagt að B sé innskotspunktur. Líta má svo á að verið sé að velja sér aðra leið milli A og C en beina leið með því að skjóta inn millipunkti. Ferðalagið frá A til B og þaðan yfir í C gefur sömu heildarfærslu og beina leiðin frá A til C. Innskotspunkturinn getur verið hvaða punktur sem er og sama gildir um punktana A og B.

Dæmi 1.4 Notaðu innskotspunktinn R til að fara frá P til Q.

Lausn: $\overline{PQ} = \overline{PR} + \overline{RQ}$

Lengdir vigranna leggjast ekki saman þegar vigrar eru lagðir saman. Leiðin frá P til R og þaðan til Q er lengri en leiðin beint frá P til Q (nema þegar R er á milli P og Q).

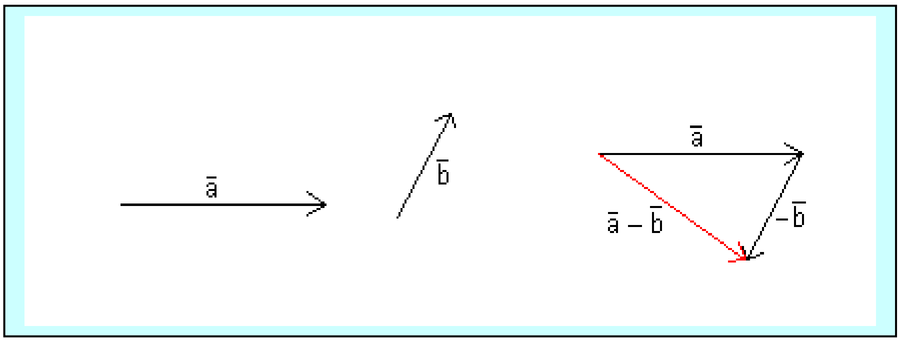
Frádráttur vigra

Þegar draga á vigur $\overline{b}$ frá vigri $\overline{a}$ er gagnstæði vigur $\overline{b}$ (þ.e. $-\overline{b}$) lagður við $\overline{a}$ þannig að frádrátturinn breytist í samlagningu:

$$\boxed{\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b})}$$

Dæmi 1.5 Sýndu frádráttinn $\bar{a} - \bar{b}$ á mynd.

Lausn: Teiknum vigurinn $-\bar{b}$, þ.e. vigur sem er gagnstæður $\bar{b}$, í framhaldi af $\bar{a}$. Útkoman er örin frá upphafspunkti $\bar{a}$ til endapunkts $-\bar{b}$.



Blandað margfeldi

Hægt er að margfalda saman vigur og tölu. Það kallast blandað margfeldi. Ef margfeldistalan er jákvæð helst stefna vigursins óbreytt en stefnan snýst við þ.e. verður gagnstæð ef talan er neikvæð. Ef $\bar{a}$ er einhver vigur þá eru $2\bar{a}$, $3\bar{a}$, $5\bar{a}$ o.s.frv. vigrar sem hafa sömu stefnu og $\bar{a}$ en eru tvöfalt, þrefalt og fimmfalt lengri og $0{,}5\bar{a}$ hefur sömu stefnu og $\bar{a}$ en lengd hans er helmingur af lengd $\bar{a}$. Vigrarnir $-2\bar{a}$, $-3\bar{a}$ o.s.frv. eru líka tvöfalt og þrefalt lengri en $\bar{a}$ en hafa gagnstæða stefnu. Vigurinn $-1\bar{a}$ er ritaður $-\bar{a}$. Hann er jafnlangur og $\bar{a}$ en með gagnstæða stefnu ($\bar{a}$ og $-\bar{a}$ eru gagnstæðir vigrar).

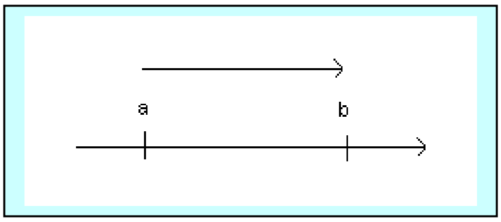
Almennt er $t\bar{a}$ vigur með sömu stefnu og $\bar{a}$ ef t er jákvæð tala og lengd hans er t-föld lengd $\bar{a}$ en ef t er neikvæð hafa $t\bar{a}$ og $\bar{a}$ gagnstæða stefnu.

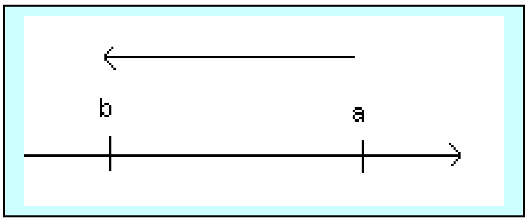
Dæmi 1.6 Vigurinn $\bar{a}$ hefur lengdina 2 (þ.e. $|\bar{a}| = 2$). Finndu vigur sem er 6 að lengd og hefur stefnu sem er gagnstæð stefnu $\bar{a}$.

Lausn: Vigurinn $-3\bar{a}$ hefur gagnstæða stefnu við $\bar{a}$ og er þrefalt lengri þ.e. 6 að lengd.

Vigrar í hnitakerfi

Ef a og b eru tvær tölur á talnalínunni er færslan frá a til b talan b – a.





Færsla til hægri (í stefnu talnalínunnar) er jákvæð en færsla til vinstri neikvæð.

Færsla er dæmi um fyrirbæri sem er vigur og má líta á færslu á milli tveggja talna á talnalínu sem vigur.

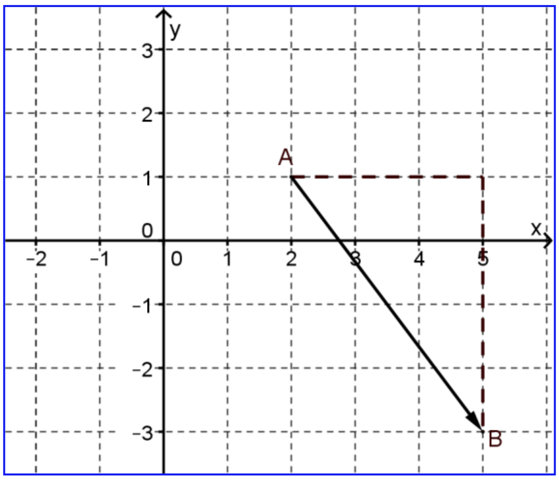
Hér á eftir verður fjallað um færslu á milli tveggja punkta í hnitakerfi.

Sérhverja færslu milli tveggja punkta A og B í hnitakerfi er hægt að setja saman úr láréttri og lóðréttri færslu. Færslan frá A til B kallast vigurinn $\overline{AB}$. Ef lárétta færslan er táknuð x og lóðrétta færslan y er ritað $\overline{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ og x og y kallast hnit vigursins $\overline{AB}$.

Efri talan sem er x-hnitið er lárétta færslan og neðri talan sem er y-hnitið er lóðrétta færslan.

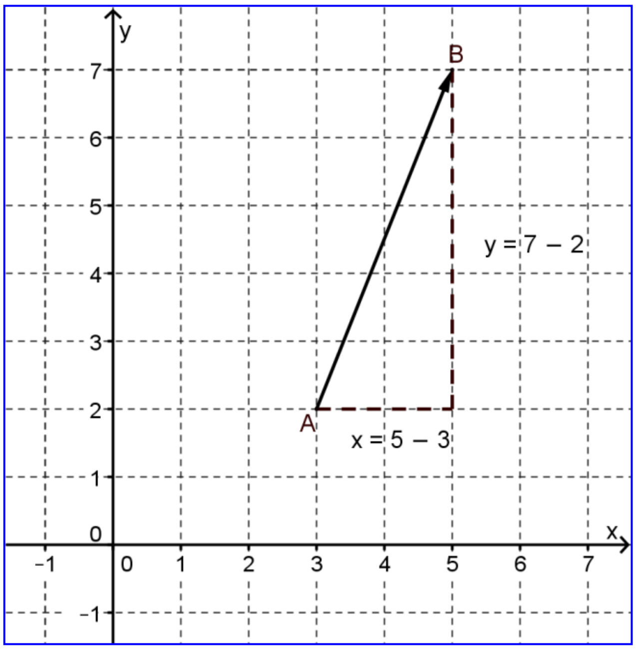
Dæmi 1.7 Teiknaðu vigurinn $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ í hnitakerfi.

Lausn: Þar sem ekki er gefinn upphafspunktur getum við notað hvaða punkt sem er sem upphafspunkt vigursins. Veljum einhvern punkt sem upphafspunkt t.d. A = (2 , 1). Færum okkur síðan 3 einingar til hægri lárétt og 4 einingar niður lóðrétt og þar er endapunktur vigursins. Köllum endapunktinn B. Teiknum síðan ör frá A til B.



Dæmi 1.8 Reiknaðu hnit vigurins $\overline{AB}$ ef A = (3 , 2) og B = (5 , 7).

Lausn: Lárétta færslan er x = 5 – 3 = 2 og lóðrétta færslan er y = 7 – 2 = 5. Vigurinn frá A til B er því $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.



Hnit vigursins $\overline{AB}$ fást með því að draga hnitin á upphafspunktinum A frá hnitum endapunktsins B. Efri talan er x-hnitið en sú neðri y-hnitið.

Almennt gildir: Ef $A = (x_1, y_1)$ og $B = (x_2, y_2)$ þá er færslan frá A til B vigurinn $\overline{AB}$. Færslan í lárétta stefnu $x_2 - x_1$ og færslan í lóðrétta stefnu $y_2 - y_1$ kallast hnit vigursins og er þetta ritað á forminu:

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Lengd vigurs

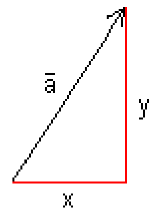
Hægt er að nota reglu Pýþagórasar til að finna lengd vigurs. Gerum ráð fyrir að a og b séu skammhliðar í rétthyrndum þríhyrningi og c langhlið hans. Þá gildir skv. reglu Pýþagórasar:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Lárétta og lóðrétta færslan ásamt vigrinum sjálfum mynda rétthyrndan þríhyrning þar sem vigurinn verður langhlið. Því fæst eftirfarandi niðurstaða:

Ef $\bar{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ þá er lengd vigursins (táknuðu $|\bar{a}|$)

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$



Taktu eftir að ekki skiptir máli hvort hnit vigursins (þ.e. x og y) eru jákvæð eða neikvæð því að þau eru sett í annað veldi og útkoman verður jákvæð (eða núll).

Dæmi 1.9 Reiknaðu lengd vigursins $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Lausn: $|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$, eða bara $|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Það er alveg eins gott að sleppa mínusnum á 4 strax því að hann hverfur hvort sem er þegar y-hnitið er sett í annað veldi.

Dæmi 1.10 Reiknaðu lengd vigursins $\overline{AB}$ ef $A = (3\ ,\ 4)$ og $B = (-2\ ,\ 8)$.

Lausn: i) Fyrst reiknum við hnit vigursins: $\overline{AB} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

ii) Síðan reiknum við lengd vigursins: $|\overline{AB}| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$ $(\approx 6{,}4)$

Dæmi 1.11 Reiknaðu gildið á x ef lengd vigursins $\begin{pmatrix} 2x \\ x+1 \end{pmatrix}$ er 2.

Lausn: Höfum að $\sqrt{(2x)^2 + (x+1)^2} = 2$. Setjum báðar hliðar í annað veldi og reiknum upp úr svigum og fáum $4x^2 + x^2 + 2x + 1 = 4$ eða $5x^2 + 2x - 3 = 0$ sem er annars stigs jafna með lausnir $x = -1$, $x = \frac{3}{5}$.

Hallatala vigurs

Vigur í hnitakerfi hefur hallatölu eins og lína. Undantekningar eru þó lóðréttir vigrar og núllvigurinn. (Lóðréttar línur hafa ekki hallatölu.) Hallatala vigurs er reiknað á sama hátt og hallatala línu, þ.e. með því að deila láréttu færslunni upp í þá lóðréttu, þ.e. deila x-hniti vigursins upp í y-hnitið. Vigrar sem hafa sömu hallatölu (eða eru lóðréttir) eru samsíða. Þeir hafa annað hvort sömu stefnu eða gagnstæða stefnu.

Skilgreining: Ef $\bar{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ og $x \neq 0$ (þ.e $\bar{a}$ er ekki lóðréttur og ekki núllvigur) þá er hallatala $\bar{a}$ (táknuð $h_{\bar{a}}$) gefin með

$$h_{\bar{a}} = \frac{y}{x}$$

Dæmi 1.12 Reiknaðu hallatölu vigursins $\bar{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Lausn: $h_{\bar{a}} = \dfrac{-10}{5} = -2$.

Dæmi 1.13 Reiknaðu gildið á t ef $\bar{a} = \begin{pmatrix} t-2 \\ 5 \end{pmatrix}$ er samsíða $\bar{b} = \begin{pmatrix} t+3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Lausn: Við notum að $h_{\bar{a}} = h_{\bar{b}}$ og fáum: $\dfrac{5}{t-2} = \dfrac{6}{t+3}$ svo $5(t+3) = 6(t-2)$

svo $5t + 15 = 6t - 12$ og þá er $t = 27$

Dæmi 1.14 i) Finndu vigur sem hefur hallatöluna 5.

ii) Finndu vigur sem er samsíða línunni $y = \dfrac{3}{4}x + 5$.

Lausn: i) Töluna 5 má rita sem $\dfrac{5}{1}$. Vigurinn $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ hefur hallatöluna $\dfrac{5}{1} = 5$ og er því eitt mögulegt svar.

ii) Vigurinn $\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ er eitt mögulegt svar.

Samlagning og frádráttur vigra í hnitakerfi

Þegar tveir vigrar eru lagðir saman leggjast láréttar færslur þeirra saman og einnig lóðréttar færslur þeirra og því fæst:

$$\text{Ef } \bar{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ og } \bar{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ þá er}$$

$$\bar{a} + \bar{b} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \bar{a} - \bar{b} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

Dæmi 1.15 Leggðu vigrana $\bar{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ saman og reiknaðu einnig $\bar{a} - \bar{b}$.

Lausn: i) $\bar{a} + \bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+4 \\ 6+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

ii) $\bar{a} - \bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-4 \\ 6-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

Blandað margfeldi í hnitakerfi

Ef $\bar{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ er vigur og t er einhver tala þá er $t\bar{a} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix}$.

Dæmi 1.16 Reiknaðu hnit vigranna $3\bar{a}$ og $-2\bar{a}$ ef $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Lausn: $3\bar{a} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 \\ 3\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix}$ og $-2\bar{a} = \begin{pmatrix} -2\cdot 2 \\ -2\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Dæmi 1.17 Finndu einingarvigur $\bar{e}$ sem hefur sömu stefnu og $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lausn: Reiknum fyrst lengd vigursins: $\left|\bar{a}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Til að búa til einingarvigur með sömu stefnu og $\bar{a}$ þarf að gera $\bar{a}$ 5 sinnum styttri og það gerum við einfaldlega með því að deila með 5 í bæði hnitin (en það er sama og margfalda með tölunni $\frac{1}{5}$). Svo $\bar{e} = \frac{1}{5}\bar{a} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

Dæmi 1.18 Finndu þá einingarvigra sem eru samsíða vigrinum $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lausn: Reiknum fyrst lengd vigursins: $\left|\bar{a}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Deilum svo með 5 í bæði hnitin. Hér eru tvö svör þar sem annar einingarvigurinn er samstefna $\bar{a}$ og hinn er gagnstefna og má skrifa þau í einu lagi sem $\bar{e} = \pm\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

Með hliðsjón af dæmunum hér á undan fæst eftirfarandi niðurstaða:

Almennt gildir:

Ef $\bar{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ og $\bar{a} \neq \bar{0}$ þá eru $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} x/\left|\bar{a}\right| \\ y/\left|\bar{a}\right| \end{pmatrix}$ og $\bar{e}_2 = -\begin{pmatrix} x/\left|\bar{a}\right| \\ y/\left|\bar{a}\right| \end{pmatrix}$ tveir einingarvigrar samsíða $\bar{a}$ (annar samstefna og hinn gagnstefna). ($\left|\bar{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$ er lengd vigursins $\bar{a}$.)

Dæmi 1.19 Finndu einingarvigur sem er gagnstefna vigrinum $\bar{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Lausn: Reiknum fyrst lengd vigursins: $\left|\bar{a}\right| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$ $(\approx 5{,}39)$.

Deilum nú með $\sqrt{29}$ í bæði hnitin og snúum að auki stefnunni við með því að skipta um formerki á báðum hnitunum, þ.e. margfalda með -1, og þá fæst: $\bar{e} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} \\ -\frac{5}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$.

Samsíða vigrar

Ef vigur **a** = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (**a** $\neq$ **0**) er margfaldaður með tölu t ($t \neq 0$) fæst vigur

t **a =** $\begin{pmatrix} t\,x \\ t\,y \end{pmatrix}$ sem er samsíða **a** því að hallatalan breytist ekki $\left(\frac{y}{x} = \frac{t\,y}{t\,x}\right)$. Öfugt gildir einnig að ef **a** og **b** eru tveir samsíða vigrar (hvorugur **0**) þá er **b** margfeldi af **a**, þ.e. hægt er að finna tölu t þannig að **b** = t **a**. (t = $\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$ ef $\bar{a}$ og $\bar{b}$ eru samstefna en t = $-\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$ ef $\bar{a}$ og $\bar{b}$ eru gagnstefna.) Þessa niðurstöðu má orða svona:

Það að tveir vigrar séu samsíða þýðir að annar vigurinn sé margfeldi af hinum.

Dæmi 1.20 **a** = $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ og **b =** $\begin{pmatrix} 15 \\ -6 \end{pmatrix}$. Sýndu að vigrarnir **a** og **b** séu samsíða og finndu síðan töluna t þannig að **b** = t **a.**

Lausn: Reiknum hallatölur vigranna: $h_{\bar{a}} = -\frac{2}{5}$ og $h_{\bar{b}} = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$. Þar sem vigrarnir hafa sömu hallatölu eru þeir samsíða. Augljóslega sést að **b** = – 3**a** svo t = – 3.
(en einnig má nota að t = $\frac{15}{-5} = -3$)

Staðarvigur

Punkturinn (0,0) kallast upphafspunktur hnitakerfisins og er venjulega táknaður O. Vigrar sem hafa upphafspunkt sinn í O = (0 , 0) eru kallaðir staðarvigrar. Ef A = (x , y) þá eru hnit staðarvigursins $\overline{OA} = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hnit staðarvigursins $\overline{OA}$ eru sem sé þau sömu og hnit endapunktsins A. Gættu þess að rugla ekki saman hnitum vigurs sem eru rituð lóðrétt og hnitum punkts sem eru rituð lárétt. Hnit punkts eru eingöngu staðsetning í hnitakerfi miðað við ásana en hnit vigurs hafa ekkert með staðsetningu að gera heldur tákna tvær færslur þar sem efri talan er lárétt færsla og neðri talan er lóðrétt færsla.

Vigrarnir $\bar{i}$ og $\bar{j}$ og liðun vigra

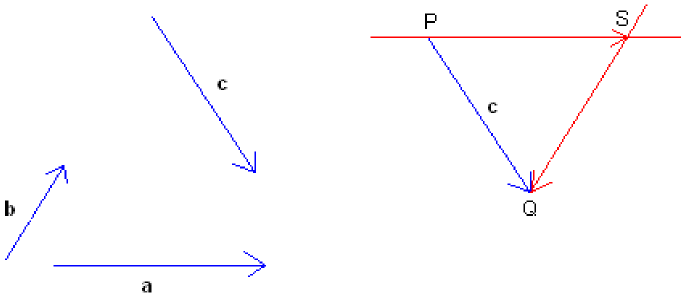
Vigrarnir $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eru einingarvigrar sá fyrri láréttur (í stefnu x-áss) og sá síðari lóðréttur (í stefnu y-áss). Þeir verða framvegis kallaðir **i** og **j**. Hægt er að byggja sérhvern vigur úr **i** og **j** þ.e.a. s. ef $\bar{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ er einhver vigur þá er **a** = x **i** + y **j** .

Ath. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

T.d. er **a =** $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ = 2 **i** – 3 **j** . Þetta er kallað að leysa **a** upp eftir **i** og **j** (eða leysa upp í liði samsíða **i** og **j** eða tákna **a** með **i** og **j**). Aðeins er einn möguleiki á að leysa vigur $\bar{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ upp eftir **i** og **j**, þ.e. tveir vigrar í hnitakerfi $\bar{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ eru jafnir ef og aðeins ef $x_1 = x_2$ og $y_1 = y_2$.

Almennt gildir að ef **a** og **b** eru einhverjir tveir vigrar sem eru ekki samsíða og **c** er einhver þriðji vigur þá er hægt að leysa **c** upp eftir **a** og **b** á nákvæmlega einn hátt . Það eru sem sagt til nákvæmlega tvær tölur s og t þannig að **c** = s**a** + t**b**.

Hér sést hvernig hægt er að leysa **c** upp eftir **a** og **b** á mynd. Látum upphafspunkt **c** heita P og endapunktinn Q. Teiknum línu gegnum P samsíða **a** og línu gegnum Q samsíða **b**. Köllum skurðpunkt línanna S. Þá fæst $\bar{c} = \overline{PS} + \overline{SQ}$ en $\overline{PS} = s\bar{a}$ og $\overline{SQ} = t\bar{b}$ þar sem s og t eru rauntölur.



Dæmi 1.21 Leystu vigurinn $\bar{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$ upp eftir $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

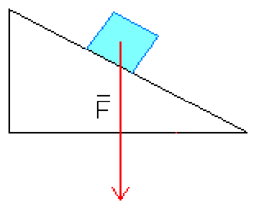
Lausn: Setjum hnit vigranna inn í jöfnuna **c** = s **a** + t **b** og þá fæst:

$\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ svo $\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s+5t \\ 4s+t \end{pmatrix}$ (Vigrarnir í hægri hliðinni lagðir saman.)

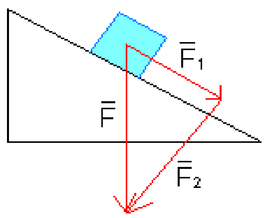
Þetta gefur okkur jöfnuhneppi: $\begin{matrix} 3s + 5t = 9 \\ 4s + t = -5 \end{matrix}$ sem hægt er að leysa með samlagningar- eða innsetningaraðferð (eða í vasareikninum) og niðurstaðan er að $s = -2$ og $t = 3$ svo $\bar{c} = -2\bar{a} + 3\bar{b}$

Oft þarf að leysa kraft upp eftir tveimur stefnum.

Dæmi 1.22 Kubbur rennur niður skáplan fyrir áhrif þyngdarkraftsins ($\bar{F}$ á myndinni). Leystu þyngdarkraftinn upp í tvo krafta $\bar{F}_1$ og $\bar{F}_2$ þar sem $\bar{F}_1$ er samsíða skáplaninu og $\bar{F}_2$ er hornréttur á skáplanið.



Lausn:



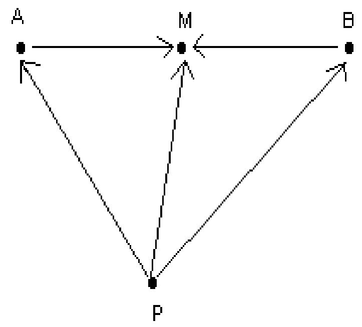
Hægt er að nota vigurreikninga til að sanna ýmsar rúmfræðireglur. Hér fylgja sannanir á þremur reglum.

Regla 1. Ef M er miðpunktur striksins AB og P er einhver punktur þá er

$$\overline{PM} = \frac{1}{2}\overline{PA} + \frac{1}{2}\overline{PB}$$

(þ.e. vigurinn frá P yfir í miðpunkt striksins er meðaltalið af vigrunum frá P yfir í endapunkta striksins.)

Sönnun:



$$\overline{PM} = \overline{PA} + \overline{AM}$$

$$\overline{PM} = \overline{PB} + \overline{BM}$$

Leggjum þessar tvær jöfnur saman og fáum:

$$2\,\overline{PM} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{AM} + \overline{BM}$$

Fyrst M er miðpunktur AB þá eru $\overline{AM}$ og $\overline{BM}$ gagnstefna og jafnlangir $(\overline{BM} = -\overline{AM})$

svo $\overline{AM} + \overline{BM} = \overline{0}$

Þar með fæst: $2\,\overline{PM} = \overline{PA} + \overline{PB}$

svo $\overline{PM} = \frac{1}{2}\overline{PA} + \frac{1}{2}\overline{PB}$ (jafnan margfölduð með $\frac{1}{2}$)

Ath. Ef P = (0,0), $A = (x_1, y_1)$ og $B = (x_2, y_2)$ eru sett inn fæst eftirfarandi niðurstaða:
$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ (þ.e hnitin á miðpunkti striks eru meðaltöl af hnitum endapunkta striksins.)

Dæmi 1.23 Reiknaðu hnitin á miðpunkti striksins AB ef A = (2 , 5) og B = (8 , – 3).

Lausn: Samkvæmt miðpunktsreglunni er $M = \left(\frac{2+8}{2}, \frac{5+(-3)}{2}\right) = (5, 1)$.

Dæmi 1.24 Reiknaðu hnitin á B ef A = (12 , –22) og M = (14 , 4) er miðpunktur AB.

Lausn. Látum B = (x , y). Samkvæmt miðpunktsreglunni fæst:

$$(14\,,4) = \left(\frac{12+x}{2}\ ,\ \frac{-22+y}{2}\right)$$ sem gefur tvær jöfnur:

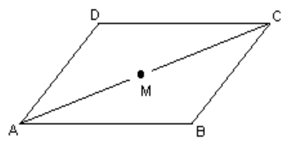
$14 = \dfrac{12+x}{2}$ og $4 = \dfrac{-22+y}{2}$. Við leysum nú hvora jöfnu fyrir sig og fáum

x = 28 –12 = 16 og y = 8 + 22 = 30 svo B = (16 , 30).

Næsta regla fjallar um hornalínur samsíðungs en samsíðungur er ferhyrningur þar sem mótlægar hliðar eru samsíða og jafnlangar. (Á vigramáli merkir þetta að mótlægar hliðar eru sömu vigrar.)

Regla 2. Hornalínur samsíðungs skipta hvor annarri í tvo jafna hluta. Með öðrum orðum: Skurðpunktur hornalínanna er miðpunktur þeirra beggja. Þessi regla er oft orðuð svona: Hornalínur í samsíðungi helminga hvor aðra.

Sönnun: Látum M vera miðpunktinn á hornalínunni AC.
Sýna þarf að hann sé líka miðpunktur á hornalínunni BD.



$\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{BC}$ samkvæmt miðpunktsreglunni (M er miðpunktur AC og B er hér í hlutverki punktsins P)

$= \frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{AD}$ því að $\overline{AD} = \overline{BC}$ í samsíðungi ABCD

$= \frac{1}{2}\overline{BD}$ því að $\overline{BA} + \overline{AD} = \overline{BD}$

En þar með hefur verið sýnt að M er líka miðpunktur á BD og þar með er reglan sönnuð.

Dæmi 1.25 A = (2 , 1), B = (5 , 6) og C = (– 3 , 8) eru þrír hornpunktar í samsíðungnum ABCD. Reiknaðu hnit D og skurðpunkt hornalínanna.

Lausn: Setjum D = (x , y) , reiknum hnit vigranna $\overline{AD}$ og $\overline{BC}$ og notum að $\overline{AD} = \overline{BC}$.

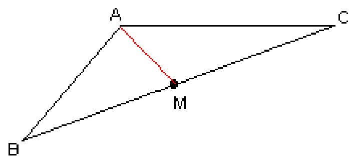
$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-5 \\ 8-6 \end{pmatrix} \text{ svo } \begin{matrix} x-2=-8 \\ y-1=2 \end{matrix} \text{ svo } \begin{matrix} x=-6 \\ y=3 \end{matrix} \text{ svo } D=(-6,3)$$

Notum miðpunktsregluna til að finna skurðpunkt hornalínanna en hann er miðpunktur á AC (og BD) og þá fæst

$$M = \left(\frac{2+(-3)}{2}, \frac{1+8}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right).$$

Hér hefði verið hægt að fara aðra leið. Reikna fyrst miðpunktinn á AC með miðpunktsreglunni og nota síðan miðpunktsregluna aftur til að reikna endapunktinn D á strikinu BD.

Miðlína í þríhyrningi er strik frá hornpunkti yfir í miðja mótlæga hlið.



Dæmi 1.26 Reiknaðu lengd miðlínunnar AM ef A = (4 , 5) , B = (7 , 12) og C = (5 , 8).

Lausn: i) Reiknum fyrst miðpunkt BC: $M = \left(\frac{7+5}{2}, \frac{12+8}{2} \right) = (6, 10)$

ii) Reiknum næst hnit vigursins $\overline{AM}$. Þá fæst $\overline{AM} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ 10-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

iii) Reiknum loks lengd vigursins $\overline{AM}$ og þá fæst $\left| \overline{AM} \right| = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$.

Regla 3. Miðlínur þríhyrnings ABC skerast allar í einum punkti og skipta hver annarri í hlutföllunum 2:1. Skurðpunkturinn kallast miðpunktur eða þyngdarpunktur þríhyrningsins. Ef hann er táknaður með T og O er einhver punktur þá gildir:

$$\overline{OT} = \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB} + \frac{1}{3}\overline{OC}$$

(þ.e. vigurinn frá O yfir í T er meðaltalið af vigrunum frá O yfir í A, B og C.)

Sönnun: Látum M vera miðpunkt BC og T vera punkt á miðlínunni AM þannig að
$\overline{AT} = \frac{2}{3}\overline{AM}$ (T er þá sá punktur sem skiptir miðlínunni AM í hlutföllunum 2:1.)

Nú fæst:

$\overline{OT} = \overline{OA} + \overline{AT} = \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AM}$

$= \overline{OA} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}\right)$ (samkvæmt miðpunktsreglu fyrir strikið BC

þar sem A er í hlutverki P)

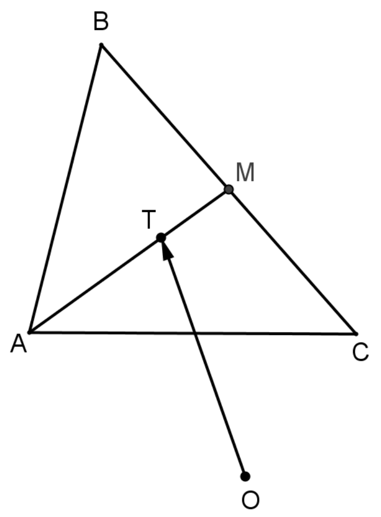
$= \overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$

$= \overline{OA} + \frac{1}{3}(\overline{AO} + \overline{OB}) + \frac{1}{3}(\overline{AO} + \overline{OC})$ (samkvæmt innskotsreglu)

$= \overline{OA} - \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB} - \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OC}$ ($\overline{AO} = -\overline{OA}$)

$= \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB} + \frac{1}{3}\overline{OC}$.

Á hliðstæðan hátt fæst að samsvarandi punktur á miðlínunni frá C á AB uppfyllir jöfnuna hér að ofan og er því punktur T. Sömu sögu er að segja um samsvarandi punkt á miðlínunni frá B á AC. Þar með er reglan sönnuð.



Ath. Ef O = (0,0), $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ er sett inn fæst eftirfarandi niðurstaða: $T = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \;,\; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$ þ.e hnitin á miðpunkti (þyngdarpunkti) þríhyrnings eru meðaltöl af hnitum hornpunktanna.

Dæmi 1.27 A = (4,5) , B = (7,12) og C = (4,3). Reiknaðu hnit miðpunkts þríhyrningsins ABC.

Lausn: Samkvæmt reglunni um miðpunkt þríhyrnings er

$$T = \left(\frac{4+7+4}{3}, \frac{5+12+3}{3} \right) = \left(5, \frac{20}{3} \right).$$

Dæmi 1.28 Reiknaðu hnit punksins B í þríhyrningnum ABC ef A = (2,4) , C = (–2,15) og þyngdarpunkturinn T = (12,5).

Lausn: Setjum B = (x , y) og notum regluna um miðpunkt þríhyrnings. Þá fæst:

$$(12,5) = \left(\frac{2+x-2}{3}, \frac{4+y+15}{3} \right) \text{ svo } 12 = \frac{x}{3} \text{ og } 5 = \frac{19+y}{3} \text{ svo } x = 36 \text{ og } y = -4$$

svo B = (36,– 4).

Innfeldi

Ef $\bar{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ eru tveir vigrar þá kallast <u>talan</u> $x_1x_2 + y_1y_2$ innfeldi vigranna.
Þetta er táknað svona:

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2}$$

Innfeldið er sem sé reiknað með því að margfalda x-hnit vigranna saman og y-hnit vigranna saman og leggja svo útkomurnar saman. Taktu eftir að útkoman úr innfeldinu er tala en ekki vigur.
Við fyrstu sýn virðist þessi aðgerð lítinn tilgang hafa en ekki er allt sem sýnist. Um innfeldi gilda flestar reiknireglur sem gilda í venjulegri margföldun svo sem:

Víxlregla: $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$

Dreifiregla: $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$

Sönnun á víxlreglu: $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ er augljóslega sama tala og $\bar{b} \cdot \bar{a} = x_2 x_1 + y_2 y_1$.

Dæmi 1.29 Reiknaðu innifeldi vigranna $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lausn: $\bar{a} \cdot \bar{b} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 19$

Ekki gilda þó allar reiknireglur margföldunar. T.d. er ekki hægt að reikna innfeldi þriggja vigra, stærðin $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$ er semsagt merkingarlaus.

Innfeldi og lengd

Reiknum innfeldi vigursins $\bar{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ við sjálfan sig:

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = x \cdot x + y \cdot y = x^2 + y^2$$

en þetta er sama tala og $|\bar{a}|^2$ (lengd vigursins $\bar{a}$ er $\sqrt{x^2 + y^2}$).

Þar með fæst eftirfarandi regla:

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2}$$

Þessi regla er mjög mikilvæg. Með því að nota þessa niðurstöðu má búa til vigrareglur hliðstæðar ferningsreglunum í algebrunni:

1. Reglan $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ verður $\left|\bar{a}+\bar{b}\right|^2 = \left|\bar{a}\right|^2 + 2\bar{a}\cdot\bar{b} + \left|\bar{b}\right|^2$
2. Reglan $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ verður $\left|\bar{a}-\bar{b}\right|^2 = \left|\bar{a}\right|^2 - 2\bar{a}\cdot\bar{b} + \left|\bar{b}\right|^2$

Sönnun á reglu 1: Reiknum upp úr svigunum: $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{a}+\bar{b}\right) = \bar{a}\cdot\bar{a} + \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}\cdot\bar{a} + \bar{b}\cdot\bar{b}$
Samkvæmt reglunni um innfeldi og lengd vigurs gildir:
$\bar{a}\cdot\bar{a} = \left|\bar{a}\right|^2$, $\bar{b}\cdot\bar{b} = \left|\bar{b}\right|^2$, $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{a}+\bar{b}\right) = \left|\bar{a}+\bar{b}\right|^2$ og einnig er $\bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}\cdot\bar{a} = 2\bar{a}\cdot\bar{b}$. Sé þetta sett inn fæst niðurstaðan $\left|\bar{a}+\bar{b}\right|^2 = \left|\bar{a}\right|^2 + 2\bar{a}\cdot\bar{b} + \left|\bar{b}\right|^2$.

Dæmi 1.30 Gefið er að $\left|\bar{a}\right| = 5$, $\left|\bar{b}\right| = 8$ og $\bar{a}\cdot\bar{b} = 4$.
Reiknaðu i) $\left|\bar{a}+\bar{b}\right|$ og ii) $\left|2\bar{a}-5\bar{b}\right|$.

Lausn: i) Samkvæmt reglunni $\left|\bar{a}+\bar{b}\right|^2 = \left|\bar{a}\right|^2 + 2\bar{a}\cdot\bar{b} + \left|\bar{b}\right|^2$ fæst:

$$\left|\bar{a}+\bar{b}\right|^2 = 5^2 + 2\cdot 4 + 8^2 = 97 \text{ svo } \left|\bar{a}+\bar{b}\right| = \sqrt{97} \approx 9{,}85.$$

ii) Notum niðurstöðuna $(2a-5b)^2 = 4a^2 - 20ab + 25b^2$ til að fá fram hliðstæða vigrareglu:

$$\left|2\bar{a}-5\bar{b}\right|^2 = 4\left|\bar{a}\right|^2 - 20\bar{a}\cdot\bar{b} + 25\left|\bar{b}\right|^2 = 4\cdot 5^2 - 20\cdot 4 + 25\cdot 8^2 = 1620$$

$$\text{svo } \left|2\bar{a}-5\bar{b}\right| = \sqrt{1620} \approx 40{,}25.$$

Dæmi 1.31 Reiknaðu $\bar{a}\cdot\bar{b}$ ef gefið er að $\left|\bar{a}\right| = 5$, $\left|\bar{b}\right| = 10$ og $\left|2\bar{a}+\bar{b}\right| = 16$.

Lausn: Notum niðurstöðuna $(2a+b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$ til að fá fram hliðstæða vigrareglu:

$\left|2\bar{a}+\bar{b}\right|^2 = 4\left|\bar{a}\right|^2 + 4\bar{a}\cdot\bar{b} + \left|\bar{b}\right|^2$. Köllum innfeldið $\bar{a}\cdot\bar{b} = x$ og fáum:

$$16^2 = 4\cdot 5^2 + 4x + 10^2 \text{ svo } 56 = 4x \text{ og þá er } x = 14.$$

Innfeldi og hornréttir vigrar

Reglan sem hér fer á eftir er mjög mikilvæg. Hún er í raun tvær reglur ritaðar í einu lagi.

Regla: Ef $\bar{a}$ og $\bar{b}$ eru ekki núllvigrar þá gildir: $\bar{a}$ og $\bar{b}$ eru hornréttir hvor á annan ef og aðeins ef $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$. Reglan er oft rituð svona: $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$.

Lítum á nokkur dæmi áður en reglan verður sönnuð.

Dæmi 1.32 Sýndu að vigrarnir $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}$ séu hornréttir hvor á annan.

Lausn: $\bar{a} \cdot \bar{b} = 3 \cdot 12 + 4 \cdot (-9) = 0$ svo $\bar{a} \perp \bar{b}$

Dæmi 1.33 Finndu töluna t ef gefið er að $\bar{a} = \begin{pmatrix} t+2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} t \\ -3 \end{pmatrix}$ eru hornréttir hvor á annan.

Lausn: Þar sem vigrarnir eru hornréttir vitum við að innfeldið er núll þ.e.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (t+2) \cdot t + 1 \cdot (-3) = 0 \text{ svo } t^2 + 2t - 3 = 0$$

þetta er annars stigs jafna sem hægt er að leysa með þáttun, annars stigs formúlunni eða í vasareikninum. Ef hún er leyst með þáttun fæst:

$$(t+3)(t-1) = 0$$
$$\text{svo } t+3 = 0 \text{ eða } t-1 = 0$$
$$\text{svo } t = -3 \text{ eða } t = 1$$

Sönnun á reglunni um hornrétta vigra.

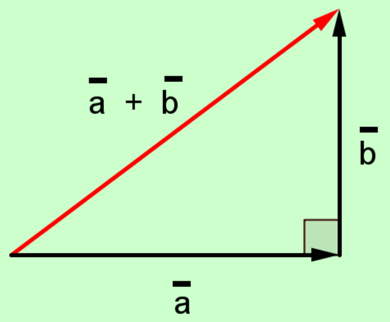
Vigrarnir $\bar{a}$, $\bar{b}$ og $\bar{a}+\bar{b}$ mynda rétthyrndan þríhyrning ef og aðeins ef $\bar{a}\perp\bar{b}$. Samkvæmt Pýþagórasarreglu (sem gildir ef og aðeins ef þríhyrningur er rétthyrndur) fæst nú:

$\left|\bar{a}+\bar{b}\right|^2 = \left|\bar{a}\right|^2 + \left|\bar{b}\right|^2$ en samkvæmt reglum algebrunnar gildir

$\left|\bar{a}+\bar{b}\right|^2 = \left|\bar{a}\right|^2 + 2\bar{a}\cdot\bar{b} + \left|\bar{b}\right|^2$.

Þar með fæst að

$$\bar{a}\perp\bar{b} \Leftrightarrow \left|\bar{a}\right|^2 + 2\bar{a}\cdot\bar{b} + \left|\bar{b}\right|^2 = \left|\bar{a}\right|^2 + \left|\bar{b}\right|^2 \Leftrightarrow 2\bar{a}\cdot\bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a}\cdot\bar{b} = 0$$

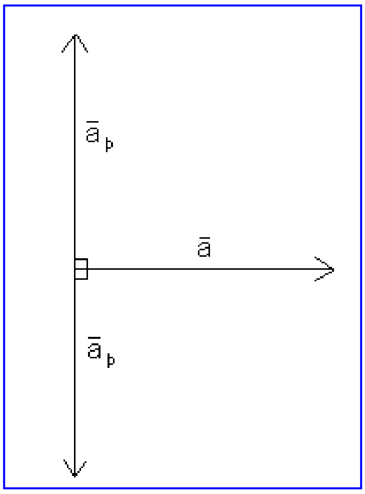


Þvervigur

Regla: Ef $\bar{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \bar{0}$ er einhver vigur þá eru vigrarnir $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ hornréttir á $\bar{a}$ og jafnlangir og $\bar{a}$.

Sönnun: Lengdir allra vigranna þriggja er $\sqrt{x^2+y^2}$ svo þeir eru allir jafnlangir og $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = 0$ svo báðir vigrarnir eru hornréttir á $\bar{a}$.

Vigrarnir $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ kallast þvervigrar $\bar{a}$. Vigur sem er hornréttur og jafnlangur og vigurinn $\bar{a}$ (þ.e. þvervigrar $\bar{a}$) eru táknaðir $\bar{a}_þ$.



Dæmi 1.34 Finndu einingarvigur sem er hornréttur á $\bar{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Lausn: $\bar{a}_þ = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$ er hornréttur á $\bar{a}$. Breytum honum í einingarvigur með því að deila lengdinni upp í bæði hnitin. Lengd beggja vigranna $\bar{a}$ og $\bar{a}_þ$ er $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ og svarið er

$$\bar{e} = \pm \begin{pmatrix} -12/13 \\ 5/13 \end{pmatrix} \quad \text{(Ath. tvö svör.)}$$

Dæmi 1.35 Finndu vigur sem er 5 að lengd og er hornréttur á $\bar{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Lausn: Finnum fyrst einingarvigur sem er hornréttur á $\bar{a}$ eins og í dæminu hér á undan og margföldum hann svo (þ.e. bæði hnitin) með 5 og þá fæst :

$$\pm 5 \begin{pmatrix} -12/13 \\ 5/13 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -60/13 \\ 25/13 \end{pmatrix}$$

Hallatölur hornréttra lína

Regla: Ef l og m eru tvær línur sem eru hornréttar hvor á aðra og hafa hallatölurnar h og k þá er $h \cdot k = -1$.

Sönnun: Köllum hallatölur línanna h og k. Vigrarnir $\begin{pmatrix} 1 \\ h \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ hafa hallatölur h og k og eru því samsíða línunum. Þeir eru þá hornréttir hvor á annan eins og línurnar. Samkvæmt reglunni um hornrétta vigra fæst:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + h \cdot k = 0 \text{ svo } h \cdot k = -1$$

Dæmi 1.36 Línan m er hornrétt á línuna l og hefur hallatölu 2. Hver er hallatala l ?

Lausn: Ef h er hallatala l fæst að $2h = -1$ svo $h = -\frac{1}{2}$

Dæmi 1.37 A = (4 , 6) , B = (– 1 , 8) og C = (6 , 10) eru hornpunktar þríhyrnings. Reiknaðu
a) lengdir hliða þríhyrningsins
b) miðpunkt þríhyrningsins
c) lengd miðlínunnar BM
d) hnit punkts D þannig að ABCD verði samsíðungur
e) hnit punkts E á x-ási þannig að $\overline{AE} \perp \overline{BC}$
f) hnit punkts F á y-ási þannig að $\overline{AF}$ sé samsíða $\overline{AC}$.

Lausn: a) Reiknum fyrst hnit vigranna $\overline{AB}$,$\overline{BC}$ og $\overline{AC}$ og síðan lengdir þeirra…

$\overline{AB} = \begin{pmatrix} -1-4 \\ 8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ svo $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$,

$\overline{BC} = \begin{pmatrix} 6-(-1) \\ 10-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ svo $\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{7^2+2^2} = \sqrt{53}$

og $\overline{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ svo $\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{20}$

b) $T = \left(\dfrac{4-1+6}{3}, \dfrac{6+8+10}{3} \right) = (3,8)$

c) $M = \left(\dfrac{4+6}{2}, \dfrac{6+10}{2} = \right) = (5,8)$ svo $\overline{BM} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ svo $\left|\overline{BM}\right| = 6$

d) Setjum D = (x , y) og notum að $\overline{AD} = \overline{BC}$ svo $\begin{pmatrix} x-4 \\ y-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ og þá er $\begin{matrix} x = 11 \\ y = 8 \end{matrix}$ svo

D = (11 , 8).

e) Setjum E = (x , 0). (Allir punktar á x-ási hafa y-hnitið 0) og notum að $\overline{AE} \cdot \overline{BC} = 0$. Þá fæst

$\begin{pmatrix} x-4 \\ 0-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 7(x-4)+(-6)\cdot 2 = 0$ svo $7x-28-12 = 0$ svo $x = \dfrac{40}{7}$ svo $E = \left(\dfrac{40}{7}, 0 \right)$.

f) Setjum F = (0 , y) (allir punktar á y-ási hafa x-hnitið 0) þá er $\overline{AF} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ y-6 \end{pmatrix}$ og notum

svo að $h_{\overline{AF}} = h_{\overline{AC}}$. Þá fæst

$\dfrac{y-6}{-4} = \dfrac{4}{2}$ svo $2(y-6) = -4\cdot 4$ svo $2y-12 = -16$ svo $y = \dfrac{-4}{2}$ svo $F = (0, -2)$.

Dæmi 1.38 Tiltekinn er þríhyrningur ABC. S er punktur á BC þannig að $\overline{BS} = \frac{3}{4}\overline{BC}$ og T er punktur á AC þannig að $\overline{AT} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Táknaðu $\overline{TS}$ með $\overline{AB}$ og $\overline{AC}$.

Lausn: Byrjum á að merkja S og T inn á myndina. Nú fæst:

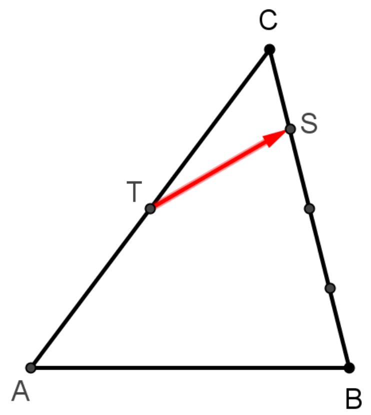
$\overline{TS} = \overline{TC} + \overline{CS}$ (C innskotspunktur)

$= \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{4}\overline{CB}$

$= \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{4}(\overline{CA} + \overline{AB})$ (A innskotspunktur)

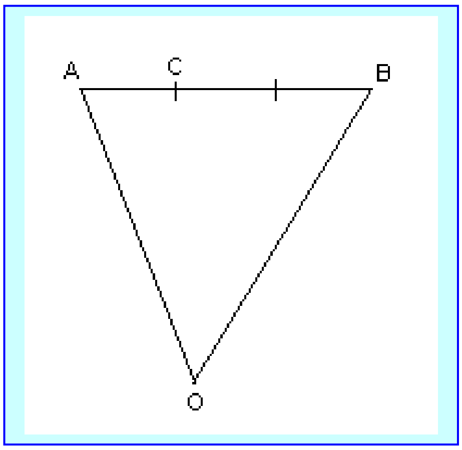
$= \frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{4}\overline{AC} + \frac{1}{4}\overline{AB}$ ($\overline{CA} = -\overline{AC}$)

$= \frac{1}{4}\overline{AC} + \frac{1}{4}\overline{AB}$



Dæmi 1.39 Tilteknir eru þrír punktar A, B og C þannig að $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{CB}$. Teiknaðu mynd og táknaðu $\overline{OC}$ með $\overline{OA}$ og $\overline{OB}$ ef O er ótilgreindur punktur í fletinum.

Lausn: Vigrarnir $\overline{AC}$ og $\overline{CB}$ hafa sömu stefnu ($\frac{1}{2}\overline{CB}$ hefur sömu stefnu og $\overline{CB}$) og þar sem báðir er með annan endapunktinn C verða A, B og C að liggja á línu. Auk þess verður fjarlægðin milli A og C að vera helmingurinn af fjarlægðinni milli C og B. Myndin verður þá svona:



Fáum nú:

$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$ (A innskotspunktur)

$= \overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{AB}$

$= \overline{OA} + \frac{1}{3}(\overline{AO} + \overline{OB})$ (O innskotspunktur)

$= \overline{OA} - \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB}$ ($\overline{AO} = -\overline{OA}$)

$= \frac{2}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB}$

Dæmi 1.40 Á myndinni eru D og E miðpunktar hliðanna AC og BC. Sýndu að $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

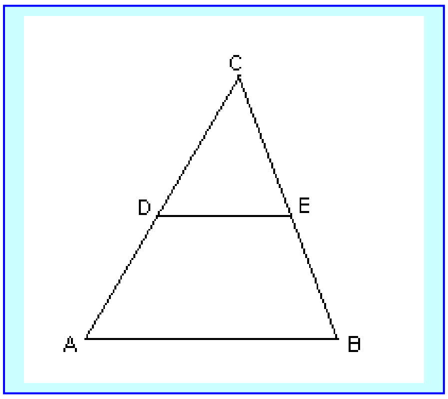
Lausn:

$\overline{DE} = \overline{DC} + \overline{CE}$ (C innskotspunktur)

$= \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{CB}$

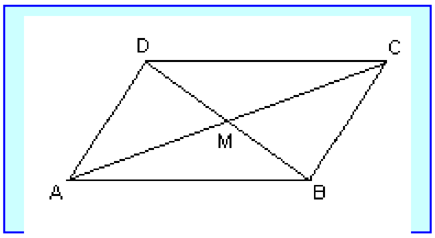
$= \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{CB})$

$= \frac{1}{2}\overline{AB}$



Dæmi 1.41 Hornalínur í ferhyrningi ABCD helminga hvor aðra. Sýndu að $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{0}$.

Lausn: Köllum skurðpunkt hornalínanna M. Þá fæst:



$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AM} + \overline{MB} + \overline{CM} + \overline{MD}$ (M innskotspunktur)

$= (\overline{AM} + \overline{CM}) + (\overline{MB} + \overline{MD})$

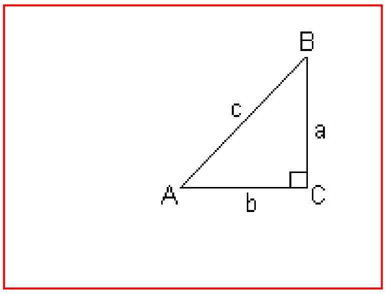
$= \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$

($\overline{AM} = -\overline{CM}$ því að $\overline{AM}$ og $\overline{CM}$ eru gagnstefna og jafnlangir og sömuleiðis $\overline{MB}$ og $\overline{MD}$.)

Kafli 2 – Hornafræði

1. Hornaföll í rétthyrndum þríhyrningi

Þessi kafli hefst á upprifjun á hornaföllum í rétthyrndum þríhyrningi.



Í rétthyrndum þríhyrningi ABC þar sem $\angle C = 90°$ gildir:

$$\sin(A) = \frac{a}{c} \qquad \left(\text{sínus af hvössu horni} = \frac{\text{mótlæg skammhlið}}{\text{langhlið}} \right)$$

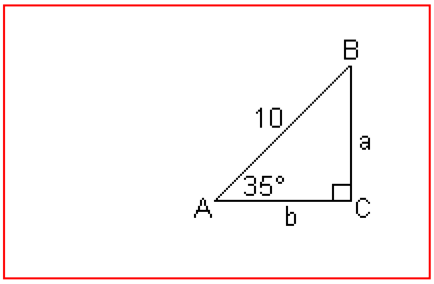
$$\cos(A) = \frac{b}{c} \qquad \left(\text{cosínus af hvössu horni} = \frac{\text{aðlæg skammhlið}}{\text{langhlið}} \right)$$

$$\tan(A) = \frac{a}{b} \qquad \left(\text{tangens af hvössu horni} = \frac{\text{mótlæg skammhlið}}{\text{aðlæg skammhlið}} \right)$$

Þessar reglur er hægt að nota til að reikna horn eða hlið í rétthyrndum þríhyrningi.

Dæmi 2.1 Reiknaðu lengd hliðarinnar b í rétthyrnda þríhyrningum ABC ef $\angle A = 35°$ og c = 10.

Lausn: Hliðin b er aðlæg skammhlið hornsins A og því fæst

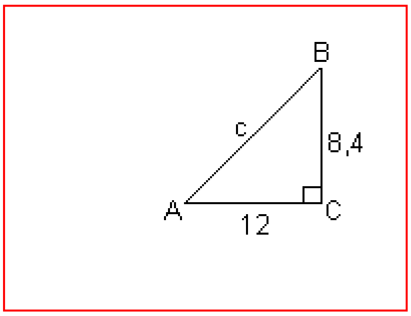


$$\cos(35°) = \frac{b}{10} \Rightarrow b = 10 \cdot \cos(35°) \approx 8{,}19 .$$

(Talan $\cos(35°) \approx 0{,}819$ finnst í vasareikninum með því að nota cosínus takkann.)

Dæmi 2.2 Reiknaðu hornið A í rétthyrnda þríhyrningnum ABC ef a = 8,4 og b = 12.

Lausn: Höfum að $\tan(A) = \dfrac{8{,}4}{12} = 0{,}7$.

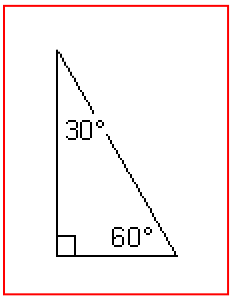


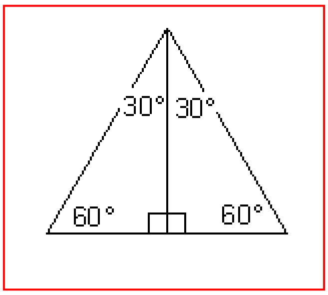
Hornið A finnst nú með því að nota tangenstakkann afturábak þ.e. $\tan^{-1}$ (= Shift tan) svo $\angle A = \tan^{-1}(0{,}7) \approx 35°$.

2. Nákvæm gildi hornafalla fyrir 30°, 45° og 60°

Hornin 30°, 45° og 60° hafa þá sérstöðu að hægt er að reikna nákvæmlega sínus, cosínus og tangens þeirra.

Ef annað hvassa hornið í rétthyrndum þríhyrningur er 30° verður hitt hvassa hornið 60°. Slíkur þríhyrningur er helmingur af jafnhliða þríhyrningi (Sjá mynd.) Skemmri skammhliðin (þ.e. sú sem er andspænis 30° horninu) er því ávallt helmingur langhliðarinnar.

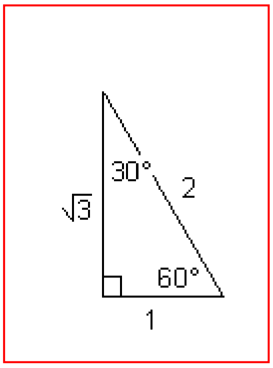




Veljum nú þríhyrning þar sem lengd skemmri skammhliðarinnar er 1. Langhliðin verður þá 2. Lengri skammhliðina er svo hægt að finna með Pýþagórasarreglu:

$1^2 + x^2 = 2^2 \Rightarrow x = \sqrt{3}$.

Nú fæst

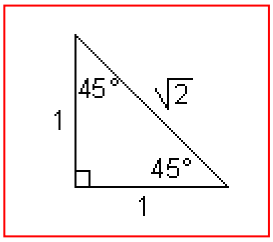


$$\sin(30°) = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(= \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos(60°) = \frac{1}{2} \quad , \quad \tan(60°) = \sqrt{3}$$

Í rétthyrndum þríhyrningi þar sem annað hvassa hornið er 45° er hitt hvassa hornið líka 45° og því er slíkur þríhyrningur jafnarma. Veljum nú þríhyrning þar sem báðar skammhliðarnar hafa lengd 1. Langhliðin finnst með Pýþagórasarreglu:

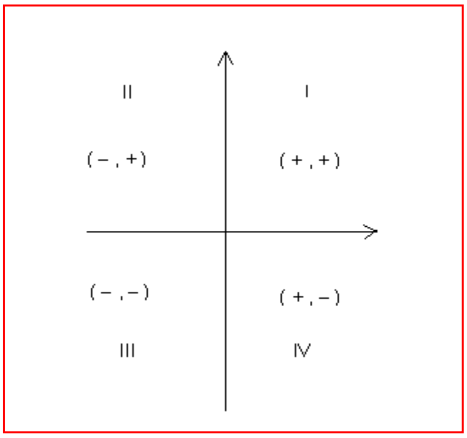
$1^2 + 1^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{2}$. Og nú fæst



$$\sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \tan(45°) = 1$$

Töluna $\frac{1}{\sqrt{2}}$ má einnig rita $\frac{\sqrt{2}}{2}$ eða $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

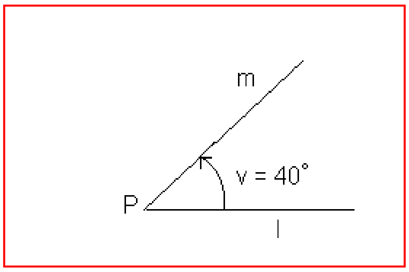
Ásar hnitakerfisins skipta því í fjóra hluta sem kallast fyrsti, annar, þriðji og fjórði fjórðungur (sjá mynd). Taktu eftir formerkjum á hnitum punkta í þessum fjórum fjórðungum.



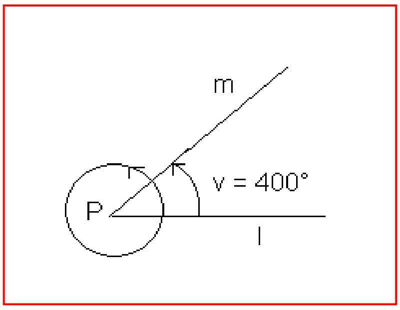
3. Horn sem myndast við snúning

Horn ákvarðast af tveimur hálflínum sem liggja út frá sama punkti P. Hægt er að hugsa sér að hornið myndist þannig að annarri línunni sé snúið um P frá hinni línunni. Tvær snúningsstefnur eru mögulegar, rangsælis (öfugur klukkugangur) sem er jákvæður snúningur og réttsælis (eins og klukkan gengur) sem er neikvæður snúningur. Horn sem kemur fram við snúning getur því verið neikvætt og það getur líka verið meira en 360°.

Á myndinni hefur hornið v = 40° myndast þegar m var snúið 40° rangsælis um P frá l. Ef m er snúið 400° rangsælis um P er lokastaða línanna l og m hin sama. Snúningur um heila hringi réttsælis eða rangsælis breytir ekki lokastöðu l og m og þess vegna eru óendanlega mörg horn sem líta eins út á mynd því að það eru óendanlega margir möguleikar á hve marga heila hringi er hægt að snúa.



Hornin $40°$, $40° + 360°$, $40° + 2 \cdot 360°$, $40° - 3 \cdot 360°$ eða almennt $40° + h \cdot 360°$ þar sem h getur verið hvaða heila tala sem er, líta öll eins út á mynd.
Þetta er ritað $40° + h \cdot 360°$, $h \in Z$.



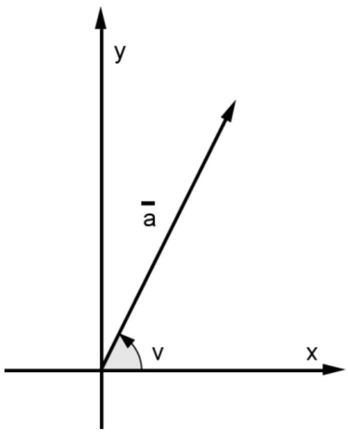
Horn sem er á bilinu $[0°, 360°[$ er sagt vera í fyrstu umferð, horn á bilinu $[360°, 720°[$ í annarri umferð o.s.frv.

Horn í þríhyrningi eru hins vegar ekki reiknuð með formerki og eru á bilinu $]0°, 180°[$.
Horn á milli vigra verður ekki reiknað hér með formerki og er á bilinu $[0°, 180°]$.

4. Stefnuhorn vigurs

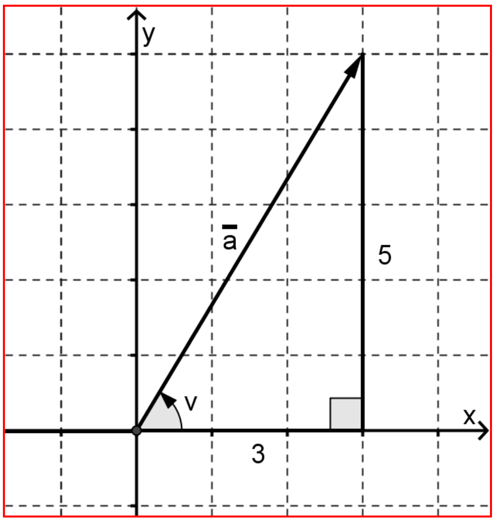
Stefnuhorn vigurs $\overline{a}$ er hornið frá jákvæða hluta x-ássins að vigrinum $\overline{a}$ reiknað með formerki.

Gert er ráð fyrir að vigurinn $\overline{a}$ sé staðarvigur, þ.e. að hann byrji í punktinum (0 , 0). Venja er að gefa stefnuhorn vigurs upp á bilinu $]-180°, 180°]$.



Staðarvigur sem liggur í fyrsta eða öðrum fjórðungi hefur stefnuhorn á bilinu $]0°,180°[$ en vigur sem liggur í þriðja eða fjórða fjórðungi hefur stefnuhorn á bilinu $]-180°,0°[$.
Vigur samsíða x-ási hefur stefnuhorn 0° eða 180° og vigur samsíða y-ási hefur stefnuhorn 90° eða – 90°.
Taktu eftir að staðarvigur sem er í 1. og 4. fjórðungi hefur hvasst stefnuhorn en gleitt ef hann er í 2. eða 3. fjórðungi.

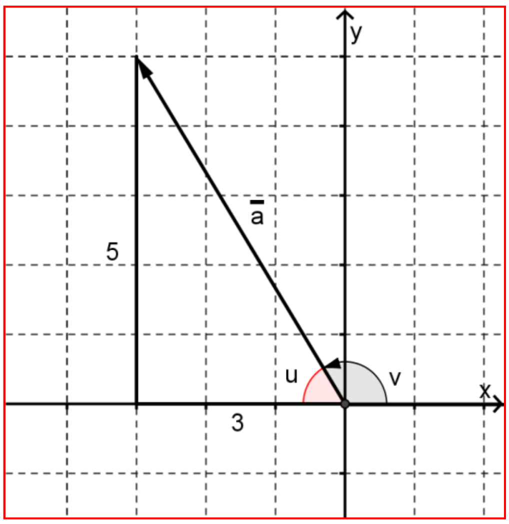
Dæmi 2.3 Finndu stefnuhorn vigursins $\overline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.



Lausn: Teiknum vigurinn í hnitakerfi. Vigurinn er langhlið í rétthyrndum þríhyrningi sem hefur skammhliðar 3 og 5. Því fæst:

$$\tan(v) = \frac{5}{3} \quad \text{sem gefur } v \approx 59°$$

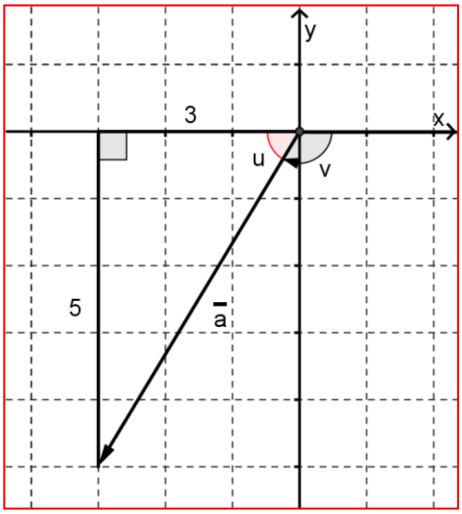
Dæmi 2.4 Finndu stefnuhorn vigursins $\overline{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.



Lausn: Við leysum dæmið með því að reikna fyrst hornið u sem er grannhornið. Vigurinn liggur í öðrum fjórðungi og verður aftur langhlið í rétthyrndum þríhyrningi sem hefur skammhliðar 3 og 5. (Ath. hlið í þríhyrningi er jákvæð tala). Því fæst:

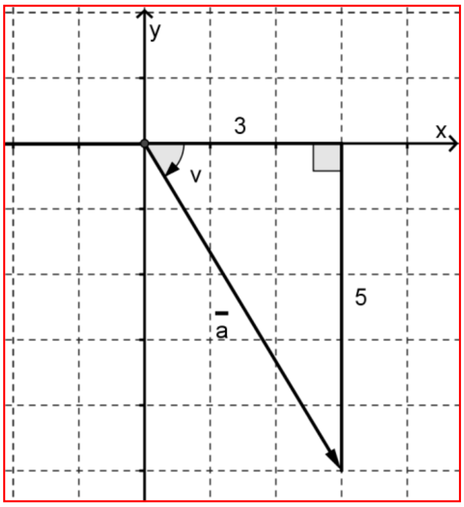
$$\tan(u) = \frac{5}{3} \Rightarrow u \approx 59° \Rightarrow v \approx 180° - 59° = 121°$$

Dæmi 2.5 Finndu stefnuhorn vigursins $\bar{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.



Lausn: Vigurinn liggur í þriðja fjórðungi og stefnuhornið er því neikvætt (mælt réttsælis). Við leysum dæmið eins og dæmi 2 og finnum grannhornið u sem er u.þ.b. 59° en þá er stefnuhornið $v \approx -121°$.

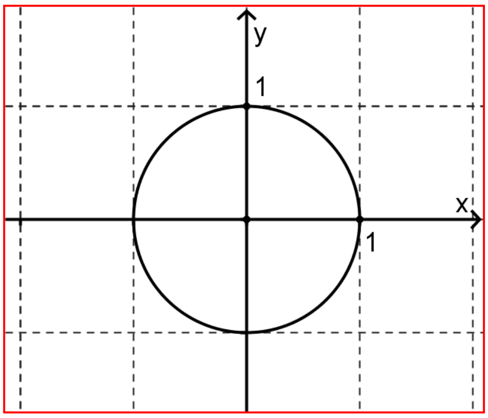
Dæmi 2.6 Finndu stefnuhorn $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.



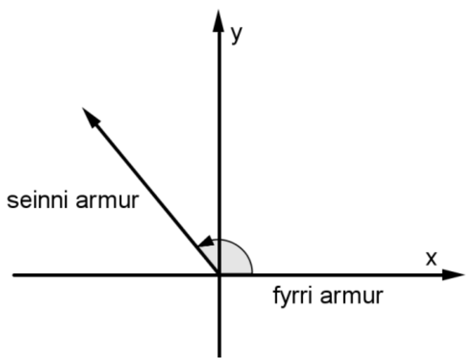
Lausn: Vigurinn liggur í fjórða fjórðungi svo stefnuhornið verður neikvætt. Við leysum dæmið eins og dæmi 1 og fáum $v \approx -59°$.

5. Einingarhringur og horn í grunnstöðu

Hringur með miðju í (0,0) og radíus 1 verður í textanum sem hér fer á eftir kallaður einingarhringur.

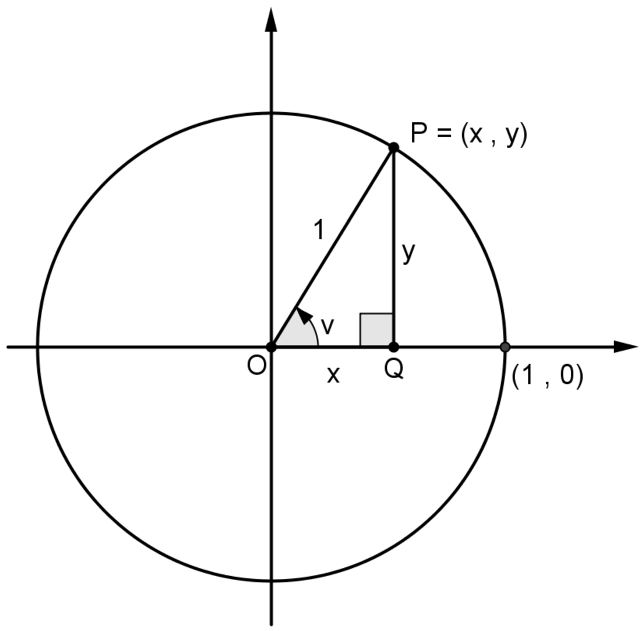


Horn sem er með oddpunkt (0,0) og annan arminn í stefnu x-áss kallast horn í grunnstöðu. Sá armur hornsins sem liggur í stefnu x-áss kallast fyrri armur hornsins og hinn armurinn kallast seinni armur (sjá mynd)



6. Almenn skilgreining á sínus, cosínus og tangens

Teiknum hvasst horn v í grunnstöðu (þ.e. oddpunktur hornsins O = (0 , 0) og annar armurinn í stefnu x-áss). Síðan teiknum við hring með miðju O = (0 , 0) og radíus 1, svokallaðan einingarhring.
Látum P = (x , y) vera skurðpunkt seinni arms hornsins og hringsins og punktinn á x-ási sem er beint fyrir neðan P köllum við Q. Punktarnir O, P og Q mynda þá rétthyrndan þríhyrning með skammhliðar x og y og langhlið 1 (sjá mynd).



Samkvæmt reglum sem gilda um rétthyrnda þríhyrninga fæst:

$$\cos(v) = \frac{x}{1} = x$$

$$\sin(v) = \frac{y}{1} = y$$

og því eru hnit punktsins P = (x , y) = (cos(v) , sin(v)).

Ennfremur gildir: $\tan(v) = \frac{y}{x} = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}$.

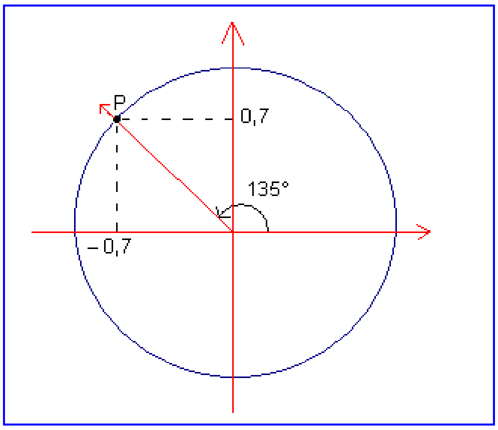
Þessi niðurstaða verður nú notuð til að setja fram almenna skilgreiningu á hornaföllunum cosínus, sínus og tangens.

Látum v vera horn í grunnstöðu og látum P vera skurðpunkt seinni arms hornsins v við einingarhring (sjá myndina hér að ofan). Þá er:

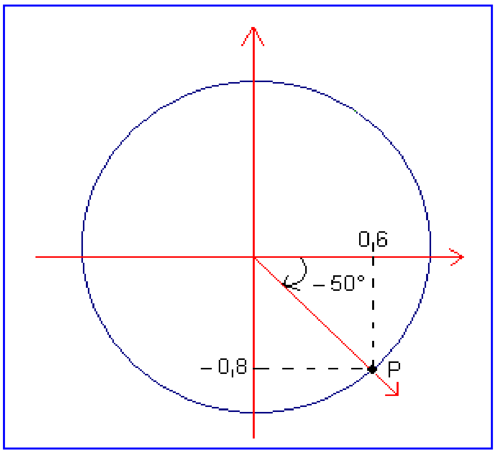
cos(v) = x hnit punktsins P , sin(v) = y hnit punktsins P

og $\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}$, $(\cos(v) \neq 0)$

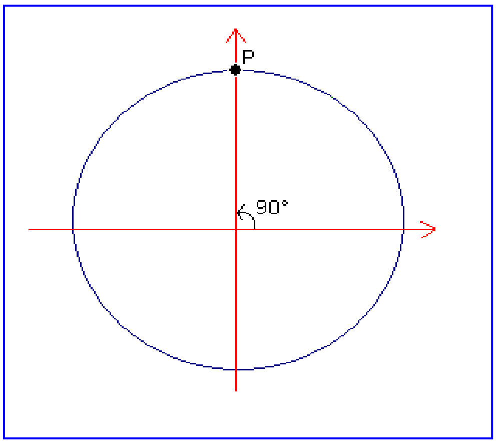
Dæmi 2.7 Á myndinni sést 135° horn teiknað í grunnstöðu og einingarhringur. Hnit punktsins P eru nálægt því að vera $(-0{,}7;\,0{,}7)$. Þá er
$\cos(135°) \approx -0{,}7$ og $\sin(135°) \approx 0{,}7$.



Dæmi 2.8 Á myndinni er $-50°$ horn teiknað í grunnstöðu ásamt einingarhring. Hnit punktsins P eru nálægt því að vera $(0{,}6\,;\,-0{,}8)$. Þá er
$\cos(-50°) \approx 0{,}6$ og $\sin(-50°) \approx -0{,}8$.



Dæmi 2.9 Á myndinni er 90° horn teiknað í grunnstöðu ásamt einingarhring. Hnit punktsins P eru (0 , 1). Þá er cos(90°) = 0 og sin(90°) = 1.



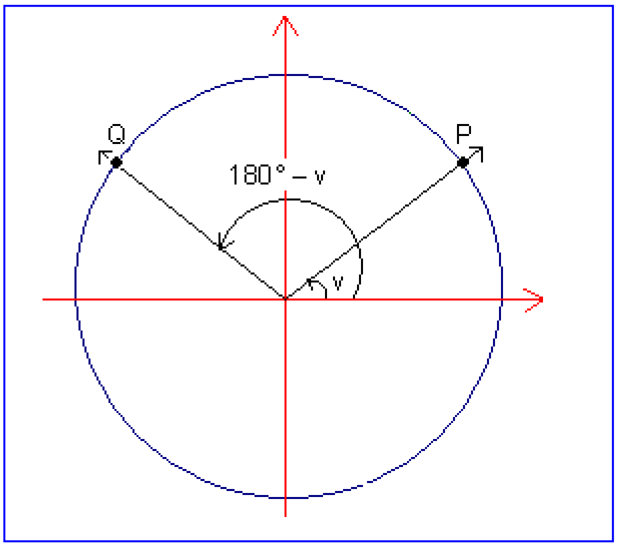
7. Hornafallareglur

Hornin v, v + 360°, v + $2\cdot 360°$,.... ,$v - 360°, v - 2\cdot 360°$,... eða almennt $v + h\cdot 360°$ (h er hér allar hugsanlegar heilar tölur) líta öll eins út séu þau teiknuð í grunnstöðu og hnit punktsins P þar með þau sömu fyrir öll hornin. Því fæst eftirfarandi regla:

R1: $\cos(v) = \cos(v + h\cdot 360°)$ og $\sin(v) = \sin(v + h\cdot 360°)$, $h \in Z$

Dæmi 2.10 cos(30°) = cos(390°) = cos(–330°) = cos(–690°) =... o.s.frv.

Tvö horn sem eru samtals 180° kallast frændhorn. T.d. eru hornin 30° og 150° frændhorn. Almennt eru hornin v og 180° – v frændhorn. Teiknum horn v ásamt frændhorni þess 180° – v bæði í grunnstöðu (sjá mynd) ásamt einingarhring.



Seinni armar hornanna liggja samhverfir um y-ásinn og skurðpunktar armanna við einingarhringinn liggja því einnig samhverft um y-ásinn. Punktarnir P og Q hafa því gagnstæð x-hnit en sömu y-hnit. Þar með fást eftirfarandi tvær reglur:

R2:
sin(180° – v) = sin(v)
cos(180° – v) = – cos(v)

Þessar tvær reglur má orða svona: Frændhorn hafa sama sínus en gagnstæðan cosínus.

Hliðstæð regla fyrir tangensinn er tan(180° – v) = – tan(v) en hún fæst með því að deila neðri jöfnunni upp í efri jöfnuna.

Reglan sin(180° – v) = sin(v) er sérlega mikilvæg en samkvæmt henni er ávallt hægt að finna tvö horn í hverri umferð sem hafa sama sínus ef undan eru skilin tilvikin að sínusinn sé 1 eða – 1.

8. Að finna x þegar sin(x) er þekktur

Dæmi 2.11 Finndu tvö horn í fyrstu umferð sem hafa sínusinn 0,5 eða með öðrum orðum:

Leystu jöfnuna $\sin(x) = 0{,}5 \quad , \quad x \in [0°, 360°[$.

Lausn: Finnum eina lausn með vasareikninum: x = $\sin^{-1}(0{,}5) = 30°$ og hin lausnin er frændhornið sem er 180° – 30°= 150°.

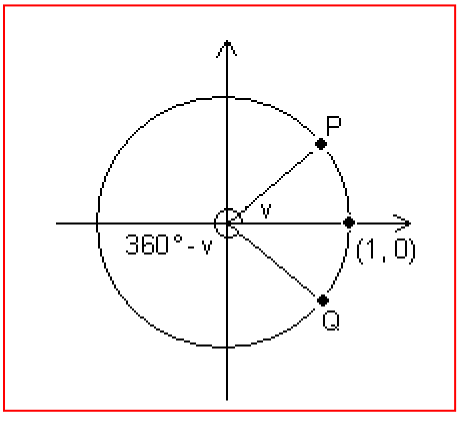
Dæmi 2.12 Leystu jöfnuna sin(x) = – 0,5 , $x \in [0°, 360°[$.

Lausn: Finnum fyrst lausnina $x = \sin^{-1}(-0{,}5) = -30°$ og síðan frændhornið sem er $180° - (-30°) = 210°$. Lausnin $-30°$ er hins vegar ekki í bilinu $[0°, 360°[$ en ný lausn kemur eftir heila umferð og hún er $-30° + 360° = 330°$. Lausnirnar eru því 210° og 330°.

Dæmi 2.13 Leystu jöfnuna sin(x) = 1 , $x \in [0°, 360°[$.

Lausn: Önnur lausnin er $x = \sin^{-1}(1) = 90°$ og hin lausnin sem er frændhornið er 180° – 90° = 90°. Hér eru hornið og frændhornið jafnstór svo jafnan hefur aðeins eina lausn.

Ef hornin v og 360° – v eru bæði teiknuð í grunnstöðu liggja seinni armar þeirra samhverft um x-ás og skurðpunktar seinni armanna og einingarhringsins liggja einnig samhverft um x-ás (sjá mynd). Punktarnir P og Q hafa því sömu x-hnit og gagnstæð y-hnit. Þar með fást eftirfarandi tvær reglur:



R3:
$\sin(360° - v) = -\sin(v)$
$\cos(360° - v) = \cos(v)$

Hliðstæð regla fyrir tangensinn er tan(360° – v) = – tan(v) en hún fæst með því að deila neðri jöfnunni upp í efri jöfnuna.

Reglan cos(360° – v) = cos(v) er sérlega mikilvæg því að samkvæmt henni er ávallt hægt að finna tvö horn í hverri umferð sem hafa sama cosínus ef undan eru skilin tilvikin þegar cosínusinn er 1 eða – 1.

9. Að finna x þegar cos(x) er þekktur

Dæmi 2.14 Finndu tvö horn í fyrstu umferð sem hafa cosínusinn 0,5 eða með öðrum orðum:

Leystu jöfnuna cos(x) = 0,5 , $x \in [0°, 360°[$.

Lausn: Finnum eina lausn með vasareikninum: x = $\cos^{-1}(0{,}5) = 60°$ og hin lausnin er hornið 360° – 60°= 300°.

Dæmi 2.15 Leystu jöfnuna cos(x) = – 0,5 , $x \in [0°, 360°[$.

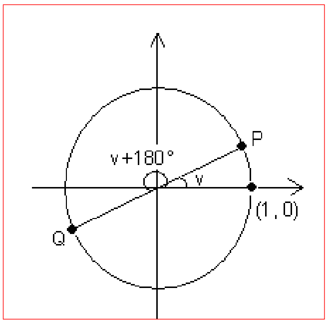
Lausn: Finnum fyrst lausnina $x = \cos^{-1}(-0{,}5) = 120°$ og hin lausnin er 360° –120°= 240°.

Dæmi 2.16 Leystu jöfnuna cos(x) = 1 , $x \in [0°, 360°[$.

Lausn: Hér fæst aðeins ein lausn sem er $x = \cos^{-1}(1) = 0°$ því að hin lausnin 360° – 0° = 360° er ekki í fyrstu umferð.

Ef hornin v og v + 180° eru teiknuð í grunnstöðu liggja seinni armar þeirra samhverft um punktinn (0,0) og skurðpunktar seinni arma þeirra við einingarhringinn liggja einnig samhverft um punktinn (0,0) (sjá mynd). Punktarnir P og Q hafa því gagnstæð x-hnit og gagnstæð
y-hnit. Þar með fást eftirfarandi tvær reglur:

R4:
sin(v + 180°) = – sin(v)
cos(v + 180°) = – cos(v)



Þessa reglu mætti orða: sínus og cosínus skipta um formerki þegar hálfri umferð er bætt við hornið.

Hliðstæð regla fyrir tangensinn er:

R5:
$\tan(v + 180°) = \tan(v)$

hún fæst með því að deila neðri jöfnunni í **R4** upp í efri jöfnuna. Tangensinn helst sem sagt óbreyttur þegar hálfri umferð er bætt við hornið. Því eru ávallt tvö horn í hverri umferð sem hafa sama tangens.

10. Að finna x þegar tan(x) er þekktur

Dæmi 2.17 Finndu tvö horn í fyrstu umferð sem hafa tangensinn 0,5 eða með öðrum orðum:

$$\text{Leystu jöfnuna } \tan(x) = 0{,}5 \quad , \quad x \in [0°, 360°[\,.$$

Lausn: Finnum eina lausn með vasareikninum: $x = \tan^{-1}(0{,}5) \approx 26{,}6°$ og hin lausnin er 26,6° +180° = 206,6°.

Dæmi 2.18 Leystu jöfnuna $\tan(x) = -0{,}5 \quad , \quad x \in [0°, 360°[$.

Lausn: Finnum eina lausn með vasareikninum: $x = \tan^{-1}(-0{,}5) \approx -26{,}6°$ og önnur lausn er $-26{,}6° + 180° = 153{,}4°$. Þar sem lausnin $-26{,}6°$ er ekki í bilinu $[0°, 360°[$ fæst þriðja lausn með því að leggja 180° við síðustu lausn og þá fæst lausnin 333,4° (einnig er hægt að bæta 360° við fyrstu lausnina). Lausnirnar eru því 153,4° og 333,4°.

Annars stigs hornafallajöfnur

Jafnan $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$ er dæmi um annars stigs hornafallajöfnu. Hún er sambland af annars stigs jöfnu og sínusjöfnu. Fyrst þarf að leysa annars stigs jöfnuna. Það er hægt að gera með annars stigs formúlunni, eða með því að reyna að þátta jöfnuna í tvær fyrsta stigs jöfnur. Þrautalendingin er að leysa annars stigs jöfnuna í vasareikninum. Lausnin á annars stigs jöfnunni (oftast tvær lausnir) gefur möguleg gildi á sin(x) og þá er eftir að leysa sínusjöfnu til að finna x-ið.

Dæmi 2.19 Leystu jöfnuna $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$. $x \in [0°, 360°[$

Lausn: $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = (2\sin(x) + 1)(\sin(x) - 1) = 0$

þá er $2\sin(x) + 1 = 0$ eða $\sin(x) - 1 = 0$

svo $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ eða $\sin(x) = 1$

Lausn jöfnunnar $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ er x = $\begin{cases} -30° \\ 210° \end{cases}$ og lausn jöfnunnar sin(x) = 1 er x = $90°$

Þar sem lausnin x = $-30°$ er ekki á bilinu $[0°, 360°[$ fæst þriðja lausn með því að leggja 360° við fyrstu lausnina og þá fæst lausnin 330°. Lausnirnar eru því 90°, 210° og 330°

Dæmi 2.20 Leystu jöfnuna $\cos^2(x) - 5\cos(x) + 6 = 0$. $x \in [0°, 360°[$

Lausn: Stuðlar annars stigs jöfnunnar eru a = 1 , b = -5 og c = 6 og lausnirnar eru 2 og 3 og þar með fæst að cos(x) = 2 eða cos(x) = 3 en hvorug jafnan hefur lausn svo það er engin lausn á þessu dæmi.

Með því að nota reglurnar R2 – R4 má finna nákvæm gildi fyrir horn sem hafa seinni arm sem er speglun seinni arms hornanna 30°, 45° og 60° um x - ás, y - ás og (0,0) punktinn.

Dæmi 2.21 Finndu nákvæmt gildi á a) sin(120°) , b) cos(225°) og c) tan(330°).

Lausn: a) 120° er frændhorn 60° (seinni armar speglast í y-ási) og frændhorn hafa sama sínus svo

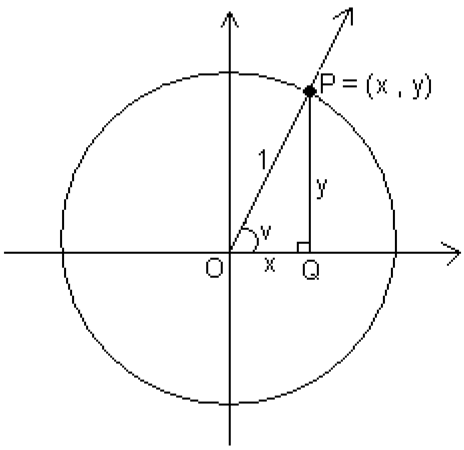
sin(120°) = sin(60°) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) 225° = 45° + 180° (speglun í (0,0)) og samkvæmt R4 breytir cosínus (og sínus) um formerki þegar hálfri umferð er bætt við svo að cos(225°) = – cos(45°) = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) 330° = 360° – 30° (speglun í x-ási) og samkvæmt R3 skiptir tangensinn um formerki við speglun í x-ási og því er tan(330°) = – tan(30°) = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ein mikilvægasta regla hornafræðinnar er eftirfarandi regla:

R6: $\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$



Sönnun: Höfum að $\overline{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ og

$\left|\overline{OP}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

Setjum báðar hliðar í annað veldi og þá fæst

niðurstaðan: $x^2 + y^2 = 1$ en nú var
x = cos(v) og y = sin(v) og þar með fæst
að $\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$.

Hægt er að nota **R6** til að reikna nákvæmt gildi á sínus þegar cosínus er þekktur eða öfugt.

Dæmi 2.22 Reiknaðu nákvæmt gildi á sin(v) og tan(v) ef cos(v) = $\frac{5}{13}$.

Lausn: Notum fyrst **R6** til að finna sínusinn:

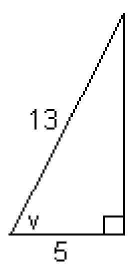
Höfum að $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \sin^2(v) = 1 \Rightarrow \sin^2(v) = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \Rightarrow \sin(v) = \pm\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}} = \pm\frac{12}{13}$.

Hér eru tvær lausnir því að v getur bæði verið í 1. eða 4. fjórðungi fyrst cos(v) > 0 og því getur sin(v) bæði verið jákvæður eða neikvæður.

Finnum síðan tangensinn: tan(v) = $\frac{\sin(v)}{\cos(v)} = \frac{\pm\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \pm\frac{12}{5}$.

Síðasta dæmi má einnig leysa á annan hátt. Teiknum rétthyrndan þríhyrning með skammhlið 5 og langhlið 13 og köllum aðlægt horn skammhliðarinnar v. Finnum næst hina skammhliðina sem er mótlæg horninu með reglu Pýþagórasar: $5^2 + b^2 = 13^2 \Rightarrow b = 12$.

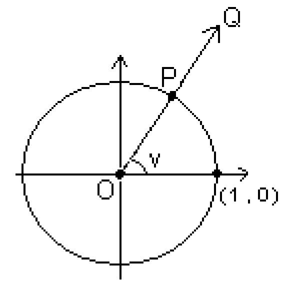
Þar með finnst að $\sin(v) = \pm\frac{12}{13}$. Þar sem hornið v getur bæði verið í fyrsta eða fjórða fjórðungi (cosínusinn er jákvæður) getur sínusinn bæði verið plústala eða mínustala.



12. Innfeldi og horn milli vigra

R7: Ef vigurinn $\bar{b}$ hefur stefnuhorn v þá er $\bar{b} = |\bar{b}|\begin{pmatrix}\cos(v)\\ \sin(v)\end{pmatrix}$.

Sönnun: Látum $\bar{b} = \overline{OQ}$ hafa upphafspunkt í O og köllum skurðpunkt OQ og einingarhringsins P.



Þá er P = (cos(v), sin(v)) og $\overline{OP} = \begin{pmatrix}\cos(v)\\ \sin(v)\end{pmatrix}$.

Nú er $\overline{OP}$ einingarvigur samstefna $\bar{b}$ og

því er $\bar{b} = |\bar{b}|\,\overline{OP} = |\bar{b}|\begin{pmatrix}\cos(v)\\ \sin(v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}|\bar{b}|\cos(v)\\ |\bar{b}|\sin(v)\end{pmatrix}$

Næsta regla er mjög mikilvæg en hún lýsir því hvernig innfeldi vigra tengist lengd þeirra og stefnu. Með horni á milli vigra er hér átt við hornið sem myndast á milli vigranna þegar þeir eru teiknaðir út frá sama punkti.

R8: $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos(v)$ þar sem v er hornið á milli vigranna $\bar{a}$ og $\bar{b}$.

Ath. Ef $\bar{a}$ og $\bar{b}$ eru ekki núllvigrar eru tölurnar $|\bar{a}|$ og $|\bar{b}|$ báðar jákvæðar (lengd vigurs getur ekki verið mínustala). Formerkið á innfeldinu ræðst þá af formerkinu á cos(v). Innfeldið er jákvæð tala ef hornið á milli vigranna er hvasst því að þá er cos(v) plústala en innfeldið er neikvætt ef hornið á milli vigranna er gleitt því að þá er cos(v) mínustala. Þegar hornið á milli vigranna er 90° verður innfeldið 0 (cos(90°) = 0) eins og þegar hefur komið fram í reglunni um hornrétta vigra.

Við skulum líta á nokkur dæmi um notkun reglunnar áður en hún verður sönnuð.

Dæmi 2.23 Reiknaðu innfeldi vigranna $\bar{a}$ og $\bar{b}$ ef $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 6$ og $v = 67°$.

Lausn: $\bar{a}\cdot\bar{b} = 5\cdot 6\cdot\cos(67°) \approx 11{,}7$

Næsta dæmi er sérlega mikilvægt:

Dæmi 2.24 Reiknaðu hornið á milli vigranna $\bar{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lausn: Finnum fyrst innfeldi vigranna og lengdir:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (-1) \cdot 8 + 4 \cdot 3 = 4 \ , \quad |\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} \ \text{ og } |\bar{b}| = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$$

Nú fæst: $\cos(v) = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \dfrac{4}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{73}} \approx 0{,}1135 \Rightarrow v \approx 83{,}5°$.

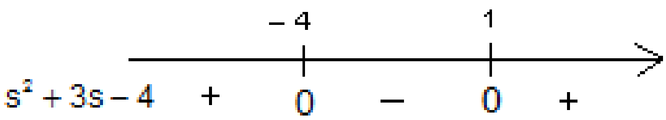
Dæmi 2.25 Reiknaðu hornið á milli vigranna $\bar{a}$ og $\bar{b}$ ef $|\bar{a}| = 8$, $|\bar{b}| = 2$ og $\bar{a} \cdot \bar{b} = -3$.

Lausn: Ef við einangrum cosínusinn í reglunni fæst $\cos(v) = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$. Setjum tölurnar inn og fáum $\cos(v) = \dfrac{-3}{8 \cdot 2} = -\ 0{,}1875 \Rightarrow v = 100{,}8°$.

Dæmi 2.26 Finndu gildið á s ef hornið á milli vigranna $\bar{a} = \begin{pmatrix} s \\ s-4 \end{pmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{pmatrix} s+2 \\ 1 \end{pmatrix}$ er gleitt.

Lausn: Ef hornið er gleitt þá er innfeldið $\bar{a} \cdot \bar{b} < 0$. Reiknum innfeldið og fáum:
$\bar{a} \cdot \bar{b} = s(s+2) + (s-4) \cdot 1 = s^2 + 3s - 4 < 0$. Þetta er 2. stigs ójafna sem við leysum með því að finna rætur margliðunnar $s^2 + 3s - 4$ og gera síðan formerkjamynd.

Finnum fyrst ræturnar: $s^2 + 3s - 4 = (s+4)(s-1)$. Nú sést að ræturnar eru s = – 4 og s = 1 og formerkjamyndin verður svona:



Lausnin er þar sem margliðan er neikvæð (mínusmerkið) svo $s \in \,]-4 \ , 1[$.

Hægt er að reikna stefnuhorns vigurs $\bar{a}$ með því reikna hornið á milli vigranna $\bar{a}$ og $\bar{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dæmi 2.27 Reiknaðu stefnuhorn vigursins $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Lausn: $\bar{a} \cdot \bar{i} = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 = 2$, $\left| \bar{a} \right| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, $\left| \bar{i} \right| = 1$. Nú fæst

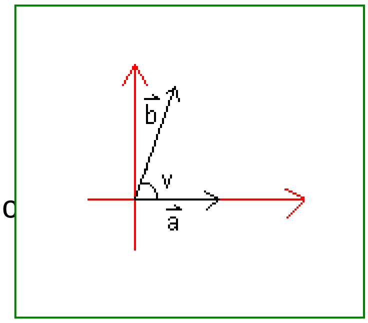
$\cos(v) = \dfrac{2}{\sqrt{13} \cdot 1} \Rightarrow v = 56{,}3^\circ$ en þar sem vigurinn liggur í 4. fjórðungi er stefnuhornið neikvætt svo rétta svarið er $-56{,}3^\circ$ (eða $303{,}7^\circ$).

Hér er svo sönnun á reglunni $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos(v)$.

Við veljum hnitakerfi með x-ásinn í stefnu vigursins $\bar{a}$.

Stefnuhorn vigursins $\bar{a}$ er þá 0° en stefnuhorn vigursins $\bar{b}$ er hornið v (sjá mynd). Samkvæmt reglu 6 er:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} |\bar{a}|\cos(0^\circ) \\ |\bar{a}|\sin(0^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\bar{a}| \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \bar{b} = \begin{pmatrix} |\bar{b}|\cos(v) \\ |\bar{b}|\sin(v) \end{pmatrix} \text{ og því fæst}$$



$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} |\bar{a}| \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |\bar{b}|\cos(v) \\ |\bar{b}|\sin(v) \end{pmatrix} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos(v) + 0 \cdot |\bar{b}|\sin(v) = |\bar{a}||\bar{b}|c$$

.

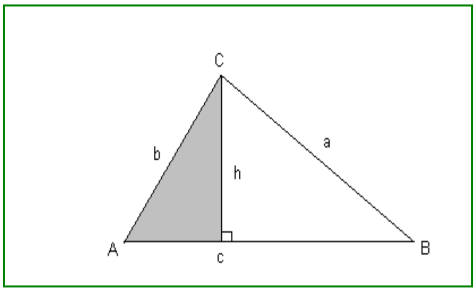
Kafli 3 – Þríhyrningar

Í þessum kafla eru þrjár reglur sem gilda í öllum í þríhyrningum. Fyrsta reglan er flatarmálsregla en hinar tvær reglurnar eru til að reikna horn og hliðar í þríhyrningi.

Regla 1: Flatarmál (F) þríhyrningsins ABC er

$$\boxed{F = \frac{1}{2} bc \sin(A)}$$

Sönnun:



Veljum c fyrir grunnlínu og teiknum hæðina h á grunnlínuna.

Litli skyggði þríhyrningurinn er rétthyrndur með langhlið b og því gildir:

$$\sin(A) = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \sin(A)$$

Notum nú regluna $F = \frac{1}{2} g \cdot h$ til að reikna flatarmál þríhyrningsins ABC og þá fæst:

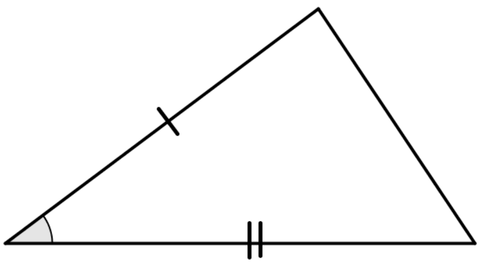
$$F = \frac{1}{2} g \cdot h = \frac{1}{2} c \cdot h = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin(A)$$

Ath. Ekki skiptir máli hvaða hlið er valin fyrir grunnlínu og því fæst á samsvarandi hátt að

$$F = \frac{1}{2} bc \sin(A) = \frac{1}{2} ab \sin(C) = \frac{1}{2} ac \sin(B) \qquad \text{Q.E.D.}$$

Í sönnuninni hér að ofan er gert ráð fyrir að þríhyrningurinn sé hvasshyrndur en sama niðurstaða fæst þótt þríhyrningurinn sé rétthyrndur eða gleiðhyrndur.

Ath. Til að geta notað regluna um flatarmálið þarftu að þekkja tvær hliðar og hornið á milli hliðanna (sjá mynd).



Dæmi 3.1 Reiknaðu flatarmál þríhyrningsins ABC ef a = 8, b = 10 og $\angle C = 50°$.

Lausn: F = $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \sin(50°) \approx 30{,}64$

Dæmi 3.2 Reiknaðu $\angle B$ ef a = 6 cm, c = 8 cm og flatarmál þríhyrningsins er 20 cm^2.

Lausn: Höfum að $20 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin(B) \Rightarrow \sin(B) \approx 0{,}8333 \Rightarrow B = 56{,}4°$ eða $B = 123{,}6°$.

Sínusreglan

Regla 2: Í þríhyrningnum ABC gildir að:

$$\boxed{\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}}$$

Sönnun: Samkvæmt reglunni um flatarmál þríhyrnings fæst:

$$\frac{1}{2}bc\sin(A) = \frac{1}{2}ac\sin(B) = \frac{1}{2}ab\sin(C)$$

Margföldum með 2 þá fæst

$$bc\sin(A) = ac\sin(B) = ab\sin(C)$$

Deilum því næst með abc þá fæst

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

Sé öllum brotunum snúið við fæst sínusreglan

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$ Q.E.D.

Ath. Það má einnig rita sínusregluna með sínusana í teljara þ.e. $\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$.

Dæmi um notkun sínusreglunnar

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Hægt er að nota sínusregluna á tvo vegu:

i) Ef þekkt er ein hlið og öll horn þá er hægt að reikna hinar lengdir hinna hliðanna. (Ath. Það nægir að tvö horn séu gefin upp því hægt er að reikna þriðja hornið með því að nota hornasummu þríhyrnings.)

Dæmi 3.3 Í ΔABC er gefið að a = 5, $\angle A = 30^\circ$ og $\angle B = 65^\circ$. Reiknaðu þriðja hornið og lengdir b og c.

Lausn: Reiknum fyrst hornið C.

$$\angle C = 180^\circ - 30^\circ - 65^\circ = 85^\circ.$$

Finnum næst lengd hliðarinnar b með sínusreglunni.

$$\frac{b}{\sin(B)} = \frac{a}{\sin(A)} \Rightarrow \frac{b}{\sin(65^\circ)} = \frac{5}{\sin(30^\circ)} \Rightarrow b = \frac{\sin(65^\circ)\cdot 5}{\sin(30^\circ)} \approx 9{,}06$$

Finnum svo lengd hliðarinnar c á samsvarandi hátt:

$$\frac{c}{\sin(C)} = \frac{a}{\sin(A)} \Rightarrow \frac{c}{\sin(85^\circ)} = \frac{5}{\sin(30^\circ)} \Rightarrow c = \frac{\sin(85^\circ)\cdot 5}{\sin(30^\circ)} \approx 9{,}96$$

ii) Ef þekktar eru tvær hliðar og horn sem er **<u>á móti</u>** annarri þekktu hliðinni er hægt að reikna hornið **<u>á móti</u>** hinni hliðinni (þriðja hornið finnst svo með því að nota hornasummuna og þriðja hliðin með sínusreglunni sbr. i)). Hér er aðgátar þörf því að hugsanlega koma tvö horn til greina þ.e. hvassa hornið sem vasareiknirinn gefur og frændhornið sem er gleitt (frændhorn hafa sama sínus). Stundum er hægt að útiloka gleiða hornið (eða hvassa hornið) vegna hornasummunnar en sum dæmi hafa tvær lausnir, m.ö.o. tveir þríhyrningar koma til greina.

Dæmi 3.4 Í ΔABC er gefið að a = 5, b = 4 og $\angle A = 65°$. Reiknaðu hin hornin og lengd hliðarinnar c.

Lausn: Finnum fyrst $\angle B$ með sínusreglunni:

$$\frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(A)}{a} \Rightarrow \frac{\sin(B)}{4} = \frac{\sin(65°)}{5} \Rightarrow \sin(B) = \frac{4 \cdot \sin(65°)}{5} \approx 0{,}725$$

$$\Rightarrow B \approx 46{,}5° \text{ eða } B \approx 133{,}5° \text{ (frændhornið)}$$

Hornið 133,5° er of stórt og kemur ekki til greina svo $B \approx 46{,}5°$.
Þá er $\angle C = 180° - 65° - 46{,}5° = 68{,}5°$ og lengd hliðarinnar c finnst svo með sínusreglunni (sbr dæmi 1) og fæst þá:

$$\frac{c}{\sin(68{,}5°)} = \frac{5}{\sin(65)} \Rightarrow c = \frac{\sin(68{,}5°) \cdot 5}{\sin(65°)} \approx 5{,}13.$$

Dæmi 3.5 Í ΔABC er gefið að a = 8, b = 10 og $\angle A = 35°$. Reiknaðu hornin B og C og lengd hliðarinnar c.

Lausn:

$$\frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(A)}{a} \Rightarrow \frac{\sin(B)}{10} = \frac{\sin(35°)}{8} \Rightarrow \sin(B) = \frac{10 \cdot \sin(35°)}{8} \approx 0{,}717$$

$$\Rightarrow B \approx 45{,}8° \text{ eða } B \approx 134{,}2° \text{ (frændhornið)}$$

Hér koma bæði hornin til greina og því verða tvær lausnir á dæminu:

i) $\angle B = 45{,}8°$, $\angle C = 180° - 35° - 45{,}8° = 99{,}2°$

og þá verður $c = \dfrac{\sin(99{,}2°) \cdot 8}{\sin(35°)} \approx 13{,}77$

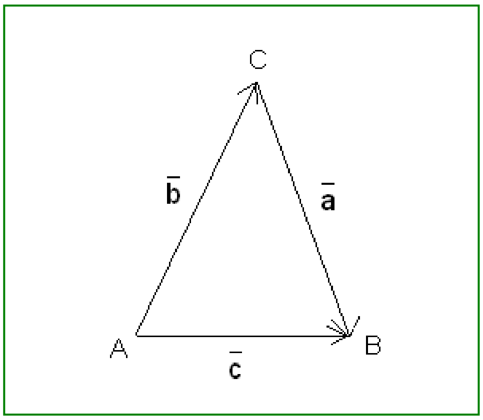
ii) $\angle B = 134{,}2°$, $\angle C = 180° - 35° - 134{,}2° = 10{,}8°$

og þá verður $c = \dfrac{\sin(10{,}8°) \cdot 8}{\sin(35°)} \approx 2{,}61.$

Kósínusreglan

Regla 3: Í þríhyrningnum ABC gildir að $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$

Sönnun: Búum til vigra úr hliðum þríhyrningsins ABC (sjá mynd) og setjum $\overline{AB} = \bar{c}$, $\overline{AC} = \bar{b}$ og $\overline{CB} = \bar{a}$ þá fæst



$$\bar{b} + \bar{a} = \bar{c} \Rightarrow \bar{a} = \bar{c} - \bar{b}$$

Reiknum næst innfeldi vigursins $\bar{a}$ við sjálfan sig báðum megin jafnaðarmerkisins og þá fæst:

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = (\bar{c} - \bar{b}) \cdot (\bar{c} - \bar{b}) = \bar{c} \cdot \bar{c} - 2\bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{b}$$

Notum síðan regluna $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$ ásamt reglunni $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos(v)$ og þá fæst

$$|\bar{a}|^2 = |\bar{c}|^2 - 2|\bar{b}||\bar{c}|\cos(A) + |\bar{b}|^2$$

en það gefur kósínureglunа

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$ Q.E.D.

Dæmi um notkun kósínusreglunnar

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

Hægt er að nota kósínusregluna á tvo vegu:

i) Ef þekktar eru tvær hliðar og hornið á milli þeirra þá er hægt að reikna þriðju hliðina, þ.e. hliðina á móti horninu. (Sömu upplýsingar duga til að hægt sé að nota fyrrnefnda reglu um flatarmál þríhyrnings.)

Dæmi 3.6 Í ΔABC er gefið að a = 5, b = 6 og $\angle C = 65°$**.** Reiknaðu lengd hliðarinnar c.

Lausn: Samkvæmt kósínusreglunni er $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$. Því fæst:

$$c^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(65°) \approx 35{,}64 \Rightarrow c \approx 5{,}97$$

ii) Ef allar hliðarnar eru þekktar þá er hægt að reikna út hornin. Fyrst þarf þá að snúa kósínusreglunni við:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

Víxlum fyrst á liðnum a^2 og liðnum $2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$. Þá fæst:

$$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A) = b^2 + c^2 - a^2$$

deilum næst með $2 \cdot b \cdot c$ í báðar hliðar. Þá fæst:

$$\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

Dæmi 3.7 Í ΔABC er gefið að a = 5, b = 6 og c = 8. Reiknaðu hornin.

Lausn: Reiknum t.d. hornið A með kósínusreglunni:

$$\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{6^2 + 8^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{75}{96} \Rightarrow A \approx 38{,}62^\circ$$

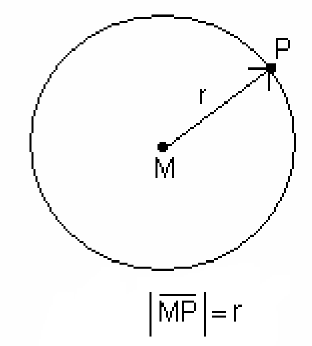
Á sama hátt finnst að

$$\cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{5^2 + 8^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{53}{80} \Rightarrow B \approx 48{,}51^\circ$$

Hornið C fæst svo með því að nota að $\angle C = 180^\circ - 38{,}62^\circ - 48{,}51^\circ = 92{,}87^\circ$.

Kafli 4 – Keilusnið

Jafna hrings



Punkar sem liggja á hring í hnitakerfi uppfylla ákveðna jöfnu sem nefnist jafna hringsins.
Látum M = (h , k) vera miðju hringsins, r vera radíus hringsins og P = (x , y) vera einhvern punkt á hringnum (sjá mynd).
Hnit vigursins $\overline{MP}$ eru $\begin{pmatrix} x-h \\ y-k \end{pmatrix}$.

Nú fæst:

P er á hringnum ef og aðeins ef lengd vigursins $\overline{MP}$ er jöfn radíus hringsins, þ.e. ef

$$|\overline{MP}| = \left|\begin{pmatrix} x-h \\ y-k \end{pmatrix}\right| = r\,.$$

Samkvæmt reglunni um lengd vigurs er $\left|\begin{pmatrix} x-h \\ y-k \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$ svo

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r.$$

Setjum báðar hliðar í annað veldi og þá fæst jafnan:

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

Í jöfnu hringsins kemur fram hnit miðjunnar (h , k) og radíus hringsins. Taktu eftir að hnit miðjunnar eru gagnstæð við merkin í sviganum.

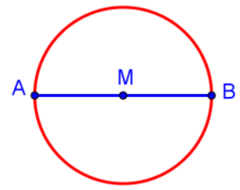
Dæmi 4.1 Ritaðu jöfnu hrings með miðju M = (2 , – 5) og radíus r = 4.

Lausn: $(x-2)^2+(y-(-5))^2 = 4^2$ eða $(x-2)^2+(y+5)^2 = 4^2$

Dæmi 4.2 Er punkturinn Q = (5 , 1) innan eða utan hringsins eða á hringnum sem gefinn er með jöfnunni: $(x+2)^2+y^2 = 7^2$?

Lausn: Hringurinn er með miðju (– 2 , 0) og radíus r = 7. Reiknum fyrst hnit vigursins $\overline{MQ}$ og síðan lengd hans og berum saman við radíus hringsins.
$\overline{MQ} = \begin{pmatrix} 5-(-2) \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $|\overline{MQ}| = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50} > 7$. Þar með sést að Q er utan hringsins.

Dæmi 4.3 Punktarnir A = (8 , 14) og B = (– 4 , –2) liggja á hring.
Finndu jöfnu hringsins ef AB er miðstrengur í hringnum.



Lausn: Miðpunktur hringsins finnst með miðpunktsreglunni:

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{8+(-4)}{2};\frac{14+(-2)}{2}\right)=(2,6).$$

Radíus hringsins er hálfur miðstrengurinn svo hann má finna með því að reikna lengdina á $\overline{AB}$ og deila með 2.

$$\overline{AB}=\begin{pmatrix}-4-8\\-2-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\-16\end{pmatrix} \text{ og } \left|\overline{AB}\right|=\sqrt{12^2+16^2}=\sqrt{400}=20$$

Þá er radíusinn r = 10 og jafnan verður þá

$$(x-2)^2+(y-6)^2=10^2$$

Ef reiknað er upp úr sviganum í jöfnu hrings og liðir dregnir saman glatast upplýsingarnar um miðju og radíus hringsins sem lesa má beint út úr jöfnunni. Þá þarf að beita aðferðinni að fylla í ferninginn til að koma jöfnunni yfir á rétt form. Að fylla í ferninginn er að bæta við þriðja lið til að stærð á forminu x^2+bx (eða x^2-bx) verði ferningsstærð. Samkvæmt ferningsreglunum er $(x\pm b)^2=x^2\pm 2bx+b^2$ svo að þriðji liðurinn fæst með því að helminga x-stuðulinn og setja útkomuna í annað veldi.

Dæmi 4.4 Finndu miðju og radíus hringsins $x^2+8x+y^2-6y=2$.

Lausn: Þriðji liðurinn sem vantar með x-liðunum er talan 16 (helmingurinn af 8 er 4 og 4^2 = 16) og þriðji liðurinn sem vanta með y-liðunum er 9 (helmingurinn af 6 er 3 og 3^2 = 9). Við bætum þessum liðum við báðar hliðar jöfnunnar og umritum síðan í ferningsstærðir. Þá fæst:

$$x^2+8x+16+y^2-6y+9=2+16+9$$

sem verður $(x+4)^2+(y-3)^2=27$

og þar með sést að miðjan er $(-4\,,3)$ og radíusinn er $\sqrt{27}$.

Ef stuðlar standa með x^2- og y^2-liðunum þarf að byrja á að deila í báðar hliðar jöfnunnar.

Dæmi 4.5 Ritaðu jöfnuna $3x^2+12x+3y^2-36y+15=0$ á forminu $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

Lausn: Deilum í alla liði með 3 og færum fasta liðinn yfir. Þá fæst:

$$x^2+4x+y^2-12y=-5.$$

Fyllum næst í ferninginn og þá fæst

$$x^2+4x+4+y^2-12y+36=-5+4+36$$

sem gefur jöfnuna: $(x+2)^2+(y-6)^2=35$.

Dæmi 4.6 Reiknaðu skurðpunkta hringsins sem gefinn er með jöfnunni $(x+1)^2+(y-2)^2=8$ við hnitaásana (þ.e. x-ás og y-ás).

Lausn: Reiknum fyrst skurðpunkta við x-ás: Um alla punkta á x-ási gildir að y-hnit þeirra er 0, þ.e. þeir hafa hnit á forminu (x , 0). Margföldum fyrst upp úr svigunum í jöfnu hringsins og setjum síðan 0 í stað y og færum alla liði í vinstri hlið. Þá fæst:

$$x^2+2x+1+y^2-4y+4=8 \text{ sem verður } x^2+2x-3=0$$

sem er annars stigs jafna með lausnir x = 1 og x = -3. Skurðpunktar við x-ás eru því $(-3\,,\,0)$ og $(1\,,\,0)$.
Punktar á y-ási hafa x-hnitið 0, þ.e. þeir hafa hnit á forminu (0 , y) svo þeir finnast með því að setja x = 0 í jöfnu hringsins og þá fæst annars stigs jafnan:

$$y^2-4y-3=0 \text{ sem hefur lausnir } \frac{4\pm\sqrt{28}}{2}\approx\begin{cases}4{,}65\\-0{,}65\end{cases}$$

svo skurðpunktar við y-ás eru (0 ; 4,65) og (0 , – 0,65).

Skurðpunktar hrings og línu

Ef reikna á skurðpunkta hrings og línu þarf að leysa saman jöfnu hringsins og jöfnu línunnar en það er hægt að gera með því að nota innsetningaraðferðina:

i) Reiknum upp úr svigunum í jöfnu hringsins ef hún er á forminu $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ og færum alla liði í aðra hlið.

ii) Setjum línuna á skurðhallaform y = hx + m ef hún er á öðru formi*.

iii) Setjum stærðina (hx + m) í staðinn fyrir y – ið í jöfnu hringsins og fáum annars stigs jöfnu með x sem leysa má í vasareikninum.

iv) Reiknum síðan y-hnit skurðpunktanna með því að setja inn í jöfnu línunnar.

*(Í sumum dæmum gæti verið einfaldara að einangra x – ið í jöfnu línunnar og fá fram annars stigs jöfnu með y).

Dæmi 4.7 Reiknaðu skurðpunkta hringsins $(x-2)^2+(y+3)^2=17$ og línunnar y = 2x – 1 (ef til eru).

Lausn: Reiknum fyrst upp úr jöfnu hringsins og færum liðina í aðra hlið. Þá fæst

$$x^2-4x+y^2+6y-4=0$$

Setjum næst stærðina (2x – 1) í staðinn fyrir y-ið í jöfnu hringsins. Þá fæst:

$$x^2-4x+(2x-1)^2+6(2x-1)-4=0$$

Nú reiknum við upp úr svigunum og einföldum og þá fæst:

$$x^2-4x+4x^2-4x+1+12x-6-4=0$$

$$\Rightarrow\ 5x^2+4x-9=0$$

Við leysum nú annars stigs jöfnuna í vasareiknunum og fáum tvær lausnir:

$$x_1=1\quad,\quad x_2=-1{,}8$$

sem eru x-hnit skurðpunktanna. y-hnitin fást með jöfnu línunnar (þ.e. y = 2x – 1):

$$y_1=2\cdot1-1=1\ \text{ og }\ y_2=2\cdot-1{,}8-1=-4{,}6$$

Skurðpunktarnir eru þá (1 , 1) og (–1,8 ; – 4,6).

Ef finna á skurðpunkta tveggja hringa þarf að leysa saman jöfnur hringanna.

i) Reiknum upp úr svigunum ef jöfnur hringanna eru á forminu $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

ii) Margföldum síðan jöfnu annars hringsins með –1 og leggjum við jöfnu hins hringsins. Þá eyðast x^2- og y^2- liðirnir og eftir er jafna línu sem við setjum á skurðhallaform (eða einangrum x-liðinn frá hinum liðunum).

iii) Finnum skurðpunkta línunnar og annars hringsins á sama hátt og í dæmi á undan.

Dæmi 4.8 Reiknaðu skurðpunkta hringanna sem gefnir eru með jöfnunum $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$ og $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$.

Lausn: Reiknum upp úr sviganum í hring I: þá fæst $x^2 + 4x + y^2 - 6y - 3 = 0$

Margföldum jöfnu hrings II með – 1 og leggjum við jöfnu hrings I:

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y - 3 = 0$$

$$-x^2 - y^2 + 4y + 1 = 0$$

$$4x - 2y - 2 = 0$$

Jafnan $4x - 2y - 2 = 0$ er jafna línu sem á skurðhallaforminu verður y = 2x – 1.

Setjum næst stærðina (2x – 1) inn fyrir y í jöfnu hrings II (hún er einfaldari) og reiknum upp úr svigunum. Þá fæst:

$$x^2 + (2x-1)^2 - 4(2x-1) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 - 12x + 4 = 0.$$

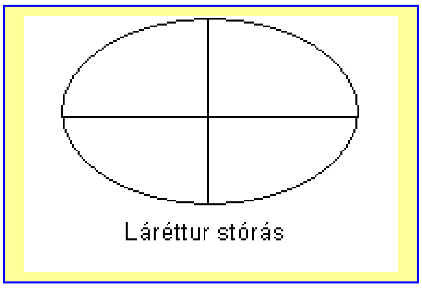
Lausnir 2. stigs jöfnunnar eru $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}4$ og tilsvarandi y verða

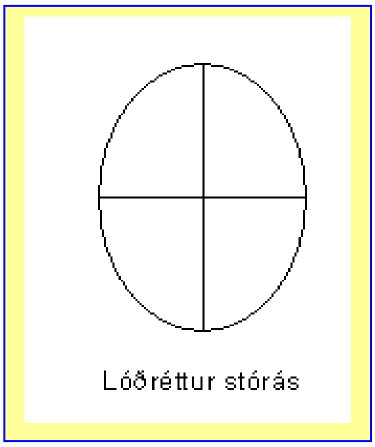
$$y_1 = 3 \text{ og } y_2 = -0{,}2$$

Skurðpunktarnir verða þá (2 , 3) og (0,4 ; – 0,2).

Sporbaugur

Sporbaugur er eins og hringur sem búið er að teygja til.





Almenn jafna sporbaugs með miðju (h , k) og láréttan stórás er

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{þar sem } 0 < b < a.$$

Tölurnar a og b eru þ.a. stórásinn hefur lengdina 2a og skammásinn hefur lengdina 2b.

Jöfnu hrings má rita á forminu $\frac{(x-h)^2}{r^2}+\frac{(y-k)^2}{r^2}=1$ svo hringur er eins og sporbaugur þar sem a = b = r (þ.e. stórásinn (2a) er jafnlangur og skammásinn (2b) og er þá hvor um sig jafnlangur og miðstrengur hringsins (2r)).

ATH. Í vasareikninum er miðjan táknuð með (H , K) og talan A getur bæði staðið fyrir lengdina á hálfum stórási eða hálfum skammási. Best er að hugsa dæmið þannig að hærri talan (af A og B) gefur lengdina á hálfum stórási og lægri talan hálfum skammási. Ef hærri talan er undir x-sviganum verður stórásinn láréttur en ef hærri talan er undir y-sviganum er stórásinn lóðréttur.

Á stórási sporbaugs eru tveir punktar sem kallast brennipunktar (focus í vasareikni). Fjarlægð þeirra frá miðju sporbaugs er talan c þar sem c er gefið með formúlunni

$$c=\sqrt{a^2-b^2} \qquad \text{(ath. a er lengdin á hálfum stórási, þ.e. a er hærri talan).}$$

þ.e. c = kvaðratrótin af (hálfur stórás í öðru veldi mínus hálfur skammás í öðru veldi).

Talan $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ kallast hringvik og er mælikvarði á hvað sporbaugurinn er teygður. Talan e er á bilinu frá 0 til 1 (e = 0 gefur okkur hring en ekki sporbaug) og því nær sem e er gildinu 1 þeim mun teygðari verður sporbaugurinn en því nær sem e er gildinu 0 þeim mun meir líkist sporbaugurinn hring.

Brautir reikistjarnanna eru sporbaugar sem flestar eru tiltölulega hringlaga nema braut Merkúr og Plútó sem áður taldist reikistjarna. Brautir sumra halastjarna eru sporbaugar og geta þær haft hringvik nálægt 1.

Dæmi 4.9 Finndu miðju, lengd stóráss og skammáss, hnit brennipunkta, hringvik og skurðpunkta sporbaugsins við y – ás ef jafna hans er:

$$\frac{(x-4)^2}{5^2}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$$

Lausn:

i) Miðjan er (4 , – 3).

ii) a = 5 og b = $\sqrt{16}=4$ svo stórásinn er láréttur og er 10 að lengd en skammásinn er 8 að lengd.

iii) Finnum næst töluna c.

$$c=\sqrt{25-16}=3$$

iii) Brennipunktarnir eru á láréttu línunni y = – 3 (miðja sporbaugs og brennipunktar eru allir á stórás) í fjarlægðinni c = 3 frá miðpunkti svo hnit þeirra eru

(1 , – 3) og (7 , – 3). (Einnig er hægt að finna þá í vasareikninum.)

iv) Hringvikið er $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$.

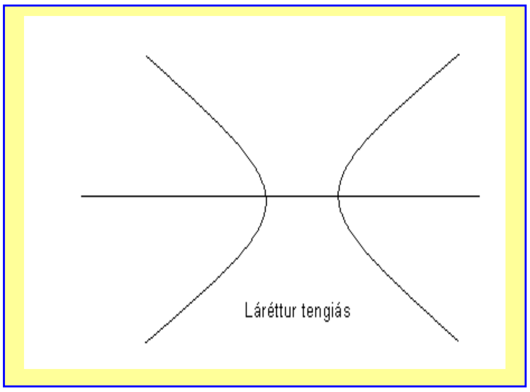
v) Margföldum upp úr svigunum og margföldum jöfnuna svo með með $25\cdot 16=400$ til að eyða brotum og þá fæst:

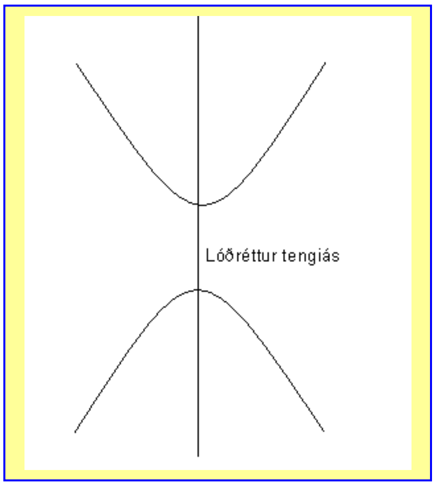
$$16x^2-128x+256+25y^2+150y+225=400$$

Síðan setjum við x = 0 (allir punktar á y-ási byrja á 0) og leysum 2. stigs jöfnuna $25y^2+150y+81=0$ í vasareikni sem gefur lausnirnar $y_1=-0{,}6$, $y_2=-5{,}4$

Svo skurðpunktar við y – ás eru $(0;-0{,}6)$ og $(0;-5{,}4)$. (Einnig er hægt að finna þá í vasareikninum.)

Breiðbogi





Jafnan

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

er jafna breiðboga með miðju $(h\ ,\ k)$ og láréttan tengiás. Tengiásinn er lárétta (eða lóðrétta) línan gegnum miðjuna. Skurðpunktar breiðbogans og tengiássins kallast topppunktar (vertex) breiðbogans og eru þeir í fjarlægðinni a frá miðjunni svo fjarlægðin á milli topppunktanna er 2a. (Ath. miðpunkturinn sjálfur er ekki á breiðboganum heldur á mitt á milli boganna.) Tengiásinn er láréttur þegar plúsinn er á x – sviganum.

Jafnan

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

er jafna breiðboga með lóðréttan tengiás. (Plúsinn er á y – sviganum.)

Ath. Talan a er í nefnara brotsins sem er í plús en talan b er í nefnara brotsins sem er í mínus og gildir það sama fyrir A og B í breiðbogajöfnunni í vasareikninum.

Hnit topppunktanna er hægt að finna með því að reikna skurðpunkta breiðbogans við tengiásinn, eða með því að nota sér að þeir eru í fjarlægðinni a frá miðpunkti breiðbogans og því fæst:

Ef tengiásinn er láréttur eru skurðpunktarnir $(h+a\,;k)$ og $(h-a\,;k)$ en ef hann er lóðréttur verða skurðpunktarnir $(h\,;k+a)$ og $(h\,;k-a)$.

Einnig er hægt að finna hnit topppunktanna í vasareikninum.

Breiðboginn hefur brennipunkta (eins og sporbaugurinn) sem liggja á tengiásnum.

Dæmi 4.10 Finndu miðju og hnit beggja topppunkta breiðbogans

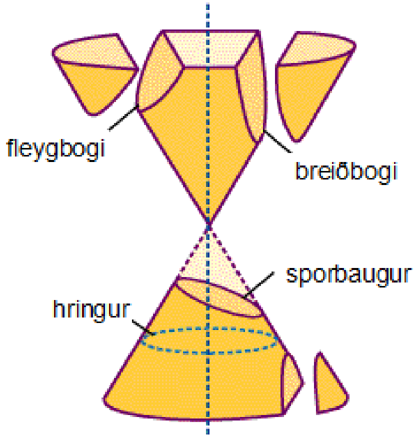
$$\frac{(x-2)^2}{2^2} - \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$$

Lausn:

i) Hnit miðju eru $(2\ ,\ -1)$.

ii) Tengiásinn er láréttur (plúsinn er á x – sviganum og topppunktarnir eru í fjarlægðinni 2 frá miðjunni (a = 2) svo hnit þeirra eru (4 , –1) og (0 , –1).

Meira um keilusnið

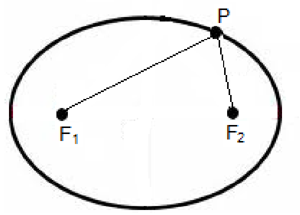


Ferlarnir (hringur, sporbaugur og breiðbogi) sem lýst hefur verið í kaflanum hér á undan ásamt fleygboganum kallast einu nafni keilusnið. Nafnið er dregið af því að ferla þessa má fá fram með því að skera tvöfalda keilu með sléttu (eða plani). Venja er að flokka keilusniðin í þrjá flokka, sporbauga (líta má á hring sem sértilfelli af sporbaug), fleygboga og breiðboga. Það fer eftir því undir hvaða horni sléttan sker keiluna hver þessara ferla kemur fram (sjá mynd).

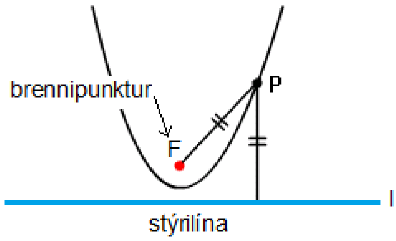
Talið er að gríski stærðfræðingurinn Menakmos, sem uppi var á fjórðu öld fyrir Krist, hafi verið fyrstur til að lýsa keilusniðum. Öld síðar ritaði Apollóníus frá Perga átta bækur um keilusnið og eru athuganir hans á þeim oft taldar mesta afrek grískra rúmfræðinga. Arabar, Persar og gyðingar varðveittu gríska fróðleikinn og bættu við hann. Persneski stærðfræðingurinn og ljóðskáldið Omar Khayyám (1048−1122) var fyrstur til að nýta keilusnið til að leysa algebrujöfnur. Á sautjándu öld uppgötvaði Jóhannes Kepler að brautir reikistjarna umhverfis sólu eru sporbaugar. Þar með komust keilusniðin í sviðsljósið.

Í hagnýttri stærðfræði og eðlisfræði koma keilusnið víða fyrir. Það er ekki tilviljun að í rúmfræðilegum lýsingum á keilusniðum eru ákveðnir punktar kallaðir *brennipunktar* eins og í ljósfræði. Vegna rúmfræðilegra eiginleika keilusniða gegna þau lykilhlutverki í sjónglerjafræði. Fleiri dæmi um keilusnið má finna í umhverfi okkar. Ferill hlutar sem er kastað er fleygbogi. Vírar sem halda uppi hengibrú mynda hluta af fleygboga. Halógenljós varpa oft breiðbogum á veggi og þótt brautir flestra halastjarna séu sporbaugar (eins og fram kom fyrr í kaflanum) þá eru brautir nokkurra halastjarna breiðbogar (rannsóknir sýna að braut þeirra var áður sporbaugur en hefur aflagast) svo nokkur dæmi séu tekin.

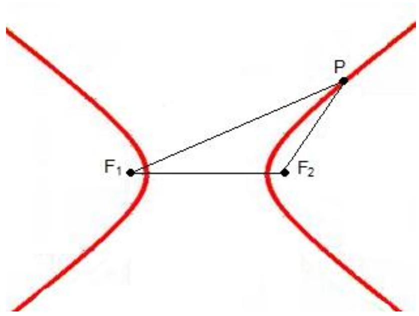
Hægt er að skilgreina keilusniðin út frá ákveðnum rúmfræðilegum eiginleikum þeirra eins og nú verður gert:



Sporbaugur er skilgreindur sem safn allra punkta P sem hafa ákveðna samanlagða fjarlægð d frá tveimur gefnum punktum F_1 og F_2. Með öðrum orðum: Punkturinn P er á sporbaugi ef $|F_1P| + |F_2P| = d$ þar sem d er stærri en fjarlægðin á milli punktanna F_1 og F_2 . Punktarnir F_1 og F_2 kallast brennipunktar sporbaugsins.



Fleygbogi er safn allra punkta P sem eru þannig að fjarlægð P frá gefnum punkti F (brennipunkti) og fjarlægð P frá gefinni línu l (stýrilínu) eru jafnar.



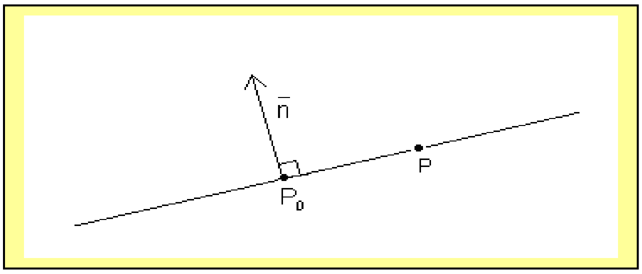
Breiðbogi er safn allra punkta P þannig að mismunurinn á fjarlægð P frá tveimur gefnum punktum F_1 og F_2 er föst ákveðin tala d. Með öðrum orðum er $|F_1P| - |F_2P| = d$. Punktarnir F_1 og F_2 kallast brennipunktar breiðbogans.

Séu keilusnið teiknuð í venjulegu hnitakerfi má lýsa þeim með jöfnu af gerðinni: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ þar sem A, B, C, D, E og F eru gefnir fastar. Til dæmis fæst jafna einingarhringsins: $x^2 + y^2 = 1$ ef A = C = 1, B = D = E = 0 og $F = -1$ og jafna fleygbogans $y = x^2$ ef $A = -1$, E = 1 og B = C = D = F = 0. Hægt er að finna margvíslegan fróðleik um keilusnið á netinu.

Kafli 5 – Almenn jafna beinnar línu

Jafnan $ax + by + c = 0$ kallast almenn jafna beinnar línu. Þvervigur línunnar $\bar{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ kemur fram í almennu jöfnunni. Þvervigur línu er vigur sem er hornréttur á línuna.

Ef gefinn er punktur $P_0 = (x_0\,, y_0)$ á línu með þvervigur $\bar{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er einfaldast að finna almennu jöfnuna með því að nota regluna um innfeldi hornréttra vigra sem gefur að $\overline{P_oP} \cdot \bar{n} = 0$ þar sem $P = (x\,,\,y)$ er einhver punktur á línunni.



Dæmi 5.1 Finndu almenna jöfnu línu sem liggur í gegnum punktinn $P_0 = (2\ ,\ 4)$ og hefur þvervigur $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Lausn: Látum $P = (x\,,\,y)$ vera einhvern punkt á línunni. Þá er

$$\overline{P_oP} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 5(x-2) + (-2)(y-4) = 0$$

svo almenn jafna línunnar er $5x - 2y - 2 = 0$

Dæmi 5.2 Finndu almenna jöfnu línu sem liggur í gegnum punktana $P_1 = (-2\,,4)$ og $P_2 = (3\,,6)$.

Lausn: Einn af þvervigrum línunnar er $\bar{n} = \left(\overline{P_1P_2}\right)_þ = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}_þ = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Notum nú þvervigurinn og annan punktinn t.d. $P_2 = (3\,,6)$ til að finna almennu jöfnuna eins og í síðasta sýnidæminu. Þá fæst:

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = -2(x-3) + 5(y-6) = 0$$

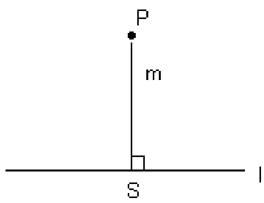
$$\Rightarrow -2x + 5y - 24 = 0$$

Dæmi 5.3 Reiknaðu skurðpunkta línanna 8x – 4y – 4 = 0 og 2x + 5y – 19 = 0.

Lausn: Leysum jöfnurnar saman (með samlagningaraðferð, innsetningaraðferð eða í vasareikninum) og þá fæst x = 2 og y = 3 svo skurðpunkturinn er (2 , 3).

Ofanvarp punkts á línu

Látum P vera punkt og l línu. Punkturinn S sem er skurðpunktur línunnar l og línunnar m sem liggur í gegnum P og er hornrétt á línuna l kallast ofanvarp punktsins P á línuna l.



Dæmi 5.4 Finndu ofanvarp punktsins P = (2 , 5) á línuna l sem gefin er með almennu jöfnunni 3x + 4y + 24 = 0.

Lausn: Við þurfum fyrst að finna jöfnu línunnar m sem er línan gegnum P hornrétt á l. Vigurinn $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ er þvervigur l. Vigurinn $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_þ = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ er þá þvervigur m. Finnum næst almenna jöfnu línunnar m. Þá fæst

$$-4(x-2)+3(y-5)=0 \text{ eða } -4x+3y-7=0$$

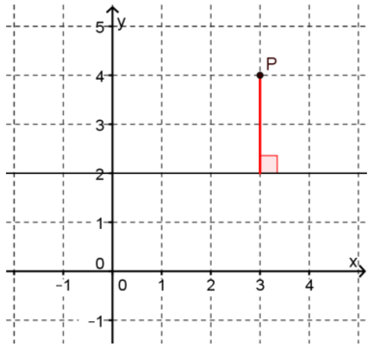
Skurðpunkturinn S fæst með því að leysa jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} 3x+4y+24&=0 \\ -4x+3y-7&=0 \end{aligned}$$

en það má gera með samlagningaraðferð, innsetningaraðferð eða í vasareikninum (EQUA).

Lausnin er $x=-4,\ y=-3$ svo $S=(-4,-3)$.

Ath. Ef línan er lárétt eða lóðrétt er hægt að finna ofanvarpspunktinn án nokkurs útreiknings!

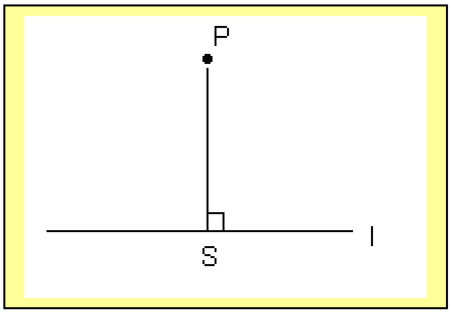


Dæmi 5.5 Reiknaðu fjarlægði punktsins P = (3 , 4) frá línunni y = 2.

Lausn: Teiknum línuna inn í hnitakerfi og merkjum punktinn inn (sjá mynd). Fjarlægðin er augljóslega 2.

Fjarlægðarformúlan

Fjarlægð punkts P frá línu l er skilgreind sem minnsta mögulega fjarlægð milli P og punkts S á línunni l en fjarlægðin er minnst þegar vigurinn $\overline{SP}$ er hornréttur á línuna l, þ.e. þegar S er ofanvarp punktsins P á l .



Því er hægt að reikna fjarlægð punkts P frá línu l með því að reikna hnit punktsins S sem er ofanvarp P á l, og síðan lengd vigursins $\overline{SP}$.

Mun þægilegra er þó að nota eftirfarandi formúlu sem kallast fjarlægðarformúlan:

Ef $P = (x_1, y_1)$ og línan l hefur almenna jöfnu $ax + by + c = 0$ þá er fjarlægð punktsins P frá l gefin með

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Dæmi 5.6 Reiknaðu fjarlægðina frá P = (3 , 7) til línunnar l sem er gefin með jöfnunni $3x - 4y + 10 = 0$.

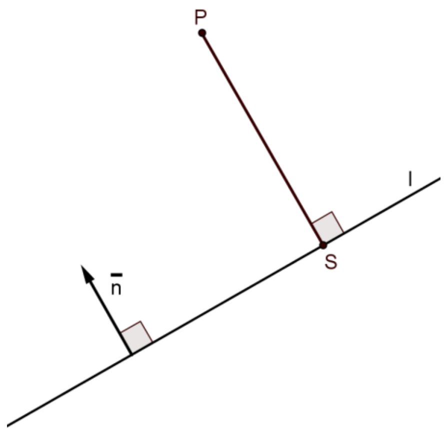
Lausn: $$\frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 7 + 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-9|}{5} = 1{,}8$$

Dæmi 5.7 Reiknaðu fjarlægð punktsins P = (2 , 5) frá línunni $y = 3x - 5$.

Lausn: Finnum fyrst almenna jöfnu línunnar l en hún er $-3x + y + 5 = 0$ og notum síðan fjarlægðarformúluna:

$$\frac{|-3 \cdot 2 + 5 + 5|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \left(= \frac{2\sqrt{10}}{5} \right)$$

Sönnun á fjarlægðarformúlunni:



Látum $P = (x_1, y_1)$, $S = (x_0, y_0)$ vera ofanvarp P á línuna l og $\bar{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vera þvervigur línunnar ax + by + c = 0. Reiknum innfeldið $\bar{n} \cdot \overline{SP}$ á tvo vegu:

i) $\bar{n} \cdot \overline{SP} = |\bar{n}||\overline{SP}|\cos(v) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot |\overline{SP}| \cdot \pm 1.$ Hér er v hornið á milli $\bar{n}$ og $\overline{SP}$ en það er annað hvort 0° eða 180° því að $\bar{n}$ og $\overline{SP}$ eru samsíða (báðir hornréttir á l)
Nú er cos(0°) = 1 og cos(180°) = -1 og því er cos(v) = ± 1.

ii)
$$\bar{n} \cdot \overline{SP} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = ax_1 + by_1 + (-ax_0 - by_0) = ax_1 + by_1 + c$$

Í síðasta skrefinu var notað eftirfarandi: fyrst $S = (x_0, y_0)$ er á línunni l þá er $ax_0 + by_0 + c = 0$ svo $c = -ax_0 - by_0$.

Við höfum því fengið að $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot |\overline{SP}| \cdot (\pm 1) = ax_1 + by_1 + c$

Setjum nú algildi báðum megin og notum að $|\pm 1| = 1$ þá fæst:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot |\overline{SP}| = |ax_1 + by_1 + c| \text{ svo } |\overline{SP}| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Kafli 6 – Meiri hornafræði

Í fyrri hornafræðikaflanum voru eftirfarandi hornafræðireglur:

R1: $\cos(v) = \cos(v + h \cdot 360^\circ)$ og $\sin(v) = \sin(v + h \cdot 360^\circ)$, $h \in Z$

R2: $\sin(180° – v) = \sin(v)$
$\cos(180° – v) = – \cos(v)$

R3: $\sin(360° – v) = – \sin(v)$
$\cos(360° – v) = \cos(v)$

R4: $\sin(v + 180°) = – \sin(v)$
$\cos(v + 180°) = – \cos(v)$

R5: $\tan(v + 180°) = \tan(v)$

R6: $\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$

Reglur fyrir tangensinn sem samsvara **R2** – **R3** fást með deilingu.

Með því að nota að sin(v) og cos(v) haldast óbreytt ef heil umferð er dregin frá horninu v má fá fram eftirfarandi reglur

$\sin(– v) = – \sin(v)$ og $\cos(– v) = \cos(v)$

en þær fást með því að draga 360° frá hornunum í vinstri hlið **R3**. Þessar reglur eru þó aðeins brot af öllum þeim reglum sem gilda í hornafræðinni. Næstar á listanum eru formúlur sem kallast summuformúlur sem sýna hvernig cosínus (og sínus og tangens) af summu eða mismuni tveggja horna tengist cosínus og sínusi hornanna tveggja.
Hvaða samband er t.d. á milli talnanna cos(70°) = 0,3420, cos(30°) = 0,8660 og cos(40°) = 0,7660 ?
Við fyrstu sýn virðist ekkert samband vera á milli þessara þriggja talna. Ekki er þó allt sem sýnist. Það er samband á milli talnanna sem er gefið með einni summuformúlunni.
Samkvæmt henni er $\cos(70°) = \cos(30°)\cos(40°) - \sin(30^\circ)\sin(40^\circ)$.
Hér eru svo summuformúlurnar sex.

Summuformúlur

1. $\cos(u - v) = \cos(u) \cdot \cos(v) + \sin(u) \cdot \sin(v)$

2. $\cos(u + v) = \cos(u) \cdot \cos(v) - \sin(u) \cdot \sin(v)$

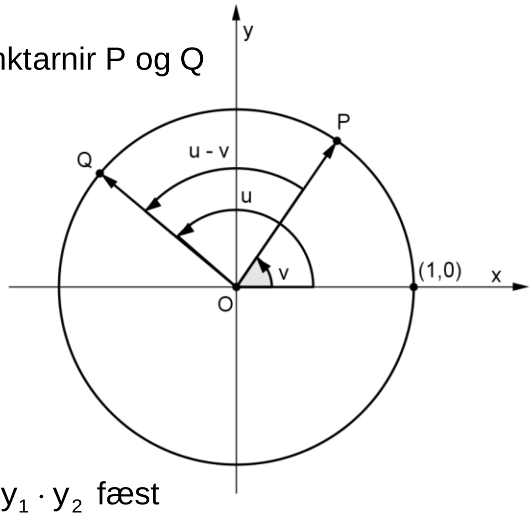
3. $\sin(u - v) = \sin(u) \cdot \cos(v) - \cos(u) \cdot \sin(v)$

4. $\sin(u + v) = \sin(u) \cdot \cos(v) + \cos(u) \cdot \sin(v)$

5. $\tan(u - v) = \dfrac{\tan(u) - \tan(v)}{1 + \tan(u) \cdot \tan(v)}$

6. $\tan(u + v) = \dfrac{\tan(u) + \tan(v)}{1 - \tan(u) \cdot \tan(v)}$

Sönnun á fyrstu summuformúlunni.



Samkvæmt almennu skilgreiningunni á cos(v) og sin(v) hafa punktarnir P og Q hnitin $P = (\cos(u), \sin(u))$ og $Q = (\cos(v), \sin(v))$ (sjá mynd).

Hnit vigranna $\overline{OP}$ og $\overline{OQ}$ eru þá

$\overline{OP} = \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \end{pmatrix}$ og $\overline{OQ} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$

Reiknum nú innfeldi vigranna $\overline{OP}$ og $\overline{OQ}$.

Sé innfeldið reiknað samkvæmt skilgreiningunni $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ fæst

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} = \cos(u)\cos(v) + \sin(u)\sin(v)$$

Sé innfeldið hins vegar reiknað samkvæmt reglunni $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos(v)$ þar sem v er hornið á milli vigranna $\bar{a}$ og $\bar{b}$ fæst niðurstaðan

$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(u - v) = \cos(u - v)$ (báðir vigrarnir eru einingarvigrar og hornið á milli þeirra er mismunur hornanna u og v). Þar með fæst að

$$\cos(u - v) = \cos(u)\cos(v) + \sin(u)\sin(v) \quad \blacksquare$$

Sönnun á annarri summuformúlunni.

Formúlan er sönnuð með því að setja $(-v)$ í stað v í fyrstu summuformúluna og notfæra sér reglurnar $\cos(-v) = \cos(v)$ og $\sin(-v) = -\sin(v)$.

$$\cos(u + v) = \cos(u - (-v)) = \cos(u)\cos(-v) + \sin(u)\sin(-v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v) \quad \blacksquare$$

Þriðja summuformúlan fæst á hliðstæðan hátt og sú fyrsta með því að nota regluna $\bar{a}_þ \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\sin(v)$ en hana má sanna á hliðstæðan hátt og regluna $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos(v)$.

Fjórða summuformúlan fæst með því að setja $(-v)$ í stað v í þriðju summuformúluna. Summuformúlurnar fyrir tangensinn fást með deilingu.

Dæmi um notkun á summuformúlunum.

Dæmi 6.1 Reiknaðu nákvæmt gildi á sin(15°) .

Lausn: Notum að 15° = 60° – 45° og setjum u = 60° og v = 45° inn í summuformúlu 3.

Þá fæst:

$$\sin(15^\circ) = \sin(60^\circ)\cdot\cos(45^\circ) - \cos(60^\circ)\cdot\sin(45^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Dæmi 6.2 Gefið er að tan(u) = 3 og tan(v) = -1. Reiknaðu nákvæmt gildi á tan(u + v).

Lausn: Samkvæmt summuformúlu 6 fæst:

$$\tan(u+v) = \frac{\tan(u)+\tan(v)}{1-\tan(u)\tan(v)} = \frac{3+(-1)}{1-3\cdot(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Dæmi 6.3 Notaðu summuformúlu til að sanna eftirfarandi reglur

a) cos(90°– x) = sin(x)

b) sin(90°– x) = cos(x)

Lausn: a) Látum u = 90° og v = x í fyrstu summuformúluna. Þá fæst:

cos(90°– x) = cos(90°)cos(x) + sin(90°)sin(x) = $0\cdot\cos(x)+1\cdot\sin(x) = \sin(x)$

b) Látum u = 90° og v = x í þriðju summuformúluna. Þá fæst:

sin(90°– x) = sin(90°)cos(x) – cos(90°)sin(x) = $1\cdot\cos(x) - 0\cdot\sin(x) = \cos(x)$

Dæmi 6.4 Gefið er að $\sin(u) = \frac{3}{5}$, $\cos(v) = -\frac{2}{5}$, u er í 1. fjórðungi og v er í 3. fjórðungi. Reiknaðu nákvæm gildi á cos(u – v), sin(u + v) og tan(u – v).

Lausn. Finnum fyrst cos(u) og sin(v).

Notum regluna $\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$ og fáum:

$$\cos^2(u) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \;\Rightarrow\; \cos^2(u) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \;\Rightarrow\; \cos(u) = \pm\frac{4}{5}$$

Nú er u í 1. fjórðungi svo cos(u) er jákvæð tala þannig að $\cos(u) = \frac{4}{5}$.

og

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \sin^2(v) = 1 \;\Rightarrow\; \sin^2(v) = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \;\Rightarrow\; \sin(v) = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

(v er í 3. fjórðungi svo að sin(v) er neikvæð tala.)

Summuformúlurnar gefa þá að:

$$\cos(u - v) = \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) = \frac{-8 - 3\cdot\sqrt{21}}{25}$$

$$\sin(u + v) = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) = \frac{-6 - 4\cdot\sqrt{21}}{25}$$

Finnum næst tan(u) og tan(v):

$$\tan(u) = \frac{\sin(u)}{\cos(u)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \quad \text{og} \quad \tan(v) = \frac{-\frac{\sqrt{21}}{5}}{-\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

Og með summuformúlunni tan(u – v) fæst:

$$\tan(u - v) = \frac{\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{21}}{2}}{1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{21}}{2}} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{21}}{2}}{1 + \frac{3\cdot\sqrt{21}}{8}} = \frac{6 - 4\cdot\sqrt{21}}{8 + 3\cdot\sqrt{21}}$$

Athugið að í síðasta skrefi var brotabrotið lengt með 8.

Sé brotið lengt með samoka tölunni $8 - 3\cdot\sqrt{21}$ og síðan stytt með 25 fæst svarið

$$\frac{-12 + 2\cdot\sqrt{21}}{5}$$

Tvöföldunarformúlur fyrir hornaföll

I	$\cos(2v) = \cos^2(v) - \sin^2(v)$
II	$\sin(2v) = 2\sin(v)\cos(v)$
III	$\tan(2v) = \dfrac{2\tan(v)}{1-\tan^2(v)}$
IV	$\cos(2v) = 2\cos^2(v) - 1$
V	$\cos(2v) = 1 - 2\sin^2(v)$

Fyrstu þrjár tvöföldunarformúlurnar fást með því að setja $u = v$ í summuformúlur 2, 4 og 6.

Summuformúla 2:	$\cos(u + v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$
Látum $u = v$ og þá fæst:	$\cos(v + v) = \cos(v)\cos(v) - \sin(v)\sin(v)$
sem gefur:	$\cos(2v) = \cos^2(v) - \sin^2(v)$

Summuformúla 4:	$\sin(u + v) = \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)$
Látum $u = v$ og þá fæst:	$\sin(v + v) = \sin(v)\cos(v) + \cos(v)\sin(v)$
sem gefur:	$\sin(2v) = 2\sin(v)\cos(v)$

Formúlan fyrir $\tan(2v)$ fæst með því að láta $u = v$ í 6. summuformúluna.

Formúla IV fyrir $\cos(2v)$ fæst með því að nota að $\sin^2(v) = 1 - \cos^2(v)$ (en það fæst með því að einangra sínusliðinn í formúlunni $\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$) og setja inn í tvöföldunarformúlu 1:

$$\cos(2v) = \cos^2(v) - \sin^2(v) = \cos^2(v) - (1 - \cos^2(v)) = 2\cos^2(v) - 1$$

Formúla V fæst með því að nota að $\cos^2(v) = 1 - \sin^2(v)$ og setja það inn í tvöföldunarformúlu I:

$$\cos(2v) = \cos^2(v) - \sin^2(v) = 1 - \sin^2(v) - \sin^2(v) = 1 - 2\sin^2(v)$$

Dæmi 6.5 Gefið er að cos(v) = $\frac{5}{13}$ og v er í 4. fjórðungi. Reiknaðu nákvæm gildi á cos(2v), sin(2v) og tan(2v).

Lausn: Hægt er að reikna cos(2v) með fjórðu tvöföldunarformúlunni:

$$\cos(2v) = 2\cdot\left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = \frac{50}{169} - 1 = -\frac{119}{169}$$

Til að geta notað formúluna fyrir sin(2v) þarf að þekkja bæði sin(v) og cos(v).

Finnum næst sin(v) með því að nota formúluna $\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$. Þá fæst

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \sin^2(v) = 1 \Rightarrow \sin^2(v) = \frac{144}{169} \Rightarrow \sin(v) = -\frac{12}{13}$$

Þar sem v er í 4. fjórðungi er sin(v) mínustala.

Reiknum næst sin(2v):

$$\sin(2v) = 2\cdot -\frac{12}{13}\cdot\frac{5}{13} = -\frac{120}{169}$$

Einfaldara er að reikna tan(2v) með því að deila cos(2v) upp í sin(2v) heldur en að nota tvöföldunarformúluna fyrir tangens. Þá fæst:

$$\tan(2v) = \frac{-\frac{120}{169}}{-\frac{119}{169}} = \frac{120}{119}$$

Hinn möguleikinn er að reikna tan(v) = $\frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$ og nota tvöföldunarformúluna fyrir tan(v).

Dæmi 6.6 Í þríhyrningnum ABC er gefið að a = 5, b = 7 og hornið B er tvöfalt stærra en hornið A. Reiknaðu hornin og hliðina c.

Lausn: Látum $\angle A = x$ og $\angle B = 2x$, notum sínusregluna og regluna um sínus af tvöföldu horni:

$$\frac{\sin(x)}{5} = \frac{\sin(2x)}{7} \Rightarrow \frac{\sin(x)}{5} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{7}$$

Eyðum næst brotum og þá fæst:

$$7\sin(x) = 10\sin(x)\cos(x)$$

Deilum nú með sin(x) í báðar hliðar (sin(x) = 0 er ekki möguleg lausn) og þá fæst að

$$7 = 10\cos(x) \Rightarrow \cos(x) = \frac{7}{10} \Rightarrow x \approx 45{,}6^\circ$$

Svo $\angle A \approx 45{,}6^\circ$, $\angle B \approx 91{,}1^\circ$ og $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B \approx 43{,}3^\circ$

Hliðina c er síðan hægt að finna með cosínusreglunni (eða sínusreglunni):

$$c^2 \approx 5^2 + 7^2 - 2\cdot 5\cdot 7\cdot \cos(43{,}3^\circ) \approx 23{,}04 \Rightarrow c \approx 4{,}8$$

Það eru lítil takmörk fyrir hvað hægt er að búa til margar formúlur í hornafræðinni. Hægt er að snúa tvöföldunarformúlunum við og þá fást formúlur sem kallast helmingunarformúlur fyrir hornaföll. Hægt er að leggja summuformúlurnar saman og búa til formúlur sem kallast liðunar- og þáttunarformúlur og síðan er hægt að búa til formúlur fyrir þreföld horn, fjórföld og þannig endalaust áfram.

Helmingunarformúlur fyrir hornaföll

Hægt er að snúa tvöföldunarformúlunum IV og V við og fá fram svokallaðar helmingunarformúlur.

Athugum tvöföldunarformúlu IV:

$$\cos(2v) = 2\cos^2(v) - 1$$
$$\Downarrow$$
$$\cos(2v) + 1 = 2\cos^2(v)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\cos(2v)+1}{2} = \cos^2(v)$$
$$\Downarrow$$
$$\pm\sqrt{\frac{\cos(2v)+1}{2}} = \cos(v)$$

Í stað 2v og v má setja formúluna fram með v og $\frac{1}{2}v$. Hún lítur þá svona út:

$$\cos\left(\frac{1}{2}v\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(v)}{2}}$$

Á hliðstæðan hátt er hægt að einangra sin(v) í formúlu V og þá fæst

$$\sin(v) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(2v)}{2}} \quad \text{eða} \quad \sin\left(\frac{1}{2}v\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(v)}{2}}$$

Loks fæst formúla fyrir tangens með því að deila helmingunarformúlunni fyrir cos(v) upp í samsvarandi formúlu fyrir sin(v) og þá fæst

$$\tan(v) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(2v)}{1+\cos(2v)}} \quad \text{eða} \quad \tan\left(\frac{1}{2}v\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(v)}{1+\cos(v)}}$$

Dæmi 6.7 Notaðu helmingunarformúlu til að reikna nákvæmt gildi á sin(15°).

Lausn: sin(15°) = $\sqrt{\frac{1-\cos(30°)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

(Ath. vitað er að sin(15°) er jákvæð tala svo aðeins jákvæða talan kemur til greina.

Þegar sin(15°) var reiknað með summuformúlu fékkst niðurstaðan

sin(15°) = $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ og því hefur verið sýnt að $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Við hverfum nú út úr þessum formúlufrumskógi með því að búa til þreföldunarformúlur fyrir sínus og cosínus.

$$\cos(3v) = 4\cos^3(v) - 3\cos(v)$$
$$\sin(3v) = 3\sin(v) - 4\sin^3(v)$$

Sönnun á þreföldunarformúlunni fyrir cosínus

cos(3v) = cos(2v + v) = cos(2v)cos(v) – sin(2v)sin(v)   (summuformúla 2)

= $(2\cos^2(v) - 1)\cos(v) - 2\sin(v)\cos(v)\sin(v)$ (tvöföldunarformúlur 4 og 2)

= $2\cos^3(v) - \cos(v) - 2\sin^2(v)\cos(v)$ (margfaldað upp úr sviga)

= $2\cos^3(v) - \cos(v) - 2(1 - \cos^2(v))\cos(v)$ (notað að $\sin^2(v) = 1 - \cos^2(v)$)

= $2\cos^3(v) - \cos(v) - 2\cos(v) + 2\cos^3(v)$ (reiknað upp úr sviga)

= $4\cos^3(v) - 3\cos(v)$ ■

Reglan fyrir sínus af þreföldu horni er sönnuð á hliðstæðan hátt.

Dæmi 6.8 Reiknaðu nákvæmt gildi á sin(3v) ef gefið er að cos(v) $= \dfrac{5}{13}$ og v er í fjórða fjórðungi.

Lausn: Notum fyrst formúluna $\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$ til að finna sin(v):

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \sin^2(v) = 1 \Rightarrow \sin^2(v) = \frac{144}{169} \Rightarrow \sin(v) = -\frac{12}{13}$$

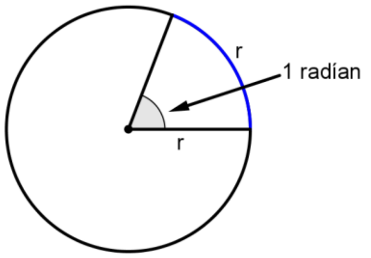
því sínusinn er mínustala þar sem v er í fjórða fjórðungi. Notum svo þreföldunarformúlu til að reikna sin(3v):

$$\sin(3v) = 3\left(-\frac{12}{13}\right) - 4\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)^3 = -\frac{36}{13} + \frac{6912}{2197} = \frac{828}{2197}$$

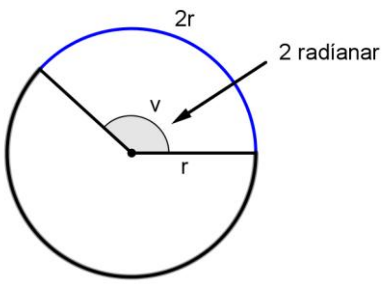
Radíanar

Hingað til hafa horn og hringbogar verið mæld í gráðum. 1 gráða (1°) er $\frac{1}{360}$ af hringnum og allur hringurinn því 360°. Horn með miðju í oddpunkti hrings (miðhorn) er svo mælt jafn margar gráður og boginn á milli arma þess. Til er önnur mælieining fyrir horn og hringboga sem kallast radíanar (skammstafað rad) en þá er radíus hringsins notaður sem mælieining. Radíanar eru einnig kallaðir bogaeiningar.

Skilgreining: Miðhorn (miðhorn er horn með oddpunkt í miðju hrings) er 1 rad ef armar þess skera boga af hringnum sem er jafn radíus hringsins.

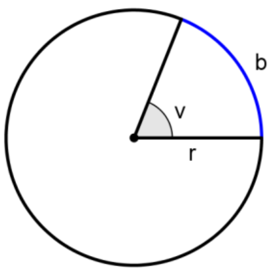


Dæmi 6.9 Hornið v á myndinni er 2 rad



Almennt gildir að ef miðhornið v sker boga af hringum sem er b að lengd þá er

$$v = \frac{b}{r}\ \text{rad}$$



Þar sem ummál hrings er gefið með formúlunni $U = 2\pi r$ fæst að einn hringur er nákvæmlega 2π radíanar ($\approx 6{,}28$ radíanar) og hálfur hringur því nákvæmlega π radíanar ($\approx 3{,}14$ radíanar). Þessa niðurstöðu má svo nota til að finna almennt samband á milli radíana og gráða.

$180° = \pi$ rad	deilum með 180 í báðar hliðar
þá fæst $1° = \dfrac{\pi}{180}$ rad $(\approx 0{,}0175 \text{ rad})$	margföldum báðar hliðar með x
og þá fæst $x° = \dfrac{x \cdot \pi}{180}$ rad	$(x° = x \cdot 1°)$

Gráðum er sem sagt breytt í radíana með því að margfalda gráðutöluna með π og deila með 180.

Dæmi 6.10 Breyttu eftirfarandi gráðum í radíana.

a) 23° b) 253,6° c) 90° d) $-60°$

Lausn: a) $\dfrac{23 \cdot \pi}{180} \approx 0{,}40$ b) $\dfrac{253{,}6 \cdot \pi}{180} \approx 4{,}43$ c) $\dfrac{90 \cdot \pi}{180} = \dfrac{\pi}{2}$ $(\approx 1{,}57)$

d) $\dfrac{-60 \cdot \pi}{180} = -\dfrac{\pi}{3}$ $(\approx -1{,}05)$

Ath. Í liðum c) og d) var gefið nákvæmt svar. Ef hægt er að stytta gráðutöluna á móti 180° er venja að stytta brotið og gefa nákvæmt svar þar sem talan π er ekki námunduð en reikna annars út úr brotinu eins og gert var í a) og b)-lið.

Venja er að sleppa að rita rad þegar horn er mælt í radíönum. Þar sem ekki má sleppa gráðumerki þegar horn er mælt í gráðum á það ekki að fara á milli mála hvort horn er mælt í radíönum eða gráðum.

Ef breyta á radíönum í gráðum fæst á hliðstæðan hátt:

$180° = \pi$ rad	deilum með π í báðar hliðar
þá fæst $\dfrac{180°}{\pi} = 1$ rad $(\approx 57{,}3°)$	margföldum báðar hliðar með x
og þá fæst $\dfrac{x \cdot 180°}{\pi} = x$ rad	$(x \text{ rad} = x \cdot 1 \text{ rad})$

Radían er sem sagt breytt í gráður með því að margfalda með 180° og deila með π.

Dæmi 6.11 Breyttu þessum radíönum í gráður.

a) 2 b) 0,75 c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{3\pi}{2}$

Lausn: a) $\frac{2 \cdot 180°}{\pi} \approx 114{,}6°$ b) $\frac{0{,}75 \cdot 180°}{\pi} \approx 42{,}97°$ c) $\frac{2 \cdot 180°}{3} = 120°$

d) $\frac{3 \cdot 180°}{2} = 270°$

Í liðum c) og d) var hægt að stytta sér leið með því að skipta á π og 180°.

Það er mikilvægt að öðlast tilfinningu fyrir mælieiningunni radían. Með grófri námundun má nota að hálfur hringur er rúmlega 3 (rad) og 1 (rad) er tæplega 60°.

Fyrsta umferð þ.e. bilið $[0°, 360°[$ verður $[0, 2\pi[$ í radíönum og heilar umferðir þ.e. $h \cdot 360°$ verður $h \cdot 2\pi$ í radíönum. Reglurnar

R1: $\cos(v) = \cos(v + h \cdot 360°)$ og $\sin(v) = \sin(v + h \cdot 360°)$, $h \in Z$

R2: $\sin(180° - v) = \sin(v)$
$\cos(180° - v) = -\cos(v)$

R3: $\sin(360° - v) = -\sin(v)$
$\cos(360° - v) = \cos(v)$

R4: $\sin(v + 180°) = -\sin(v)$
$\cos(v + 180°) = -\cos(v)$

verða **R1**: $\cos(v) = \cos(v + h \cdot 2\pi)$ og $\sin(v) = \sin(v + h \cdot 2\pi)$, $h \in Z$

R2: $\sin(\pi - v) = \sin(v)$
$\cos(\pi - v) = -\cos(v)$

R3: $\sin(2\pi - v) = -\sin(v)$
$\cos(2\pi - v) = \cos(v)$

R4: $\sin(v + \pi) = -\sin(v)$
$\cos(v + \pi) = -\cos(v)$

ef hornin eru mæld í radíönum.

Dæmi 6.12 Leystu jöfnuna sin(x) = 0,8 , $x \in [0\,,\,2\pi[$.

Lausn I:
Leysum jöfnuna fyrst í gráðum og breytum svo í radíana.

Fáum eina lausn x = $\sin^{-1}(0{,}8) \approx 53{,}13^\circ$ og hin lausnin er frændhornið sem er um það bil $180^\circ - 53{,}13^\circ = 126{,}87°$.
Breytum næst í radíana og þá fást lausnirnar 0,93 og 2,21. Ef finna á nákvæm svör þ.e. gefa hornin upp með tölunni π þarf að fara þessa leið.

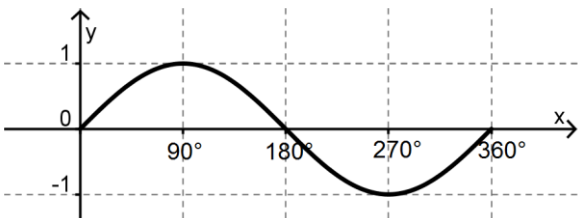
Lausn II:
Stillum vasareikninn á rad (Shift Menu og velja rad) og fáum eina lausn (sem er þá í radíönum) $x = \sin^{-1}(0{,}8) \approx 0{,}93$ og hin lausnin verður frændhornið sem er $\pi - 0{,}93 \approx 2{,}21$

Gröf sin(x), cos(x) og tan(x)

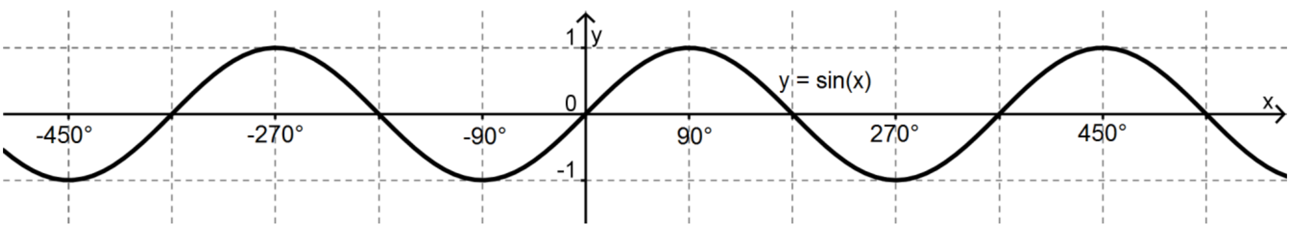
Merkjum punkta inn í hnitakerfi samkvæmt gildistöflunni og tengjum þá saman.

x	sin(x)
0°	0
90°	1
180°	0
270°	-1
360°	0

Þá fæst eftirfarandi mynd sem sýnir sínusgrafið í fyrstu umferð.

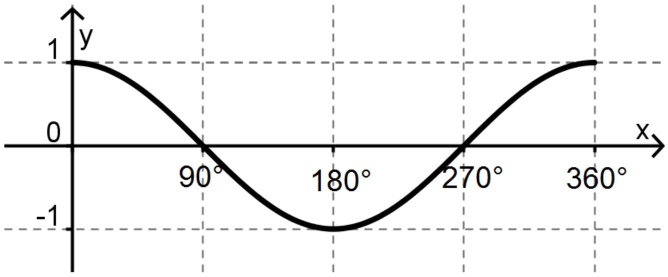


Þar sem sínusfallið endurtekur sig í hverri umferð (samkvæmt reglunni sin(x) = sin$(x + h \cdot 360^\circ)$) endurtekur þessi bútur af grafi sig endalaust í báðar áttir eins og sést á myndinni hér fyrir neðan.

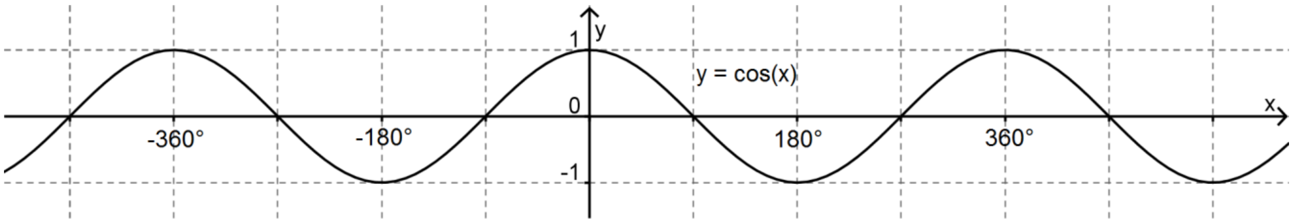


Á sama hátt fæst graf kósínusfallsins. Merkjum punkta inn samkvæmt gildistöflu og tengjum þá saman. Þá fæst eftirfarandi mynd sem sýnir kósínusgrafið í fyrstu umferð:

x	cos(x)
0°	1
90°	0
180°	−1
270°	0
360°	1



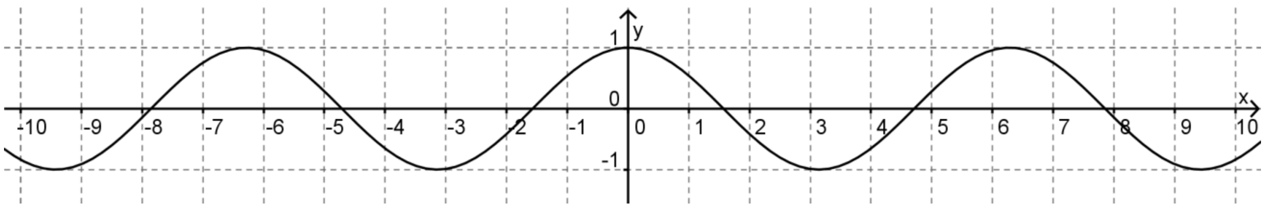
Þessi bútur grafsins endurtekur sig endalaust í báðar áttir eins og sínusfallið gerir því $\cos(x) = \cos(x + h \cdot 360°)$. Svona lítur graf kósínufallsins út.



Séu gröf fallanna sin(x) og cos(x) borin saman sést að þau eru í aðalatriðum alveg eins. Sé öðru grafinu hliðrað um 90° fellur það saman við hitt grafið. Þetta er í samræmi við regluna $\cos(x) = \sin(x + 90°)$.

Hægt er teikna þessi gröf í grafíska vasareikninum í valmyndinni GRAPH. Stilltu vasareikninn á gráður (deg) og veldu stillinguna TRIG í SHIFT F3.

Eins og sjá má vorum við með gráður á x-ásnum. Í stað þess að nota gráður er eðlilegra að nota venjulegar einingar, það er að segja radíana. Stilltu vasareikninn á rad (SHIFT SETUP og Rad) og veldu svo stillinguna INIT í SHIFT F3. Þá lítur kósínusgrafið svona út.



Föll eins og sínus og kósínus sem endurtaka sig endalaust kallast lotubundin. Lota lotubundins falls f(x) er minnsta jákvæða tala p þannig að f(x + p) = f(x) fyrir öll x í skilgreiningarmengi fallsins f(x). Lota sínus og kósínusfallsins er 2π (360°).

Gröf sínus og kósínusfallsins líta út eins og bylgjur og eru föllin stundum nefnd bylgjuföll. Hægt er nota þau til að lýsa bylgjum í náttúrunni og gegna þau því mikilvægu hlutverki.

Séu föllin margfölduð með stuðli þá hefur það áhrif á hæð bylgjunnar (sveifluvídd) eða útslag. Til dæmis hefur fallið y = 4sin(x) útslagið 4.

Almennt gildir að ef a er jákvæð tala þá hafa f(x) = asin(x) og g(x) = acos(x) útslagið a.

Sé x-ið hins vegar margfaldað með stuðli hefur það áhrif á tíðni bylgjunnar, þ.e. hversu oft bylgjan endurtekur sig á bili sem er 2π (360°). Til dæmis hefur fallið y = sin(2x) tíðnina 2 og lotuna $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

Almennt gildir að tíðni f(x) = sin(bx) og g(x) = cos(bx) er b og lotan er $\frac{2\pi}{b}$.

Sé stuðli bætt við föllin þá hefur það áhrif á miðlínu bylgjunnar, þ.e. lárétta línu sem er mitt á milli hæstu toppa og lægstu botna. Til dæmis er miðlína fallsins y = sin(x) + 3 lárétta línan y = 3.

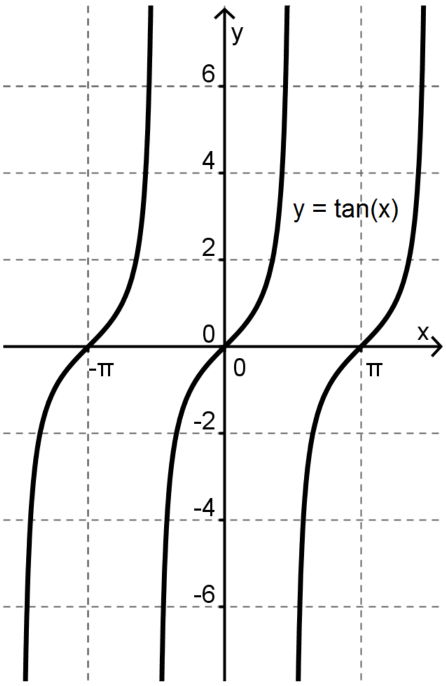
Almennt gildir að miðlína fallanna y = sin(x) + c og y = cos(x) + c er lárétta línan y = c.

Að lokum skulum við líta á graf tan(x). Það er gjörólíkt gröfum sin(x) og cos(x).

Í fyrsta lagi þá er $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ekki skilgreint fyrir þau x-gildi þar sem cos(x) = 0 (bannað að deila með 0) en í hverri umferð eru tvö x-gildi þar sem cos(x) = 0 og þar slitnar graf tangensfallsins í sundur.

Í öðru lagi getur tan(x) orðið hvaða tala (jákvæð eða neikvæð) sem vera skal á meðan sin(x) og cos(x) geta aldrei orðið hærri en 1 eða lægri en – 1.

Og í þriðja lagi er lota tangensfallsins π því að tan(x + π) = tan(x) gildir fyrir öll x í skilgreiningarmenginu tan(x). Svona lítur grafið út:



Kafli 7 – Almenn lausn hornafallajafna

Jafnan sin(x) = c

Þar sem hæsta mögulega gildi á sin(x) er 1 og lægsta mögulega gildi er – 1 hefur jafnan sin(x) = c ekki lausn nema ef c $\in[-1{,}1]$.

Samkvæmt reglunni um að frændhorn hafa sama sínus, þ.e. sin(x) = sin(180° – x) fást tvær lausnir á jöfnunni í fyrstu umferð (undantekning er þó ef c = ± 1 en þá er aðeins ein lausn). Lausnin sem vasareiknirinn gefur verður kölluð grunnlausn jöfnunnar. Frændhorn grunnlausnarinnar er einnig lausn. En þar sem sínusfallið endurtekur sig í hverri umferð samanber reglan $\sin(x)=\sin(x+h\cdot 360^\circ)$ fást nýjar og nýjar lausnir með því að bæta heilum umferðum við grunnlausnina og frændhorn hennar. Jafnan hefur sem sagt óendanlega margar lausnir (tvær í hverri umferð) sem fást með því að bæta heilum umferðum við grunnlausnina og frændhornið. Að finna allar lausnir jöfnunnar kallast að finna almenna lausn. Sé ekki annað tekið fram er eðlilegast að gefa svarið í gráðum. Ef finna á almenna lausn í radíönum er tekið fram að breytan (venjulega x) sé stak í R, þ.e. að $x\in R$.

Dæmi 7.1 Finndu almenna lausn jöfnunnar sin(x) = 0,7.

Lausn: Finnum grunnlausnina í vasareikninum. Hún er $\sin^{-1}(0{,}7)\approx 44{,}43^\circ$ og frændhornið er $180^\circ-44{,}43^\circ=135{,}57^\circ$. Þá er almenna lausnin

$$x\approx\begin{cases}44{,}43^\circ+h\cdot 360^\circ\\135{,}57^\circ+h\cdot 360^\circ\end{cases},\quad h\in Z$$

Dæmi 7.2 Finndu almenna lausn jöfnunnar sin(3x +20°) = 0,2 og lausnir í 1. umferð.

Lausn: Grunnlausnin er $\sin^{-1}(0{,}2)\approx 11{,}54^\circ$ og frændhornið er 168,46°

Þá er $3x+20^\circ\approx\begin{cases}11{,}54^\circ+h\cdot 360^\circ\\168{,}46^\circ+h\cdot 360^\circ\end{cases}$. Síðan þarf að einangra x-ið

$$3x\approx\begin{cases}-8{,}46^\circ+h\cdot 360^\circ\\148{,}46^\circ+h\cdot 360^\circ\end{cases}$$ (20° dregnar frá báðum hliðum)

$$x\approx\begin{cases}-2{,}82^\circ+h\cdot 120^\circ\\49{,}49^\circ+h\cdot 120^\circ\end{cases},\quad h\in Z$$ (deilt með 3 í báðar hliðar)

Lausnir í 1. umferð eru 117,18° , 237,18°, 357,18°, 49,49°, 169,49° og 289,49°. Þrjár fyrstu lausnirnar fást með því að velja h = 1 , h = 2 og h = 3 og setja inn í stæðuna $-2{,}82^\circ+h\cdot 120^\circ$ og seinni þrjár lausnirnar fást með því að velja h = 0, h = 1 og h = 2 og setja inn í stæðuna $49{,}49^\circ+h\cdot 120^\circ$.

Taktu eftir að í stað lausnarinnar $-2{,}82^\circ+h\cdot 120^\circ$ má gefa upp $117{,}18^\circ+h\cdot 120^\circ$.

Dæmi 7.3 Leystu jöfnuna $\sin(x) = -0{,}91$, $x \in R$.

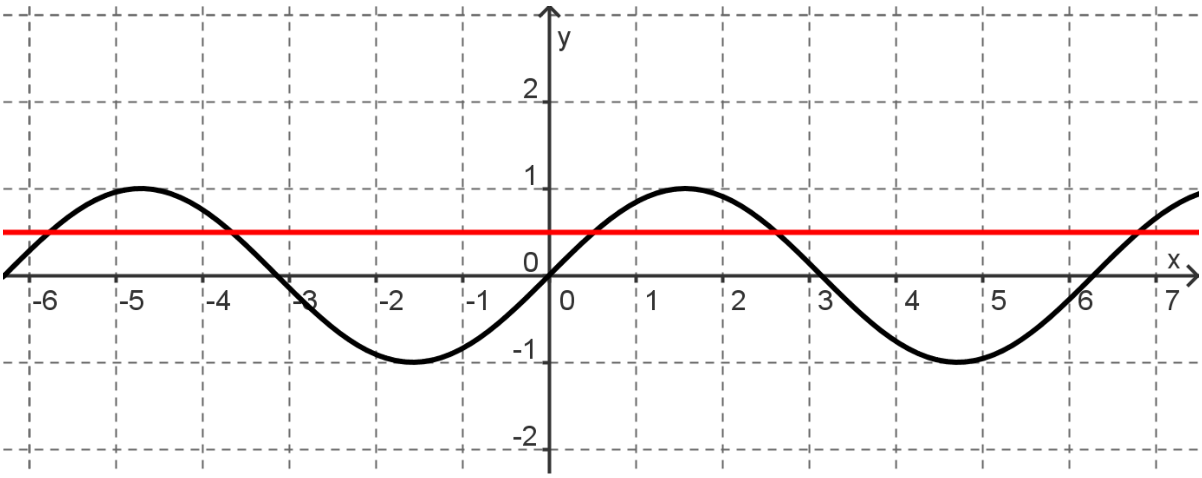
Lausn: Hér á að finna almenna lausn í radíönum. Stillum vasareikninn á rad til að fá lausn í radíönum: Grunnlausnin í radíönum er $\sin^{-1}(-0{,}91) \approx -1{,}14$ og frændhornið er $\pi - (-1{,}14) \approx 4{,}28$. Þá er almenna lausnin

$$x \approx \begin{cases} -1{,}14 + h \cdot 2\pi \\ 4{,}28 + h \cdot 2\pi \end{cases} , \quad h \in Z$$

Hægt er að skoða lausnir jafna á grafi. Skoðum lausnir jöfnunnar sin(x) = 0,5 á grafi.

Á myndinni hér fyrir neðan sést graf hornafallsins f(x) = sin(x) og línunnar y = 0,5.
Lausnir jöfnunnar sin(x) = 0,5 eru x-hnit skurðpunkta grafanna á myndinni hér fyrir neðan.
Lausnirnar eru óendanlega margar og eru tvær ólíkar lausnir í hverri umferð.

Grunnlausn jöfnunnar er $\sin^{-1}(0{,}5) = 30°$ (eða $\frac{\pi}{6}$ ef reiknað er í radíönum) en þar sem frændhorn hafa sama sínus fæst önnur lausn sem er 180° – 30° = 150° (eða $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ef reiknað er í radíönum.)
Með því að bæta heilum umferðum við (eða draga frá) þessar tvær lausnir fást lausnir í öðrum umferðum.



Jafnan cos(x) = c

Það gildir sama um cosínusinn eins og um sínusinn að hæsta mögulega gildi á cos(x) er 1 og lægsta mögulega gildi er – 1 svo jafnan hefur enga lausn nema þegar $c \in [-1,1]$.
Þar sem cos(v) = cos(–v) þá er – x lausn ef x er lausn og það er hægt að nota til að finna almenna lausn jöfnunnar.

Dæmi 7.4 Leystu jöfnuna cos(x) = 0,62.

Lausn: Grunnlausnin er $\cos^{-1}(0{,}62) \approx 51{,}68^\circ$. Þá er almenna lausnin $x \approx \pm 51{,}68^\circ + h \cdot 360^\circ \quad , \; h \in Z$.

Dæmi 7.5 Leystu jöfnuna $\cos(2x - 50^\circ) = 0{,}35$.

Lausn: $\cos^{-1}(0{,}35) \approx 69{,}51^\circ$. Þá er $2x - 50^\circ \approx \begin{cases} 69{,}51^\circ + h \cdot 360^\circ \\ -69{,}51^\circ + h \cdot 360^\circ \end{cases}$. Síðan þarf að einangra x-ið: $2x \approx \begin{cases} 69{,}51^\circ + 50^\circ + h \cdot 360^\circ \\ -69{,}51^\circ + 50^\circ + h \cdot 360 \end{cases}$ og þá er $x \approx \begin{cases} 59{,}76^\circ + h \cdot 180^\circ \\ -9{,}76^\circ + h \cdot 180^\circ \end{cases} \quad , \quad h \in Z$

Jafnan tan(x) = c

Þessi jafna er frábrugðin hinum tveimur vegna þess að hún hefur lausn fyrir öll gildi á tölunni c. Vegna reglunnar $\tan(x) = \tan(x + h \cdot 180^\circ)$ fæst almenna lausn jöfnunnar með því að bæta hálfum umferðum við grunnlausnina.

.

Dæmi 7.6 Finndu allar lausnir jöfnunnar tan(2x) = 1 sem eru í fyrstu umferð og hafðu svarið í radíönum.

Lausn: Fyrst finnum við almennu lausnina:

Grunnlausnin er x = $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$ sem er $\frac{\pi}{4}$ (eða 0,79) í radíönum.

$$\text{Nú fæst } 2x = \frac{\pi}{4} + h \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{8} + h \cdot \frac{\pi}{2} \quad , \; h \in Z$$

Lausnir í fyrstu umferð fást ef h = 0, h = 1 , h = 2 og h = 3 og þær eru

$$\frac{\pi}{8} \, , \; \frac{5\pi}{8} \, , \; \frac{9\pi}{8} \, , \; \frac{13\pi}{8}$$

Jafnan $A\sin^2(x)+B\sin(x)\cos(x)+C\cos^2(x)=D$.

Þessari jöfnu (þ.e. jöfnu sem inniheldur liði af þessari gerð) má breyta í annars stigs tangensjöfnu.

Dæmi 7.7 Leystu jöfnuna $\sin^2(x)+2\sin(x)\cos(x)-\cos^2(x)=0$.

Lausn: Hér er D = 0 og lykillinn að lausninni er að deila með $\cos^2(x)$ í sérhvern lið jöfnunnar en hún breytist þá í annars stigs tangensjöfnu:

$$\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}+\frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x)}-\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{0}{\cos^2(x)}$$

sem verður $\tan^2(x)+2\tan(x)-1=0$

Ath. $\dfrac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x)}=2\cdot\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\cdot\dfrac{\cos(x)}{\cos(x)}=2\tan(x)$

Annars stigs jafnan hefur lausnirnar 0,414 og –2,414 svo

tan(x) = –2,414 eða tan(x) = 0,414. Við leysum svo tangensjöfnurnar og þá fæst:

$$x\approx\begin{cases}-67{,}5^\circ+h\cdot180^\circ\\ 22{,}5^\circ+h\cdot180\end{cases},\quad h\in Z$$

Dæmi 7.8 Leystu jöfnuna $2\sin^2(x)-2\sin(x)\cos(x)+4\cos^2(x)=3$.

Lausn: Hér er D = 3 ($\neq 0$). Þá gengur ekki að byrja á að deila með $\cos^2(x)$ í hvern lið heldur þarf að byrja á að beita brögðum. Þau eru í því fólgin að losa sig við fasta liðinn (D – liðinn) með því að notfæra sér regluna $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$. Séu báðar hliðar í þessari jöfnu margfaldaðar með 3 (þ.e. D) fæst: $3\cos^2(x)+3\sin^2(x)=3$. Við setjum síðan stærðina $3\cos^2(x)+3\sin^2(x)$ í staðinn fyrir 3 í hægri hlið jöfnunnar í dæminu:

$$2\sin^2(x)-2\sin(x)\cos(x)+4\cos^2(x)=3\cos^2(x)+3\sin^2(x)$$

Færum næst alla liði í vinstri hlið og einföldum og þá fæst

$$-\sin^2(x)-2\sin(x)\cos(x)+\cos^2(x)=0$$

og nú er hægt að deila með $\cos^2(x)$ í alla liði og fá fram annars stigs tangens jöfnu. Framhaldið verðu eins og í síðasta sýnidæmi því að lausnir tangensjöfnunnar eru þær sömu og í síðasta sýnidæmi.

Sértilvik. Það getur gerst að $\sin^2(x)$-liðurinn hverfi úr jöfnunni þegar D-stuðlinum er eytt. Í því tilviki fæst fyrsta stigs tangensjafna þegar deilt er með $\cos^2(x)$ í alla liði en jafnframt er cos(x) = 0 lausn á jöfnunni. Almenn lausn jöfnunnar cos(x) = 0 er $x = \pm 90^\circ + h \cdot 360^\circ$, $h \in Z$ og þarf að bæta þeim lausnum við lausnir tangensjöfnunnar til að fá almenna lausn upphaflegu jöfnunnar.

Dæmi 7.9 Finndu almenna lausn jöfnunnar $\sin^2(x) - 5\sin(x)\cos(x) + 2\cos^2(x) = 1$.

Lausn: Byrjum á að losa okkur við D-stuðulinn sem hér er talan 1. Setjum stærðina $\cos^2(x) + \sin^2(x)$ í stað 1 í hægri hlið, færum síðan alla liði í vinstri hlið og einföldum og þá fæst

$-5\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) = 0$ Nú sést að að cos(x) = 0 er lausn.

Næst deilum við með $\cos^2(x)$ í báðar hliðar og fáum $-5\tan(x) + 1 = 0$ sem er fyrsta stigs tangensjafna með almenna lausn $x = 11{,}3^\circ + h \cdot 180$ og munum svo eftir að bæta við lausnum jöfnunnar cos(x) = 0. Endanlegt svar er þá

$$x = \begin{cases} 11{,}3^\circ + h \cdot 180^\circ \\ \pm 90^\circ + h \cdot 360^\circ \end{cases} , \quad h \in Z$$

Dæmi 7.10 Finndu almenna lausn jöfnunnar 2cos(2x) + 3sin(2x) = 2 , $x \in R$

Lausn: Við fyrstu sýn virðist þessi jafna ekkert hafa með jöfnuna $A\sin^2(x) + B\sin(x)\cos(x) + C\cos^2(x) = D$ að gera en ekki er allt sem sýnist. Við notum tvöföldunarformúlurnar fyrir cos(2x) og sin(2x) og setjum jafnframt $2\cos^2(x) + 2\sin^2(x)$ í staðinn fyrir 2 í hægri hliðinni og þá fæst

$$2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) + 3 \cdot 2\sin(x)\cos(x) = 2\cos^2(x) + 2\sin^2(x)$$

Færum síðan alla liði í vinstri hlið, deilum með $\cos^2(x)$ og fáum annars stigs tangensjöfnu. Lausnir annars stigs jöfnunnar gefa tvær tangensjöfnur: tan(x) = 0 eða tan(x) = 1,5.
Þar sem svara á í radíönum er best að stilla vasareikninn á rad til að fá lausnir tangensjafnanna í raídönum.

Lausn upphaflegu jöfnunnar er: $x = \begin{cases} h \cdot \pi \\ 0{,}98 + h \cdot \pi \end{cases} , \quad h \in Z$

Að síðustu lítum við á nokkrar algengar jöfnur þar sem tvö hornaföll eru jöfn

Jafnan cos(u) = cos(v)

Til að leysa þessa jöfnu notum við reglurnar $\cos(x) = \cos(x + h \cdot 360^\circ)$ og $\cos(x) = \cos(-x + h \cdot 360^\circ)$. Samkvæmt þeim eru lausnir jöfnunnar cos(u) = cos(v) $u = \pm v + h \cdot 360^\circ$, $h \in Z$.

Dæmi 7.11 Finndu almenna lausn jöfnunnar cos(3x) = cos(2x + 50°).

Lausn: Fáum: $3x = 2x + 50^\circ + h \cdot 360^\circ$ eða $3x = -(2x + 50^\circ) + h \cdot 360^\circ$

Einöngrum x-ið í hvorri jöfnu fyrir sig og fáum:

$$x = 50^\circ + h \cdot 360^\circ \text{ eða } x = -10^\circ + h \cdot 72^\circ$$

Jafnan sin(u) = sin(v)

Hér notum við reglurnar $\sin(x) = \sin(x + h \cdot 360^\circ)$ og $\sin(x) = \sin(180^\circ - x + h \cdot 360^\circ)$.
Samkvæmt þeim eru lausnir jöfnunnar sin(u) = sin(v)
u = v + $h \cdot 360^\circ$ eða $u = 180^\circ - v + h \cdot 360$, $h \in Z$.

Dæmi 7.12 Finndu almenna lausn jöfnunnar sin(2x) = $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in R$.

Lausn: Höfum að $2x = \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + h \cdot 2\pi$ eða $2x = \pi - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + h \cdot 2\pi$

Einöngrum x-ið í hvorri jöfnu fyrir sig og fáum:

$$x = -\frac{\pi}{4} + h \cdot 2\pi \text{ eða } x = \frac{5\pi}{12} + h \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ , } h \in Z$$

Jafnan cos(u) = sin(v)

Með því að nota aðra hvora regluna sin(x) = cos(90° – x) eða cos(x) = sin(90° – x) er hægt að breyta jöfnunni í jöfnu af gerðinni cos(u) = cos(v) eða sin(u) = sin(v).

Dæmi 7.13 Finndu almenna lausn jöfnunnar cos(2x) = sin(3x).

Lausn: Notum að sin(3x) = cos(90° – 3x) og fáum jöfnuna: cos(2x) = cos(90° – 3x).

Þá er $2x = 90° - 3x + h \cdot 360°$ eða $2x = -(90° - 3x) + h \cdot 360°$. Einöngrum x-ið í hvorri jöfnu fyrir sig og þá fæst:

$$x = 18° + h \cdot 72° \text{ eða } x = 90° + h \cdot 360°$$

Við nánari athugun kemur í ljós að lausnirnar $x = 90° + h \cdot 360°$ eru innifaldar í lausnunum $x = 18° + h \cdot 72°$ (þegar h = 1 fæst x = 90°) og því nægir að gefa lausnina $x = 18° + h \cdot 72°$, $h \in Z$ upp sem lokasvar.

Jafnan tan(u) = tan(v)

Þar sem tan(x) = tan(x + $h \cdot 180°$) eru allar lausnir jöfnunnar tan(u) = tan(v) gefnar með u = v + $h \cdot 180°$, $h \in Z$.

Dæmi 7.14 Finndu almenna lausn jöfnunnar tan(4x + 30°) = tan(x + 45°).

Lausn: Höfum að $4x + 30° = x + 45° + h \cdot 180°$. Einöngrum x-ið og þá fæst:

$$x = 5° + h \cdot 60° \text{ , } h \in Z$$